TESIS

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN ADVEKSI DIFUSI 2-D UNTUK TRANSPORTASI POLUTAN DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DUFORT FRANKEL

NUMERICAL SOLUTION OF 2-D ADVECTION DIFFUSION FOR POLLUTANTS TRANSPORTATION BY DUFORT FRANKEL FINITE DIFFERENCE METHOD

A l m a n

P3500211005

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2013

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN ADVEKSI DIFUSI 2 D UNTUK MODEL TRANSPORTASI POLUTAN DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DUFORT FRANKEL

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi

Matematika Terapan

Disusun dan Diajukan oleh

Alman

Kepada

PROGRAM PASCASARJANA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2013

TESIS

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN ADVEKSI DIFUSI 2-D UNTUK MODEL TRANSPORTASI POLUTAN DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DUFORT FRANKEL

Disusun dan diajukan oleh

ALMAN

Nomor Pokok P3500211005

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis

pada tanggal 8 November 2013

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Menyetujui

Komisi Penasehat

Dr. Jeffry Kusuma, Ph.d	Dr. Eng. Amiruddin, M.Si
Ketua	Anggota

Ketua Program Studi Matematika Terapan,	Direktur Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin,
Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc	Prof. Dr. Ir. Mursalim, M.Sc

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Alman
Nomor Mahasiswa	: P3500211005
Program Studi	: Matematika Terapan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut. Semoga Tuhan melindungi saya dari perbuatan yang salah.

Makassar, 8 November 2013

Yang membuat pernyataan

Alman

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

AlhamdulillahiRabbilAlamin, adalah kalimat terindah yang patut penulis panjatkan kehadirat **Allah SWT.** Berkat rahmat dan RidhoNya, penulis diberikan kesehatan dan kekuatan sehingga tesis ini dapat terselesaikan. Tak Lupa pula penulis menghaturkan shalawat dan salam kepada baginda Rasul yang mulia, **Rasulullah Muhammad SAW.**

Ide dan gagasan yang menginspirasi dan melatari tajuk permasalahan ini timbul dari pengamatan penulis terhadap perkembangan sains dan teknologi khususnya dalam penggunaan komputer yang semakin dibutuhkan dalam membantu penyelesaian numerik persamaan differensial parsial. Di lain sisi, ditengarai ditemukan kesulitan-kesulitan bagi para *scientist* atau mahasiswa tugas akhir dalam menyelesaikan solusi analitik dari persamaan differensial parsial yang lebih kompleks.

Dalam menyelesaikan tesis ini, ada kemenangan yang diperjuangkan, ada rahasia yang digali dan ada hikmah yang dipetik dari setiap masalah/rintangan yang dihadapi, namun berkat partisipasi dan bantuan berbagai pihak, maka tesis ini dapat rampung dalam waktu yang tidak begitu lama. Pada kesempatan ini, dari lubuk hati yang paling dalam penulis

menyampaikan terima kasih yang tulus kepada Bapak **Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D** selaku Ketua Komisi Penasehat dan **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si** selaku Anggota Komisi Penasehat atas segala bantuan dan arahan yang telah diberikan mulai dari awal penulisan hingga terselesainya penulisan tesis ini. Terima kasih juga kepada Komisi Penguji Tesis, **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc, Dr.Muh. Altin Massinai, M.T.Surv** dan **Dr.Eng. Armin Lawi, M.Eng** yang telah banyak memberikan koreksi untuk kesempurnaan tesis ini.

Ucapan terima kasih yang sedalam-dalamnya penulis persembahkan kepada kedua orang tua saya, Ayahanda **La Saeta** dan Ibunda **Rusna** yang tanpa pamrih membesarkan, membimbing dan mendoakan penulis sehingga bisa menyelesaikan pendidikan hingga jenjang Magister. Tak luput juga ucapan terima kasih buat **nenek tercinta**, suadara-saudaraku **Dr. Rusli Iru, M.Pd**, **Risna, S.Si, M.Si**, **Fikal** dan **Awa** yang telah memberikan dukungan moril serta semangat. Dilain pihak, terima kasih buat **teman-teman pasca sarjana** Prodi Matematika Terapan Unhas Angkatan 2011 atas segala bentuk kerja samanya selama kuliah dan terima kasih buat **Ibu Evi** atas pelayanan yang baik selama proses admnistrasi. Semoga Tuhan Yang Maha Pengasih memberikan pahala yang berlimpah kepada kita semua, Amieen…!

Makassar, 8 November 2013

Alman

ABSTRAK

ALMAN. *Penyelesaian Numerik Persamaan Adveksi-Difusi 2-D untuk Transportasi Polutan dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort Frankel* (dibimbing oleh **Jeffry Kusuma** dan **Amiruddin**)

Penelitian ini bertujuan (1) mengetahui kekonsistenan, kestabilan dan kekonvergenan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaian persamaan Adveksi Diffusi untuk transportasi polutan 2 Dimensi, (2) mengetahui penyelesaian numerik dari persamaan adveksi difusi untuk transportasi polutan 2 dimensi.

Metode yang digunakan dalam dalam penelitian ini merupakan sebuah bagian dari metode beda hingga eksplisit yang disebut sebagai metode beda hingga Dufort Frankel. Untuk mempermudah perhitungan numerik, maka dalam penyelesaian masalah digunakan bantuan *software Matlab 2009*. Disamping itu, penggunaan software ini diperlukan untuk menampilkan simulasi pergerakan polutan yang ditampilkan dalam bentuk gambar.

Hasil penelitian ini menunjukan bahwa penggunaan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaikan persamaan matematika dari transportasi polutan (adveksi diffusi) 2-D dapat dikatakan konsisten, stabil tidak bersyarat dan konvergen. Hasil simulasi yang dilakukan menunjukan sebuah pergerakan polutan terangkut dalam aliran air yang sekaligus mengalami proses diffusi.

ABSTRACT

ALMAN. *Numerical Solution of 2-D Advection Diffusion Equation for Pollutants Transportation by Dufort Frankel Finite Difference Method.* (supervised by **Jeffry Kusuma** and **Amiruddin**)

The aims of the study are to determine (1) the consistency, (2) the stability, and (3) the convergence of Dufort Frankel finite difference method in solving the advection-diffusion equation for 2-D pollutant transportation and (4) to acknowledge the numerical solution of the advection-diffusion equation for the 2-D pollutant transportation.

The research method is a part of explicit finite difference method called Dufort Frankel finite difference method. For easier numerical calculation in problem solving, a Matlab software 2009 was applied. The software shows the movement simulation of pollutant in pictures.

The result of the research indicated that the use of Dufort Frankel finite difference method in solving mathematical equation of 2-D pollutant transportation (advection-diffusion) is consistent, unconditionally stable and convergent. The result of simulation shows that the movement of pollutant transportation in water flows as a process of diffusion.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Fenomena aliran dan transport merupakan suatu gejala alam yang penting untuk dipelajari karena mempunyai pengaruh terhadap beberapa studi rekayasa. Fenomena tersebut terjadi dalam berbagai macam situasi fisik, seperti transfer panas, proses pemisahan zat kimia, aliran fluida dalam media berpori, penyebaran kontaminan dalam cairan dan juga transport partikel-partikel kecil seperti penyebaran polutan, garam, sedimen dan lain-lain di dalam perairan dangkal. Transportasi aliran air tersebut merupakan bagian dari dinamika fluida yang mengkaji perilaku zat cair dan gas dalam keadaan diam ataupun bergerak dan interaksinya dengan benda padat. Dinamika fluida sering dikatakan sebagai persoalan fisika klasik terbesar yang belum terpecahkan. Upaya untuk mengungkapkan fenomena dinamika fluida tercatat sejak Da Vinci melakukan observasi aliran pada abad ke-16, diikuti Newton pada akhir abad ke-17 dengan konsep viskositis Newtonian, lalu beberapa ilmuan besar seperti Bernoulli, Euler, Navier, Cauchy, Poisson, Saint Venant, dan Stokes. Dua konstribusi penting diberikan secara terpisah oleh Navier pada tahun 1823 dan Stokes pada tahun 1845 yang menurunkan persamaan diferensial parsial fluida viskos, persamaan ini membahas tentang persamaan gerak fluida viskos, persamaan ini dikenal dengan persamaan Navier-Stokes, dan persamaan inilah yang menjadi dasar kajian dinamika fluida saat ini.

Dalam kajian dinamika fluida, dipelajari bebagai karakteristik fluida, oleh karena itu perlu adanya gambaran karakteristik secara kualitatif dan kuantitatif. Aspek kualitatif berfungsi untuk mengidentifikasikan sifat dasar atau jenis dari karakteristik tersebut (seperti panjang, waktu, tegangan dan kecepatan), sementara aspek kuantitatif memberikan ukuran numerik dari karakterisik tersebut. Tiga pendekatan kajian (teori, eksperimen, dan komputasi) dilakukan orang dari berbagai disiplin ilmu termasuk fisika untuk memahami karakteristik tersebut.

Untuk mempermudah pemahaman mengenai dinamika fluida ini, telah dihasilkan metode-metode numerik dengan menggunakan komputer. Di mana metode numerik ini digunakan untuk menyelesaikan berbagai jenis persoalan dan dalam berbagai variasi keadaan. Metode beda hingga merupakan salah satu metode yang dapat diterapkan untuk kasus fenomena transport di perairan dangkal dan aliran air tanah yang biasanya dinyatakan dengan persamaan Adveksi Difusi karena metode ini dapat memberikan hasil pendekatan yang cukup akurat. Beberapa pendekatan beda skema beda hingga yang sering digunakan dalam penyelesaian transport aliran fluida dapat dibagi dalam dua bagian yaitu skema beda hingga *Eksplisit* (FTCS, Dufort Frankel, Leapfrog dan lain-lain) dan skema beda hingga *Implisit* (BTCS, Richardson, Crank-Nicolson, Metode ADI dan lain-lain).

Kemampuan metode beda hingga dalam memberikan hasil pendekatan tersebut, karena didukung oleh kemajuan yang sangat pesat dalam bidang komputer, baik dalam piranti lunak maupun hardware sehingga menyebabkan metode beda hingga diterapkan secara massif pada level yang lebih tinggi. Dengan kecanggihan piranti lunak dan hardware pada komputer sekarang, masalah rekayasa yang rumit dapat dimodelkan dengan relatif mudah. Waktu yang diperlukan untuk memecahkan masalah pun semakin singkat.

Berdasarkan uraian di atas, melahirkan sebuah ide untuk melakukan pendalaman tentang penyelesaian model adveksi diffusi transportasi polutan 2-D dengan sebuah pendekatan beda hingga yang dituangkan dalam bentuk tesis dengan judul :

“PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN ADVEKSI DIFUSI 2-D UNTUK TRANPORTASI POLUTAN DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DUFORT FRANKEL”

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana kekonsistenan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaian persamaan Adveksi Difusi untuk transfer polutan 2 Dimensi.
2. Bagaimana kestabilan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaian persamaan Adveksi Difusi untuk transfer polutan 2 Dimensi.

3. Bagaimana penyelesaian numerik dari persamaan adveksi difusi untuk transfer polutan 2 Dimensi dengan menggunakan metode beda hingga Dufort Frankel.
4. Bagaimana kekonvergenan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaian persamaan Adveksi Difusi untuk transfer polutan 2 Dimensi.

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tesis ini adalah :

1. Mengetahui kekonsistenan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaian persamaan Adveksi Difusi untuk transfer polutan 2 Dimensi.
2. Mengetahui kestabilan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaian persamaan Adveksi Difusi untuk transfer polutan 2 Dimensi.
3. Mengetahui penyelesaian numerik dari persamaan adveksi difusi untuk transfer polutan 2 Dimensi dengan menggunakan metode beda hingga Dufort Frankel.
4. Mengetahui kekonvergenan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaian persamaan Adveksi Difusi untuk transfer polutan 2 Dimensi.

D. Kegunaan Penelitian

Hasil kajian ini diharapkan dapat memperkaya bahan ajar matematika terapan khususnya pada mata kuliah Matematika Komputasi dan bidang ilmu yang terkait seperti persamaan differensial parsial dan metode beda hingga.

Dari hasil yang diperoleh dari penelitian ini juga diharapkan dapat menambah wawasan bagi penulis tentang materi penyelesaian numerik persamaan differensial parsial.

E. Ruang Lingkup Penelitian

Masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi pada angkutan polutan dalam air pada kasus aliran *Steady,* yang berarti bahwa segala karateristik aliran (kecepatan, kerapatan, dan difusifitas) dianggap tetap setiap waktu. Metode beda hingga yang digunakan adalah metode beda hingga *Dufort Frankel,* kemudian aplikasi komputer digunakan untuk memudahkan perhitungan dan penyajian gambar (visualisasi) menggunakan software *Matlab 2009.*

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Polusi

Polusi atau pencemaran lingkungan adalah masuknya atau dimasukkannya makhluk hidup, zat energi, dan atau komponen lain ke dalam lingkungan, atau berubahnya tatanan lingkungan oleh kegiatan manusia atau oleh proses alam sehingga kualitas lingkungan turun sampai ke tingkat tertentu yang menyebabkan lingkungan menjadi kurang atau tidak dapat berfungsi lagi sesuai dengan peruntukannya. Menurut tempat terjadinya, pencemaran atau polusi dapat digolongkan sebagai berikut *(Fardiaz, 1992)*:

1. *Pencemaran udara.* Sumber polusi udara berupa partikel-partikel atau gas yang dikeluarkan dari kenderaan bermotor. Selain itu juga sumber polusi ini dapat berasal dari radiasi bahan radioaktif, dan gas hasil buangan gunung berapi.
2. *Pencemaran air.* Sumber polusi air berasal dari pembuangan limbah industri misalnya Pb, Hg, Zn dan CO. Sisa insektisida, dan pembuangan sampah domestik misalnya sisa detergen juga bisa mencemari air.
3. *Pencemaran tanah.* Pencemaran ini biasanya disebabkan oleh pembuangan sampah-sampah plastik yang susah hancur, botol, karet, pecahan kaca, karet sintesis, kaleng dan lain-lain.

4. *Polusi suara.* Polusi suara biasanya disebabkan oleh suara bising kenderaan bermotor, pesawat, deru mesin pabrik yang keras dan dapat menganggu pendengaran.

Zat atau bahan yang dapat mengakibatkan pencemaran disebut sebagai *Polutan.* Syarat suatu zat disebut sebagai polutan jika jumlahnya melebihi batas normal, contohnya karbon dioksida dengan kadar 0,033% di udara berguna bagi tumbuhan, akan tetapi jika kadarnya lebih tinggi dari 0,033%, maka akan memberikan efek merusak. Disamping itu juga, suatu zat dapat dikatakan polutan jika keberadaannya pada waktu dan tempat yang tidak tepat.

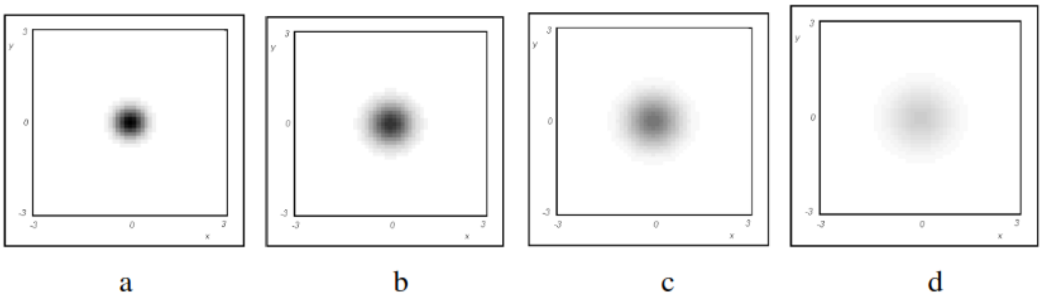
B. Persamaan Adveksi Diffusi

Persamaan Adveksi-Difusi merupakan persamaan differensial parsial yang menggambarkan sebuah persoalan fenomena transportasi polutan aliran air tanah, yang sering disebut sebagai mass transport atau solute transport. Ada dua proses dasar yang menjadi masalah dalam pengangkutan zat polutan pada aliran air, yaitu *Difusi* dan *Adveksi (Luknanto,1992).*

1. Difusi

Difusi adalah peristiwa dimana terjadi transfer materi melalui materi lain. Transfer materi ini berlangsung karena atom atau partikel selalu bergerak oleh agitasi thermal. Difusi merupakan proses *irreversible* (tidak dapat diubah). Pada fase gas dan cair, peristiwa difusi mudah terjadi, sedangkan pada fase padat difusi juga terjadi walaupun memerlukan waktu yang lebih lama.

Fenomena difusi massa digambarkan dalam gambar berikut :



Gambar 1 . Fenomena Difusi Massa Dengan Urutan Waktu a - d

Pada gambar (1) di atas merupakan proses difusi. Saat baru terjadi pelepasan massa, kerapatan massa masih berkonsentrasi disekitar sumber dan belum menyebar. Hal ini terlihat dari daerah hitam yang terkonsentrasi di sekitar sumber dan terang di titik-titik yang jauh dari sumber (Gambar 1a). Berikutnya, pada gambar 1b, daerah hitam di sekitar sumber mulai membesar, menunjukan massa telah mulai menyebar. Penyebaran massa ini terus terjadi dan semakin tampak jelas pada gambar 1c yaitu dengan membesarnya daerah hitam dan juga memudarnya warna hitam di sekitar sumber. Pada gambar 1d, di sekitar sumber tidak hitam lagi, yang menunjukan penurunan kerapatan massa yang cukup berarti di titik sumber. Penurunan kerapatan massa di sekitar sumber ini semata-mata karena massa telah menyebar dan secara total tidak terjadi pengurangan ataupun penambahan massa *(Cahyono, 2011).*

2. Hukum Fick Mengenai Difusi

Seperti proses fisika lainnya, pengamatan mengantarkan manusia pada suatu deskripsi empiris yang diikuti oleh penjelasan fisika mengenai kesahihannya. Contoh klasik adalah hukum Fourier mengenai aliran panas (1822). Untuk peristiwa difusi, Adolph Fick, seorang fisikawan Jerman, mengambil analogi dengan hukum Fourier di atas, menyatakan bahwa

> *"Pada arah tertentu, massa dari suatu bahan terlarut yang melewati suatu luasan tertentu tiap unit waktu adalah sebanding dengan gradien konsentrasi bahan terlarut pada arah tersebut".*

Untuk proses difusi satu dimensi, hukum Fick dapat dinyatakan dalam persamaan matematika sebagai berikut : *(Luknanto, 1992)*

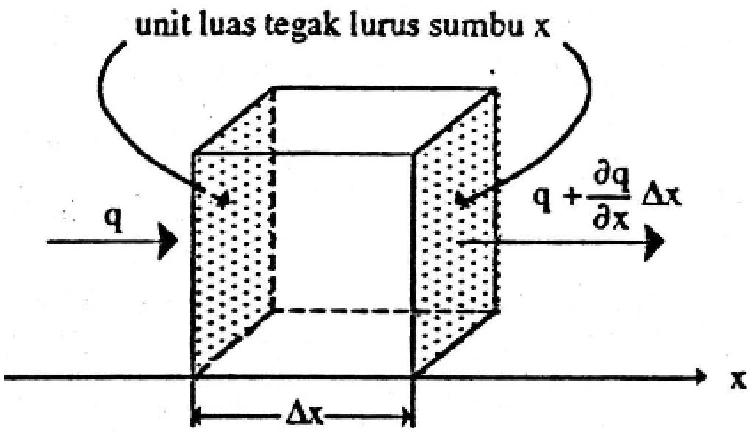
$$q = -D\frac{\partial C}{\partial x} \tag{1}$$

dengan q adalah fluks massa bahan terlarut, C konsentrasi bahan terlarut, D koefisien difusi, tanda negatif menunjukan bahwa bahan terlarut terangkut dari tempat yang berkonsentrasi tinggi ke tempat yang berkonsentrasi rendah. D mempunyai satuan m^2/s dan disebut sebagai koefisien difusi atau difusi molekuler.

Hukum Fick adalah suatu pernyataan yang mengkorelasikan fluks suatu massa dengan gradient konsentrasi. Sekarang akan dijabarkan suatu hukum konservasi massa untuk mendapatkan korelasi/persamaan yang kedua yang berlaku untuk semua jenis proses angkutan. Kombinasi antara hukum Fick dan konservasi massa akan menghasilkan suatu persamaan yang mendiskripsikan proses difusi.

Gambar 2 berikut menggambarkan proses angkutan satu dimensi dimana suatu massa terangkut pada arah x. Pada gambar, terdapat dua bidang sejajar dengan satu unit luasan yang tegak lurus sumbu x dan terpisah dengan jarak Δx. $C(x,t)$ adalah massa per unit volume pada titik x dan waktu t. Jadi di dalam volume control terdapat massa sebesar $C(x,t)\Delta x$, Karena molekul bahan terlarut masuk dan keluar dari volume kontrol tersebut, maka laju perubahan massanya adalah

$$\frac{\partial(C\Delta x)}{\partial t} = \frac{\partial C}{dt}\Delta x \qquad (2)$$



Gambar 2. Volume kontrol dalam angkutan polutan

Laju perubahan ini harus sama dengan perbedaan fluks yang masuk dan keluar volume kontrol. Jika fluks massa melalui unit luasan pada titik x adalah $q(x,t)$, maka fluks massa tiap unit luasan pada titik $x + \Delta x$ adalah

$q(x,t) + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\Delta x$, sehingga perbedaan antara keduanya adalah $\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\Delta x$. Perbedaan ini harus sama dengan laju perubahan massa dalam volume control, sehingga memberikan persamaan kontinuitas massa sebagai berikut : *(Luknanto,1992)*

$$\frac{\partial q}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial C}{\partial t}\Delta x = 0 \qquad (3)$$

Atau

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \qquad (4)$$

Sedangkan untuk proses diffusi molekuler berlaku hukum Fick (Persamaan 1), sehingga jika disubtitusikan ke dalam persamaan (4), maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-D\frac{\partial C}{\partial x}\right) \qquad (5)$$

Persamaan (5) di atas dapat dituliskan dalam

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (6)$$

Jika dikembangkan ke dalam 2-Dimensi, persamaan (6) menjadi

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \qquad (7)$$

Dan untuk yang 3-Dimensi persamaan (7) menjadi

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \qquad (8)$$

D_x , D_y dan D_z masing-masing koefisien difusi dalam arah x, y dan arah z.

3. Difusi Teradveksi

Pada bagian sebelumnya, telah dibahas proses difusi dalam cairan yang diam (tidak bergerak). Sedangkan proses Difusi Teradveksi dalam bagian ini merupakan sebuah proses difusi dengan keadaan cairan mengalir/bergerak dengan kecepatan tertentu *v*. Difusi cairan yang mengalir ini diasumsikan bahwa proses difusi dan adveksi adalah sebuah proses terpisah dan dapat digabungkan. Hal ini berarti proses difusi dalam cairan yang mengalir dianggap sama dengan proses difusi dalam cairan diam.

Total massa bahan terlarut teradveksi yang melalui volume kontrol seperti disajikan dalam gambar 2, dapat dinyatakan dalam persamaan

$$q = vC + \left(-D\frac{\partial C}{\partial x}\right) \qquad (9)$$

Dengan q adalah total fluks massa, v adalah kecepatan aliran, C adalah konsentrasi cairan, D adalah koefisien difusi dan x adalah jarak. Pada ruas kanan persamaan (9) , suku pertama (vC) adalah fluks massa karena teradveksi, sedangkan suku kedua $\left(-D\frac{\partial C}{\partial x}\right)$ adalah merupakan fluks massa karena proses difusi. Persamaan kontinuitas,(pers. 4) menjadi

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (vC)}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (10)$$

Atau

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (11)$$

Persamaan (11) di atas merupakan persamaan *Adveksi-Difusi untuk Transfer Polutan* 1-Dimensi, dan untuk yang 2-Dimensi digambarkan dalam persamaan

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \qquad (12)$$

Sedangkan persamaan *Adveksi-Difusi untuk Transfer Polutan* 3-Dimensi dapat dituliskan dalam persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \qquad (13)$$

v_x , v_y, *dan* v_z masing-masing merupakan kecepatan aliran dalam arah x, y dan z.

C. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu teknik komputasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai tipe persamaan differensial. Penerapan metode beda hingga untuk menyelesaikan aliran fluida merupakan salah satu bentuk pendekatan dari komputasi dinamika fluida. Dalam pendekatan komputasi ini, bentuk turunan persamaan differensial didekati dengan persamaan beda hingga. Nilai variabel aliran diperoleh pada suatu volume yang kecil yang mencakup titik tersebut. Keakuratan dari metode beda hingga dapat diperoleh dengan ukuran grid yang kecil dan perhitungan yang mendalam. Sehingga secara realistik, metode ini lebih efisien dengan menggunakan aplikasi komputer.

1. Deret Taylor

Pada umumnya fungsi-fungsi yang bentuknya kompleks dapat disederhanakan menjadi fungsi hampiran dalam bentuk fungsi polynomial yang lebih sederhana. Fungsi polynomial lebih mudah dipahami kelakuannya. Apabila dilakukan pekerjan hitungan dengan menggunakan fungsi yang sesungguhnya, maka akan didapatkan hasil *solusi eksak*. Jika dilakukan pekerjaan hitungan dengan menggunakan fungsi hampiran, maka akan didapatkan hasil *solusi hampiran (pendekatan).*

Perbedaan antara solusi eksak dan solusi hampiran terletak pada adanya galat dalam solusi hampiran. Galat pada solusi numerik harus dihubungkan dengan seberapa teliti polynomial dalam menghampiri fungsi yang sesungguhnya. Biasanya dalam menghampiri fungsi yang sesungguhnya, digunakan apa yang disebut sebagai *Deret Taylor (Zuhair, 2008).*

Defenisi Deret Taylor

Andaikan suatu fungsi $f(x)$ dan turunannya, yaitu $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x),\ldots,f^{(n)}(x)$ kontinu dalam selang $[a, b]$, dan $x \in [a, b]$, maka untuk nilai x di sekitar x_0 dapat diekspansikan (diperluas) ke dalam deret taylor sebagai, *(Zuhair,2008)*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots$$

$$+ \frac{(x-x_0)^m}{m!}f^m(x_0) \qquad (14)$$

Apabila $\Delta x = x - x_0$ atau $x = \Delta x + x_0$, maka persamaan (14) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x\, f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_0) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots + \frac{\Delta x^m}{m!} f^m(x_0) \quad (15)$$

Persamaan (14) dan (15) di atas merupakan penjumlahan dari suku-suku yang disebut deret.

2. Ekspansi Deret Taylor Untuk Turunan Parsial

Diberikan sebuah fungsi $f(x,t)$ yang analitik, maka $f(x + \Delta x, t)$ dapat diekspansikan dalam sebuah deret Taylor di sekitar x sebagai berikut : *(Ribal, 2008)*

$$f(x + \Delta x, t) = f(x,t) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) + \cdots \quad (16)$$

$$f(x - \Delta x, t) = f(x,t) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) + \cdots \quad (17)$$

Dari persamaan (16) dan (17) di atas dapat diperoleh tiga skema beda hingga yang dapat digunakan untuk mendiskritisasikan persamaan differensial parsial, yaitu *Metode Beda Maju (Forward Difference), Metode Beda Mundur (Backward Difference),* dan *Metode Beda Tengah (Central Difference).*

1. Metode Beda Hingga Untuk Orde Pertama

✓ *Metode Beda Maju*

Untuk memperoleh pendekatan beda maju orde pertama dilakukan dengan mengubah bentuk persamaan (16) menjadi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \cdots \qquad (18)$$

Jika suku-suku yang memuat faktor (Δx) atau yang lebih tinggi dijumlahkan dan dinotasikan dengan $O(\Delta x)$, maka persamaan dari ekspansi deret Taylor di atas dapat diperoleh :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (19)$$

Dimana $O(\Delta x)$ merupakan orde kesalahan pada bentuk suku pertama atau suku terbesar dari sisa deret. Jika indeks *i* digunakan sebagai diskritisasi titik ke arah *x*, dan n untuk t maka persamaan (19) di atas menjadi :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,n} = \frac{f_{i+1}^{n}-f_{i}^{n}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Persamaan (19) di atas merupakan skema pendekatan beda maju orde pertama dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ orde pemotongan (Δx).

✓ *Metode Beda Mundur.*

Selanjutnya dengan cara yang sama, untuk memperoleh pendekatan beda mundur orde pertama dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ dilakukan dengan cara mengubah bentuk persamaan (17) sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x,t)-f(x-\Delta x,t)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^3}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \cdots \qquad (20)$$

Jika suku-suku yang memuat faktor (Δx) atau yang lebih tinggi dijumlahkan dan dinotasikan dengan $O(\Delta x)$, maka persamaan dari ekspansi deret Taylor di atas dapat diperoleh :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x,t) - f(x-\Delta x,t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{21}$$

Dengan $O(\Delta x)$ merupakan orde kesalahan pada bentuk suku pertama atau suku terbesar dari sisa deret. Jika indeks *i* digunakan sebagai diskritisasi titik ke arah x dan n untuk t, maka persamaan (21) di atas menjadi :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,n} = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{22}$$

✓ *Metode Beda Tengah.*

Untuk memperoleh pendekatan beda tengah, dapat digunakan operasi aljabar yang melibatkan persamaan (16) dan persamaan (17). Jika persamaan (16) dikurangkan ke persamaan (17), maka akan diperoleh

$$f(x+\Delta x,t) - f(x-\Delta x,t) = 2\Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \cdots \tag{23}$$

Persamaan (23) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x,t) - f(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} + O(x)^2 \tag{24}$$

Jika indeks *i* digunakan sebagai diskritisasi titik ke arah x, dan n untuk t maka persamaan di atas menjadi :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,n} = \frac{f_{i+1}^{n}-f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} + O(x)^2 \quad (25)$$

2. Metode Beda Hingga Untuk Orde Kedua

Untuk memperoleh metode beda hingga untuk turunan parsial orde kedua, maka digunakan ekspansi deret Taylor dari $f(x+2\Delta x, t)$ di sekitar x sebagai berikut : *(Ribal, 2008)*

$$f(x+2\Delta x, t) =$$

$$f(x,t) + 2\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) + \cdots \quad (26)$$

- ✓ *Metode Beda Maju*

Metode beda maju untuk orde kedua, diperoleh dengan mengurangkan persamaan (26) dengan dua kali persamaan (16) sehingga diperoleh

$$f(x+2\Delta x, t) - 2f(x+\Delta x, t) = -f(x,t) + (\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + (\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots \quad (27)$$

Persamaan (27) di atas dapat diubah menjadi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x,t) - 2f(x+\Delta x,t) + f(x,t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (28)$$

Bagian O(Δx) merupakan orde pemotongan. Jika indeks i digunakan untuk diskritisasi pada arah x, dan n untuk arah t maka diperoleh persamaan beda maju untuk orde kedua, sebagai berikut :

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,n} = \frac{f_{i+2}^{n} - 2f_{i+1}^{n} + f_{i}^{n}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (29)$$

✓ *Metode Beda Mundur*

Pendekatan beda mundur orde kedua diperoleh dengan cara yang sama dengan pendekatan beda maju sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x,t) - 2f(x-\Delta x,t) + f(x-2\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \qquad (30)$$

Atau dalam bentuk indeks i dan n dapat dituliskan

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,n} = \frac{f_i^n - 2f_{i-1}^n + f_{i-2}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \qquad (31)$$

✓ *Metode Beda Tengah*

Berbeda dengan metode beda tengah untuk orde pertama, metode beda hingga untuk orde kedua diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (16) dan (17) sehingga diperoleh persamaan :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x,t) - 2f(x,t) + f(x-\Delta x,t) +}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \qquad (32)$$

Persamaan (32) dapat dituliskan dalam bentuk indeks sebagai berikut

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,n} = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \qquad (33)$$

Persamaan (33) di atas merupakan pendekatan beda pusat untuk turunan parsial orde kedua.

3. **Metode Beda Hingga Dufort Frankel**

Metode Dufort Frankel merupakan salah satu dari beberapa metode yang digunakan untuk mengatasi masalah stabilitas yang ditemukan pada metode beda tengah atau CTCS (Central Time Central Space). Metode ini merupakan satu teknik yang memanfaatkan stabilitas tak bersyarat dari metode intrinsic (mendasar) untuk persamaan diferensial sederhana. Turunan pertama terhadap waktu dan terhadap ruang sama-sama menggunakan pendekatan beda tengah. Tetapi pada turunan kedua terhadap ruang, bagian f_i^n diganti dengan nilai rata-rata f_i^{n+1} dan f_i^{n-1}. *(Supardi, 2008)*

Dari persamaan beda hingga yang diperoleh dari ekspansi deret Taylor sebelumnya, diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} \tag{34}$$

dan

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} \tag{35}$$

Sedangkan seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa orde kedua dari turunan ruang juga diperoleh dengan menggunakan beda tengah tetapi untuk bagian f_i^n diganti dengan nilai rata-rata f_i^{n+1} dengan f_i^{n-1}, yaitu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1}^{n} - 2f_i^n + f_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2} \tag{36}$$

$$f_i^n \approx \frac{f_i^{n+1} + f_i^{n-1}}{2} \tag{37}$$

Jika persamaan (37) disubstitusikan ke dalam persamaan (36), maka akan diperoleh

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1}^{n} - 2\frac{f_i^{n+1} + f_i^{n-1}}{2} + f_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2} \tag{38}$$

Atau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1}^{n} - f_i^{n+1} - f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2} \tag{39}$$

Sama halnya dengan persamaan beda untuk turunan parsial terhadap ruang x, persamaan beda untuk turunan parsial terhadap ruang y, juga diperoleh dengan ekspansi deret Taylor, sehingga diperoleh :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,n} \approx \frac{f_{j+1}^{n} - f_{j-1}^{n}}{2\Delta y} \tag{40}$$

Dan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{j+1}^{n} - f_j^{n+1} - f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n}}{(\Delta y)^2} \tag{41}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (34), (39), (40) dan persamaan (41) ke dalam persamaan Adveksi Difusi (12), maka akan diperoleh persamaan beda hingga sebagai berikut :

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + v_x\left(\frac{C_{i+1,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}\right) + v_y\left(\frac{C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right) = D_x\left(\frac{C_{i+1,j}^{n} - C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1} + C_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2}\right) +$$

$$D_y\left(\frac{C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1} + C_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2}\right) \tag{42}$$

Persamaan (42) di atas dapat dituliskan sebagai

$$\left(1+\frac{2D_x\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{2D_y\Delta t}{\Delta y^2}\right)C_{i,j}^{n+1}=\left(\frac{2D_x\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{v_x\Delta t}{\Delta x}\right)C_{i+1,j}^{n}+\left(\frac{2D_x\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{v_x\Delta t}{\Delta x}\right)C_{i-1,j}^{n}+$$
$$\left(\frac{2D_y\Delta t}{\Delta y^2}-\frac{v_y\Delta t}{\Delta y}\right)C_{i,j+1}^{n}+\left(\frac{2D_y\Delta t}{\Delta y^2}+\frac{v_y\Delta t}{\Delta y}\right)C_{i,j-1}^{n}+\left(1-\frac{2D_x\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{2D_y\Delta t}{\Delta y^2}\right)C_{i,j}^{n-1} \quad (43)$$

Dengan memisalkan

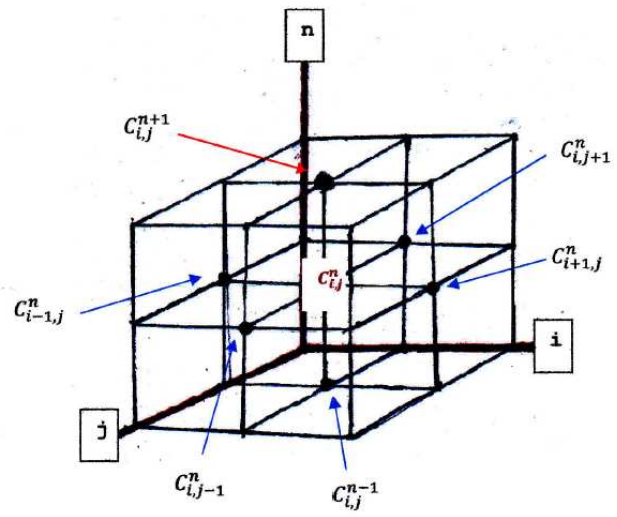
$A_x=\frac{2D_x\Delta t}{\Delta x^2}$, $A_y=\frac{2D_y\Delta t}{\Delta y^2}$, $B_x=\frac{v_x\Delta t}{\Delta x}$ dan $B_y=\frac{v_y\Delta t}{\Delta y}$, maka diperoleh pesamaan sebagai berikut

$$(1+A_x+A_y)C_{i,j}^{n+1}=(A_x-B_x)C_{i+1,j}^{n}+(A_x+B_x)C_{i-1,j}^{n}+(A_y-B_y)C_{i,j+1}^{n}+(A_y+B_y)C_{i,j-1}^{n}+$$
$$(1-A_x-A_y)C_{i,j}^{n-1} \quad (44)$$

Atau

$$C_{i,j}^{n+1}=\frac{(A_x-B_x)}{(1+A_x+A_y)}C_{i+1,j}^{n}+\frac{(A_x+B_x)}{(1+A_x+A_y)}C_{i-1,j}^{n}+\frac{(A_y-B_y)}{(1+A_x+A_y)}C_{i,j+1}^{n}+\frac{(A_y+B_y)}{(1+A_x+A_y)}C_{i,j-1}^{n}+$$
$$\frac{(1-A_x-A_y)}{(1+A_x+A_y)}C_{i,j}^{n-1} \quad (45)$$

Persamaan (45) di atas merupakan persamaan beda hingga *Dufort Frankel* untuk menyelesaian *Persamaan Adveksi-Difusi Transfer Polutan 2-Dimensi.* Jika persamaan tersebut digambarkan dalam diskritisasi, maka diperoleh



Gambar 3. Diskritisasi Persamaan Beda Hingga Dufort Frankel

D. Konsistensi, Stabilitas dan Konvergensi Persamaan Beda Hingga

1. Konsistensi Persamaan Beda Hingga

Pengertian konsistensi menunjukkan bahwa solusi dengan metode beda hingga merupakan pendekatan solusi persamaan differensial parsial (PDP) analitik seperti yang diharapkan, bukan solusi persamaan yang lain. Jika Δx, $\Delta y \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$, maka solusi dengan metode beda hingga sama dengan solusi analitik PDP. Pada umumnya solusi dengan Metode beda hingga akan sesuai dengan solusi PDP, sehingga kriteria konsistensi dengan sendirinya terpenuhi . Suatu persamaan beda dikatakan konsisten dengan persamaan differensial yang didekati, jika selisih antara persamaan beda dengan persamaan diferensial parsialnya menuju nol, ketika gridnya dibuat menuju nol, atau dengan kata lain persamaan beda tersebut dapat diubah menjadi PDP awal ketika panjang gridnya dibuat menuju nol.

2. Kestabilan Persamaan Beda Hingga

Penerapan suatu skema numerik pada suatu persamaan differensial parsial menghasilkan suatu persamaan beda hingga. Solusi numerik dari persamaan beda hingga tersebut belum tentu menghasilkan solusi yang sama dengan solusi eksak dari persamaan differensial parsial tersebut. Suatu persamaan beda hingga dikatakan stabil jika skema tersebut menghasilkan solusi yang terbatas (berhingga) dan jika solusi yang diperoleh dari skema tersebut tidak terbatas, maka dikatakan tidak stabil. *(Urroz, 2004)*

Dalam menganalisis kestabilan suatu persamaan beda, ada beberapa metode yang dapat digunakan. Salah satu metode yang banyak digunakan dalam menganalisis kestabilan persamaan beda hingga diantaranya metode v*on Neumann.* Dalam metode ini, suatu solusi dari persamaan beda hingga diekspansi dengan menggunakan sebuah komponen *Deret Fourier* sebagai

$$C_i^n = \rho^n e^{IP(\Delta x)i} \tag{46}$$

Dengan $I = \sqrt{-1}$, ρ^n merupakan amplitude pada waktu n dan *P* merupakan gelombang pada arah x .

Persamaan (46) di atas disubstitusikan ke dalam persamaan beda yang akan dianalisis kemudian ditentukan kondisi bagi Δx dan Δt agar $|\rho| \leq 1$ yang artinya untuk kondisi tersebut persamaan beda yang dibuat menghasilkan solusi yang berhingga. Kondisi kestabilan dari metode von Neumann dapat dituliskan sebagai berikut :

1. Jika untuk nilai Δx dan Δt tertentu, $|\rho| \leq 1$ maka persamaan beda yang dibuat bersifat stabil bersyarat.
2. Jika $|\rho| \leq 1$ untuk semua nilai Δx dan Δt, maka persamaan beda yang dibuat bersifat stabil tak bersyarat.
3. Jika tidak dapat ditemukan Δx dan Δt sehingga $|\rho| \leq 1$, maka persamaan beda tersebut bersifat tidak stabil.

Komponen *Fourier* di atas (46), digunakan untuk masalah satu dimensi. Sedangkan untuk masalah *Multidimensi,* komponen *Fourier* yang digunakan untuk menganalisis kestabilan persamaan beda adalah

$$C_{i,j}^n = \rho^n e^{IP(\Delta x)i} e^{IQ(\Delta y)j} = \rho^n e^{I(P\Delta xi + Q\Delta yj)} \tag{47}$$

3. Kekonvergenan Persamaan Beda Hingga

Suatu persamaan beda dikatakan konvergen jika solusi persamaan beda semakin mendekati solusi eksak atau analitik dari persamaan differensial parsial yang dihampiri ketika ukuran grid Δ*x,* Δy dan Δ*t* dibuat mendekati nol. Atau dengan kata lain persamaan beda dapat dinyatakan konvergen *(Chern. 2009) :*

Jika $\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0$ *maka* $\varepsilon \to 0$, $\left|T_{i,j}^{n} - T^{*}\right| < \varepsilon$, *dimana* ε *merupakan kesalahan yang diperoleh dari selisih* $T_{i,j}^{n}$ *sebagai solusi numerik dalam bentuk diskrit dengan T* sebagai solusi analitik.*

E. Persoalan Nilai Awal dan Nilai Batas

Untuk memperoleh solusi khusus dari suatu persamaan differensial parsial (PDP), sebuah kondisi tambahan harus manjadi syarat untuk penentuan solusi dari persamaan differensial parsial tersebut. Kondisi tambahan itu dapat diklasifikasikan sebagai kondisi awal dan kondisi batas.*(Erich, 2012)*

Kondisi awal adalah persyaratan bahwa variabel terikat ditentukan pada beberapa keadaan awal, sedangkan kondisi batas merupakan syarat bahwa variabel terikat atau turunannya harus terpenuhi pada batas domain dari persamaan differensial parsialnya. Jenis-jenis kondisi batas dapat dibedakan atas (*Hoffmann,2000)*:

1. *Kondisi batas Dirichlet.* Kondisi batas ini merupakan persoalan syarat batas dimana yang diketahui adalah nilai *C (*konstan) ditetapkan disekeliling batas.

2. *Kondisi batas Neumann.* Kondisi batas ini merupakan persoalan syarat batas dimana yang diketahui adalah nilai $\frac{\partial C}{\partial r}$ disekeliling batasan atau dengan kata lain batas ditetapkan dalam bentuk turunan.
3. *Kondisi batas Robbin* atau campuran merupakan persoalan syarat batas jika C (konstan) ditetapkan pada sebagian batasan sedangkan pada batasan lain ditetapkan dengan nilai $\frac{\partial C}{\partial r}$.