

| | |
|-----------------------------------|----|
| BAB V KESIMPULAN DAN SARAN | 63 |
| A. Kesimpulan | 63 |
| B. Saran | 64 |
| DAFTAR PUSTAKA | 65 |
| LAMPIRAN | 67 |

DAFTAR TABEL

| Nomor | Halaman |
|---|----------------|
| 1. Nilai Parameter dan konstanta model (2.2) | 8 |
| 2. Nilai parameter σ dan ξ model (3.2) | 25 |

DAFTAR GAMBAR

| Nomor | Halaman |
|---|---------|
| 1. Diagram kompartemen model SIR | 7 |
| 2. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,001$) | 16 |
| 3. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,001$) | 16 |
| 4. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,001$) | 17 |
| 5. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1$) | 18 |
| 6. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$) | 18 |
| 7. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,1$) | 19 |
| 8. Populasi individu rentan pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$ | 20 |
| 9. Populasi individu terinfeksi pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$ | 20 |
| 10. Populasi individu sembuh pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$ | 21 |
| 11. Diagram kompartemen model SEIR | 24 |
| 12. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,001$) | 35 |
| 13. Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 0,001$) | 35 |
| 14. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,001$) | 36 |
| 15. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,001$) | 36 |
| 16. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1$) | 37 |

| | |
|---|----|
| 17. Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 0,1$) | 38 |
| 18. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$) | 38 |
| 19. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,1$) | 39 |
| 20. Populasi individu rentan pada Model SEIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$ | 40 |
| 21. Populasi individu laten pada Model SEIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$ | 40 |
| 22. Populasi individu terinfeksi pada Model SEIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$ | 41 |
| 23. Populasi individu sembuh pada Model SEIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$ | 41 |
| 24. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,001, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$) | 57 |
| 25. Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 0,001, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$) | 57 |
| 26. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,001, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$) | 58 |
| 27. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,001, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$) | 58 |
| 28. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$) | 60 |

- | | |
|---|----|
| 29. Populasi individu laten terhadap waktu | 60 |
| $(\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10)$ | |
| 30. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu | 61 |
| $(\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10)$ | |
| 31. Populasi individu sembuh terhadap waktu | 61 |
| $(\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10)$ | |

DAFTAR LAMPIRAN

| Nomor | Halaman |
|---|----------------|
| 1. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 2, 3, dan 4 | 67 |
| 2. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 5, 6, dan 7 | 68 |
| 3. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 8, 9, dan 10 | 69 |
| 4. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 11, 12, 13, dan 14 | 70 |
| 5. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 15, 16, 17, dan 18 | 71 |
| 6. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 19, 20, 21, dan 22 | 72 |
| 7. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 23, 24, 25, dan 26 | 73 |
| 8. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 27, 28, 29, dan 30 | 74 |

DAFTAR ARTI LAMBANG

| Lambang | Arti dan Keterangan |
|-----------|--|
| S | Variabel yang menyatakan jumlah individu rentan |
| E | Variabel yang menyatakan jumlah individu laten |
| I | Variabel yang menyatakan jumlah individu terinfeksi |
| R | Variabel yang menyatakan jumlah individu sembuh |
| \dot{S} | Laju perubahan jumlah individu rentan terhadap waktu t |
| \dot{E} | Laju perubahan jumlah individu laten terhadap waktu t |
| \dot{I} | Laju perubahan jumlah individu terinfeksi terhadap waktu t |
| \dot{R} | Laju perubahan jumlah individu sembuh terhadap waktu t |
| λ | Konstanta rekrutmen (laju kelahiran dan migrasi) |
| μ | Laju kematian alami |
| β | Laju kontak/transmisi penularan penyakit |
| σ | Laju perpindahan individu dari kompartemen E ke I |
| ξ | Laju kematian akibat penyakit pada kompartemen E |
| η | Laju kematian akibat penyakit pada kompartemen I |
| γ | Laju kesembuhan dari penyakit |
| R_0 | Bilangan reproduksi dasar |
| τ | Waktu Tunda |

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Model matematika telah banyak digunakan dalam mempelajari berbagai fenomena yang ada di dunia ini. Salah satu penerapannya dapat dijumpai pada bidang kesehatan yaitu pada pemodelan penyakit. Sekarang ini berbagai macam penyakit baik menular maupun tidak menular telah ditemukan dan memberikan masalah dalam tindak lanjut penanganannya. Peran model matematika bukan dalam kapasitas untuk menyembuhkan penyakit tersebut namun model matematika dapat memberikan informasi penting dalam prediksi dan pengendalian penyakit di masa yang akan datang (Bakare, 2012).

Epidemik merupakan suatu keadaan dimana berjangkitnya suatu penyakit menular dalam populasi pada suatu tempat yang melebihi perkiraan kejadian yang normal dalam periode yang singkat. Bila penyakit tersebut selalu terdapat dalam suatu tempat begitupun dengan faktor penyebabnya maka dikatakan *Endemik*, kemudian bila penyakit tersebut mempunyai ruang lingkup penyebaran yang sangat luas (global) maka disebut *Pandemik*. Model epidemik adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui penyebaran penyakit menular, khususnya

menyangkut terjadi atau tidaknya keadaan epidemik serta pengaruh yang ditimbulkan. Model epidemik SIR yang dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 merupakan langkah awal dalam perkembangan model matematika modern yang berkaitan dengan masalah epidemik. Model ini terdiri atas tiga kompartemen (kelas) yaitu S (*susceptible*) menyatakan banyaknya individu yang rentan penyakit, I (*infected*) menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit dan R (*recovered*) menyatakan banyaknya individu yang sembuh dari penyakit. Pada perkembangannya model ini terus dimodifikasi dengan asumsi yang berbeda-beda agar dapat menjelaskan berbagai fenomena penyakit yang makin kompleks (Hethcote, 2000) dan (Singh dan Aqeel, 2011).

Berbagai macam penyakit seperti campak (*Measles*), *tubercoluses*, *malaria* dan *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) mempunyai periode laten. Li dan Muldowney (1994) mengkonstruksi model epidemik SEIR yang terdiri atas empat kompartemen dengan mempertimbangkan periode laten dari infeksi penyakit. Model ini memodifikasi model SIR dengan menambahkan kompartemen E (*Exposed*) yang menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi namun belum sakit (laten). Selanjutnya Li *et al.* (1999) mengasumsikan bahwa besarnya laju rekrutmen dan kematian alami tidak sama. Pada perkembangan berikutnya Li dan Jin (2004) menambahkan asumsi pada kompartemen E dan I, bahwa kematian individu selain karena sebab alami juga dapat disebabkan oleh infeksi penyakit (fatal).

Untuk membangun model yang lebih realistis yaitu dengan mempertimbangkan waktu tunda (*delays*) pada interaksi yang terjadi antara individu rentan dan terinfeksi, Di Liddo (1985) mengembangkan model delay yang melibatkan vektor sebagai perantara penyebaran infeksi penyakit, sehingga individu rentan dapat terinfeksi oleh individu terinfeksi setelah melalui vektor. Selanjutnya Yan dan Liu (2005) mengembangkan model delay dengan meninjau penyebaran infeksi penyakit yang disebabkan adanya interaksi yang terjadi antara individu rentan dan terinfeksi pada kompartemen E (*Exposed*) dan I (*Infected*).

B. Rumusan Masalah

Model yang akan dikaji berdasarkan model SIR yang telah dimodifikasi dengan tambahan asumsi yang diberikan oleh Li dan Muldowney (1994), Li *et al.* (1999), Li dan Jin (2004) yang selanjutnya menjadi model SEIR dengan empat kompartemen yaitu populasi individu yang rentan (*Susceptible*), laten (*Exposed*), terinfeksi (*Infected*), dan sembuh (*Recovered*). Kemudian dengan asumsi yang diberikan oleh Di Liddo (1985) bahwa penyebaran infeksi penyakit juga dipengaruhi oleh lama vektor menginfeksi individu rentan setelah sebelumnya mendapatkan infeksi dari individu terinfeksi.

Dari model tersebut, selanjutnya dirumuskan permasalahan yang akan dibahas, yaitu

1. Bagaimana mengkonstruksi model epidemik SEIR dengan waktu tunda.
2. Bagaimana menganalisis kestabilan dari titik keseimbangan dan waktu tunda dari model epidemik SEIR.

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui pengaruh waktu tunda pada interaksi individu rentan dan terinfeksi terhadap penyebaran infeksi penyakit.

D. Kegunaan Penelitian

Penelitian ini diharapkan bisa memberikan pemahaman tentang model matematika dalam bidang biologi atau kedokteran dalam prediksi dan penanganan penyebaran infeksi pada berbagai penyakit menular.

BAB II

MODEL EPIDEMIK SIR

A. Pendahuluan

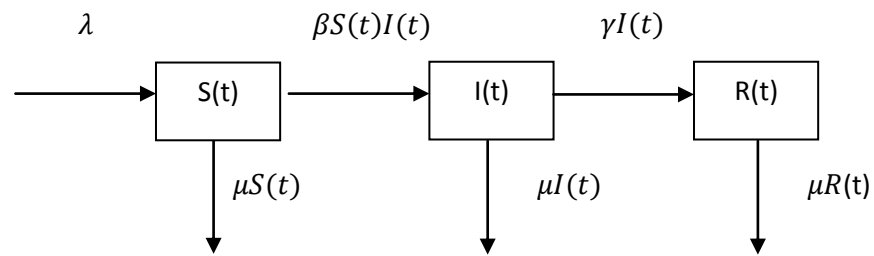
Model dasar yang digunakan untuk mendeskripsikan penyebaran penyakit adalah model epidemik SIR. Model SIR ini dikemukakan oleh Kermack & McKendrick pada tahun 1927 sebagai model dasar dari pemodelan epidemiologi modern. Model ini memiliki tiga kompartemen yang menjelaskan proses penyebaran penyakit pada suatu populasi. Kompartemen tersebut adalah : S (*Susceptible*) yaitu kelompok individu yang sehat dan rentan terinfeksi penyakit, I (*Infected*) yaitu kelompok individu yang terinfeksi penyakit dan R (*Recovered*) yaitu kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit.

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam mengkonstruksi model SIR ialah sebagai berikut :

1. Populasi tidak konstan.
2. Penyakit fatal, artinya bila individu terinfeksi penyakit dapat menyebabkan kematian pada individu tersebut.
3. Individu yang lahir dan melakukan migrasi pada populasi tersebut dikategorikan sebagai individu yang rentan penyakit S (*Susceptible*)

4. Individu yang telah sembuh R (*Recovered*) memiliki kekebalan terhadap penyakit sehingga tidak dapat lagi dikategorikan rentan S (*Susceptible*).
5. Laju kelahiran tidak sama dengan laju kematian alami.

Menurut Hethcote (2000), $S(t)$ menyatakan jumlah individu yang rentan pada waktu t , $I(t)$ menyatakan jumlah individu yang terinfeksi pada waktu t dan $R(t)$ menyatakan jumlah individu yang sembuh pada waktu t . Selanjutnya, λ adalah konstanta rekrutmen dan μ adalah laju kematian alami dari populasi, β adalah laju infeksi atau laju transmisi penularan penyakit ketika terjadi kontak antara individu rentan dan terinfeksi dan γ adalah laju kesembuhan individu yang terinfeksi dan diasumsikan memiliki kekebalan terhadap penyakit. Jumlah individu pada kompartemen S menurun oleh penyebaran penyakit $\beta S(t)I(t)$ dan kematian alami, $\mu S(t)$, lalu meningkat akibat adanya rekrutmen, λ . Jumlah individu pada kompartemen I menurun karena adanya kematian alami, $\mu I(t)$, dan individu yang sembuh, $\gamma I(t)$, lalu meningkat akibat penularan penyakit, $\beta S(t)I(t)$. Jumlah individu pada kompartemen R menurun akibat kematian alami, $\mu R(t)$, dan meningkat karena individu telah sembuh, $\gamma I(t)$. Asumsi-asumsi tersebut dapat digambarkan ke dalam bentuk kompartemen-kompartemen pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Diagram kompartemen model SIR

Dari Gambar 1 tersebut dapat disusun model matematika yang dituliskan sebagai berikut :

$$\dot{S} = \lambda - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \quad (2.1a)$$

$$\dot{I} = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) \quad (2.1b)$$

$$\dot{R} = \gamma I(t) - \mu R(t). \quad (2.1c)$$

Dimana \dot{S} , \dot{I} , dan \dot{R} secara berturut-turut menyatakan laju perubahan jumlah individu rentan, terinfeksi dan sembuh per waktu. Singh dan Aqeel (2011) menambahkan asumsi bahwa penyebab kematian pada individu terinfeksi tidak hanya oleh faktor alami namun juga disebabkan oleh faktor penyakit, η , yang diderita (fatal). Sehingga model (2.1) dimodifikasi menjadi :

$$\dot{S} = \lambda - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \quad (2.2a)$$

$$\dot{I} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma + \eta)I(t) \quad (2.2b)$$

$$\dot{R} = \gamma I(t) - \mu R(t). \quad (2.2c)$$

Tabel 1. Nilai Parameter dan konstanta model (2.2)

| | Paramater dan Konstanta | Nilai |
|-----------|--|---|
| λ | Konstanta rekrutmen (laju kelahiran dan migrasi) | 10(populasi.hari ⁻¹) |
| μ | Laju kematian Alami | 0,2 (hari ⁻¹) |
| β | Laju kontak/transmisi penularan penyakit | 0,001(populasi ⁻¹ .hari ⁻¹) 0,1 (populasi ⁻¹ .hari ⁻¹) |
| γ | Laju kesembuhan dari penyakit | 0,4 (hari ⁻¹) |
| η | Laju kematian akibat infeksi penyakit | 0,2 (hari ⁻¹) |

Sumber : Lenhart dan Workman (2007), Zhou dan Chui (2011)

B. Keadaan Keseimbangan

Pada keadaan seimbang, model yang dinyatakan oleh sistem persamaan (2.2) memenuhi sistem persamaan

$$\lambda - \mu S - \beta SI = 0 \quad (2.3a)$$

$$\beta SI - (\gamma + \mu + \eta)I = 0 \quad (2.3b)$$

$$\gamma I - \mu R = 0 \quad (2.3c)$$

Pada keadaan tidak ada infeksi maka $I = 0$. Substitusi $I_0 = 0$ pada persamaan (2.3a) dan (2.3c) menghasilkan $S_0 = \frac{\lambda}{\mu}$ dan $R_0 = 0$. Dengan demikian diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit,

$$Q_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0 \right).$$

Kemudian saat terjadi infeksi penyakit $I \neq 0$. Persamaan (2.3a) dan (2.3b) dapat dinyatakan sebagai,

$$I = \frac{\lambda - \mu S}{\beta S} \quad (2.4)$$

dan

$$S = \frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta}. \quad (2.5)$$

Substitusi nilai (2.5) ke (2.4) menghasilkan

$$I_1 = \frac{\lambda}{(\gamma + \mu + \eta)} - \frac{\mu}{\beta},$$

selanjutnya, substitusi nilai I_1 ke (2.3c) menghasilkan

$$R_1 = \frac{\gamma \lambda}{\mu(\gamma + \mu + \eta)} - \frac{\gamma}{\beta}.$$

Dengan demikian diperoleh titik keseimbangan endemik,

$$Q_1 = \left(\frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta}, \frac{\lambda}{(\gamma + \mu + \eta)} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\gamma \lambda}{\mu(\gamma + \mu + \eta)} - \frac{\gamma}{\beta} \right).$$

C. Analisis Kestabilan

Analisis Kestabilan titik keseimbangan dilakukan dengan terlebih dahulu melinearisasi model (2.2) di sekitar titik keseimbangan

$Q^* = (s^*, i^*, r^*)$ dan mengabaikan suku-suku nonlinearnya. Misalkan

$$S(t) = s^* + s(t), \quad E(t) = e^* + e(t), \quad I(t) = i^* + i(t), \text{ dan } R(t) = r^* + r(t).$$

Substitusi pada (2.2), maka diperoleh sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \lambda - \beta(s^* + s(t))(i^* + i(t)) - \mu(s^* + s(t)) \\ &= \lambda - \beta s^* i^* - \beta s^* i(t) - \beta s(t) i^* - \beta s(t) i(t) - \mu s^* - \mu s(t) \\ &= -\beta s^* i(t) - \beta s(t) i^* - \mu s(t) \\ &= -s(t)(\mu + \beta i^*) - \beta s^* i(t) \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned}
\dot{i} &= \beta(s^* + s(t))(i^* + i(t)) - (\sigma + \mu + \xi)(i^* + i(t)) \\
&= \beta s^* i^* + \beta s^* i(t) + \beta s(t) i^* + \beta s(t) i(t) - (\sigma + \mu + \xi) i^* - (\sigma + \mu + \xi) i(t) \\
&= \beta s^* i(t) + \beta s(t) i^* - (\sigma + \mu + \xi) i(t)
\end{aligned} \tag{2.6b}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \gamma(i^* + i(t)) - \mu(r^* + r(t)) \\
&= \gamma i^* + \gamma i(t) - \mu r^* - \mu r(t) \\
&= \gamma i(t) - \mu r(t).
\end{aligned} \tag{2.6c}$$

Dalam notasi matriks, sistem persamaan (2.6) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{i} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \\ r(t) \end{pmatrix},$$

dimana

$$A = \begin{pmatrix} -\mu - \beta i^* & -\beta s^* & 0 \\ \beta i^* & \beta s^* - (\gamma + \mu + \eta) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari sistem persamaan (2.6) ditentukan oleh persamaan karakteristik $\det(\rho I - A) = 0$.

1. Analisis kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit

Pada titik keseimbangan bebas penyakit $Q_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0\right)$. Persamaan

karakteristik pada titik keseimbangan ini adalah

$$\begin{vmatrix} \rho + \mu & \frac{\beta \lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \rho - \left(\frac{\lambda \beta}{\mu} - (\gamma + \mu + \eta)\right) & 0 \\ 0 & -\gamma & \rho + \mu \end{vmatrix} = 0,$$

atau

$$(\rho + \mu)(\rho + \mu) \left(\rho - \left(\frac{\lambda\beta}{\mu} - (\gamma + \mu + \eta) \right) \right) = 0. \quad (2.7)$$

Dua faktor pertama dari ruas kiri persamaan (2.7) memberikan nilai eigen $\rho_{1,2} = -\mu < 0$ dan nilai eigen yang lain diperoleh dari persamaan

$$\rho - \left(\frac{\lambda\beta}{\mu} - (\gamma + \mu + \eta) \right) = 0. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) memberikan nilai eigen negatif bila

$$\frac{\lambda\beta}{\mu} < (\gamma + \mu + \eta) \text{ atau } \frac{\lambda\beta}{\mu(\gamma + \mu + \eta)} < 1.$$

Konstanta $R_0 = \frac{\lambda\beta}{\mu(\gamma + \mu + \eta)}$ dikenal sebagai bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) dari model (2.2). Menurut Driessche dan Watmough (2002) *basic reproduction number*, R_0 menyatakan banyaknya rata-rata individu baru yang terinfeksi yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Pada kondisi ini $R_0 < 1$ menyebabkan titik keseimbangan bebas penyakit Q_0 akan stabil asimptotik.

2. Analisis kestabilan titik keseimbangan endemik

Perhatikan bahwa titik keseimbangan endemik Q_1 dapat dinyatakan dalam R_0 , yaitu

$$Q_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\gamma}{\beta} (R_0 - 1) \right).$$

Karena pada titik keseimbangan endemik berlaku $R_0 > 1$ maka semua komponen pada titik ini bernilai positif. Persamaan karakteristik untuk titik keseimbangan ini diberikan oleh persamaan

$$\begin{vmatrix} \rho + \mu + \mu(R_0 - 1) & \frac{\beta\lambda}{\mu R_0} & 0 \\ -\mu(R_0 - 1) & \rho - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta)\right) & 0 \\ 0 & -\gamma & \rho + \mu \end{vmatrix} = 0,$$

atau

$$\begin{aligned} & (\rho + \mu + \mu(R_0 - 1)) \left(\rho - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right) \right) (\rho + \mu) + \\ & (\rho + \mu) (\mu(R_0 - 1)) \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} \right) = 0, \\ & (\rho + \mu) \left((\rho + \mu + \mu(R_0 - 1)) \left(\rho - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right) \right) + \right. \\ & \left. (\mu(R_0 - 1)) \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Faktor pertama dari ruas kiri persamaan (2.9) memberikan nilai eigen $\rho_1 = -\mu < 0$ dan nilai eigen yang lain diperoleh dari persamaan

$$\rho^2 + a_1\rho + a_0, \quad (2.10)$$

dimana

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right) + \mu(R_0 - 1) \text{ dan} \\ a_0 &= \mu(R_0 - 1) \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} \right) - \mu R_0 \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right). \end{aligned}$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, bagian real dari semua nilai eigen persamaan (2.10) bernilai negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$ dan $a_0 > 0$.

Karena $R_0 > 1$ maka

$$a_1 = \mu - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right) + \mu(R_0 - 1)$$

$$= \mu + (\gamma + \mu + \eta) + \mu(R_0 - 1) - \frac{\beta\lambda}{\mu R_0}$$

$$= \mu + \mu(R_0 - 1) > 0,$$

$$a_0 = \mu(R_0 - 1) \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} \right) - \mu R_0 \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right)$$

$$= \mu(R_0 - 1)(\gamma + \mu + \eta) - \mu R_0((\gamma + \mu + \eta) - (\gamma + \mu + \eta))$$

$$= \mu(R_0 - 1)(\gamma + \mu + \eta) > 0.$$

Jadi titik keseimbangan Endemik Q_1 stabil asimtotik jika $R_0 > 1$.

D. Proses Non-Dimensional dari Model SIR

Model SIR yang telah dikonstruksi sebelumnya masih tergantung pada satuan, sehingga belum bisa diterapkan pada berbagai kasus, agar model SIR tersebut dapat diterapkan pada berbagai satuan, maka sistem persamaan (2.2) yang berbentuk persamaan dimensional akan diubah dalam bentuk persamaan non-dimensional. Berikut variabel non-dimensional yang akan disubstitusikan pada sistem persamaan (2.2)

$$S = NS^*, I = NI^*, R = NR^* \text{ dan } t = Tt^*$$

$$\text{dimana } N = S + I + R$$

Dengan demikian diperoleh model SIR berbentuk sistem persamaan non-dimensional sebagai berikut :

$$\frac{N}{T} \frac{dS^*}{dt^*} = \lambda - \mu N S^* - \beta N^2 S^* I^* \quad (2.11a)$$

$$\frac{N}{T} \frac{dI^*}{dt^*} = \beta N^2 S^* I^* - (\mu + \gamma + \eta) N I^* \quad (2.11b)$$

$$\frac{N}{T} \frac{dR^*}{dt^*} = \gamma N I^* - \mu N R^* \quad (2.11c)$$

Tiap ruas sistem (2.11) dikalikan dengan $\frac{T}{N}$ sehingga diperoleh

$$\frac{dS^*}{dt^*} = \frac{\lambda T}{N} - \mu T S^* - \beta T N S^* I^* \quad (2.12a)$$

$$\frac{dI^*}{dt^*} = \beta T N S^* I^* - (\mu + \gamma + \eta) T I^* \quad (2.12b)$$

$$\frac{dR^*}{dt^*} = \gamma T I^* - \mu T R^* \quad (2.12c)$$

Jika $\frac{\lambda T}{N} = \lambda^*$, $\mu T = \mu^*$, $\beta T N = \beta^*$, $(\mu + \gamma + \eta) T = (\mu + \gamma + \eta)^*$, dan $\gamma T = \gamma^*$

maka sistem (2.12) menjadi

$$\frac{dS^*}{dt^*} = \lambda^* - \mu^* S^* - \beta^* S^* I^* \quad (2.13a)$$

$$\frac{dI^*}{dt^*} = \beta^* S^* I^* - (\mu + \gamma + \eta)^* I^* \quad (2.13b)$$

$$\frac{dR^*}{dt^*} = \gamma^* I^* - \mu^* R^* \quad (2.13c)$$

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk model SIR non-dimensional dengan menggunakan $t^* = \frac{t}{7}$ dimana t^* merupakan variabel tak berdimensi yang menyatakan perubahan satuan waktu dari hari menjadi minggu.

E. Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan dengan menggunakan software Matlab dan Maple dengan nilai-nilai parameter yang diberikan pada tabel 1. Nilai dari β dipilih sebesar 0,001 (Lenhart dan Workman, 2007) dan 0,1 (Zhou dan Chui, 2011) . Untuk melihat pengaruh kedua nilai β tersebut, model (2.2) disimulasikan dengan menggunakan syarat awal

$$S(0) = \frac{\lambda}{\mu}, I(0) = 1, R(0) = 0.$$

Hasil simulasi yang menunjukkan populasi individu rentan, terinfeksi dan sembuh terhadap waktu ditunjukkan oleh gambar 2,3, dan 4 untuk $\beta = 0,001$. Untuk nilai β ini diperoleh $R_0 = 0,0625 < 1$ dan nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (2.7) adalah

$$\rho_1 = \rho_2 = -0,2 \text{ dan } \rho_3 = -0,75.$$

Dengan demikian titik keseimbangan bebas penyakit,

$$Q_0 = (50,0,0)$$

stabil asimptotik.

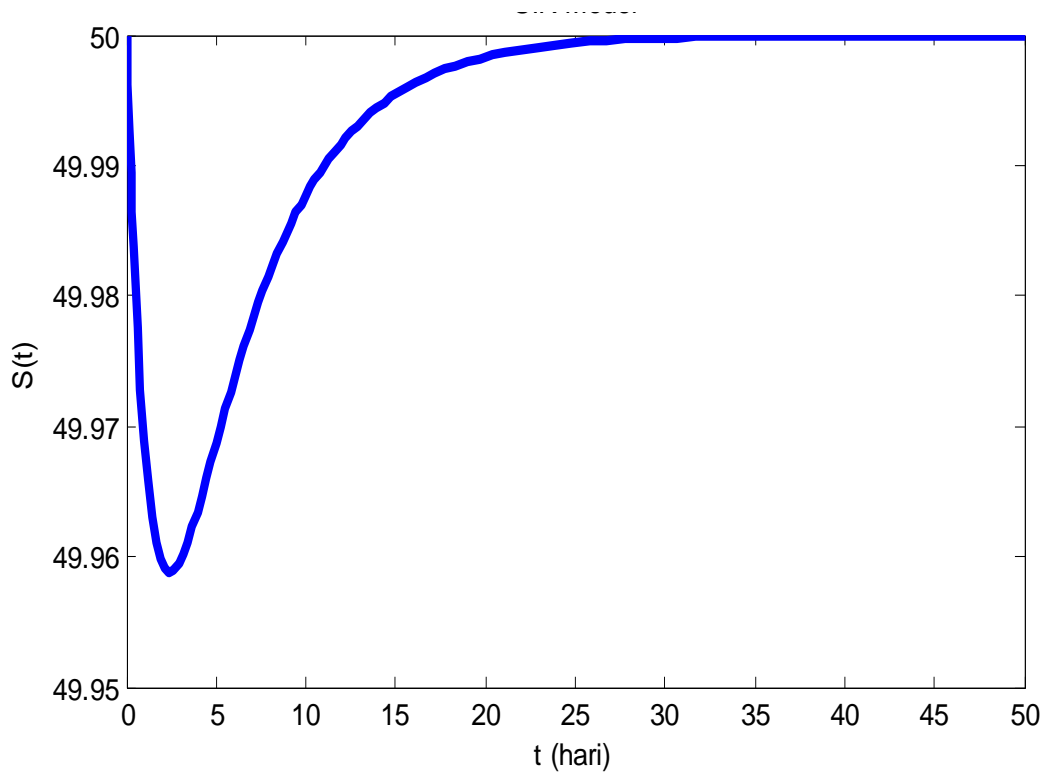
Sedangkan untuk $\beta = 0,1$, diperoleh nilai $R_0 = 6,25 > 1$ dan nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (2.9) adalah

$$\rho_1 = -0,2, \rho_2 = -0,625 + 0,67 I, \text{ dan } \rho_3 = -0,625 - 0,67 I.$$

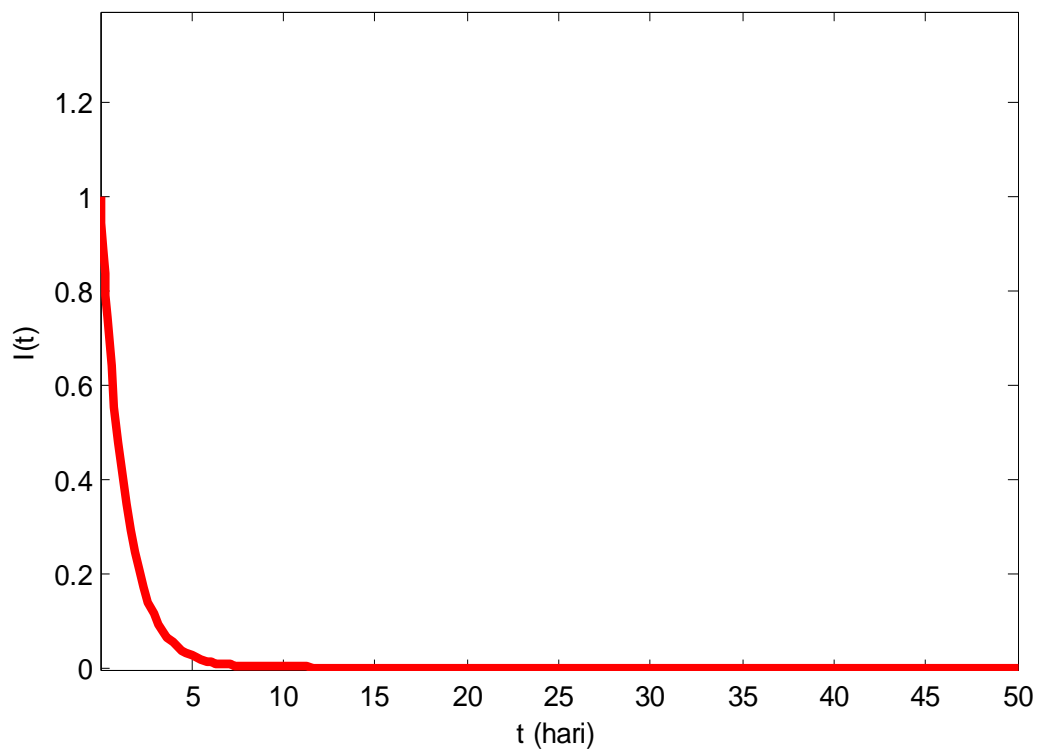
Dengan demikian titik keseimbangan endemik,

$$Q_1 = (8,11,21)$$

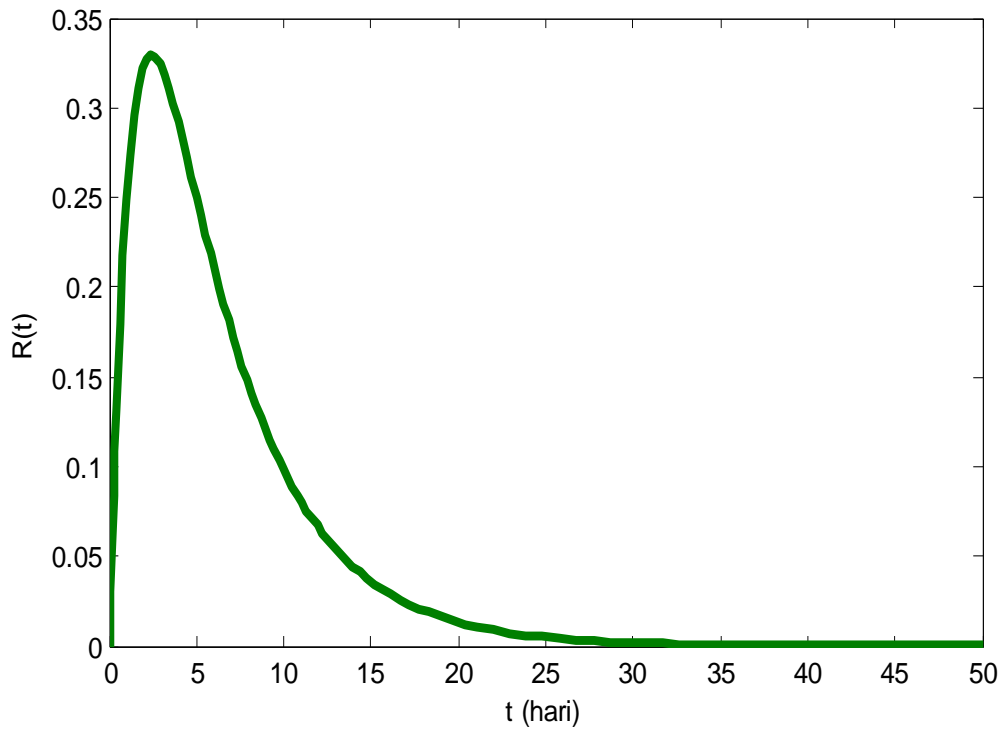
stabil asimptotik. Hasil simulasi untuk nilai $\beta = 0,1$ dapat dilihat pada gambar 5,6, dan 7.



Gambar 2. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,001$)

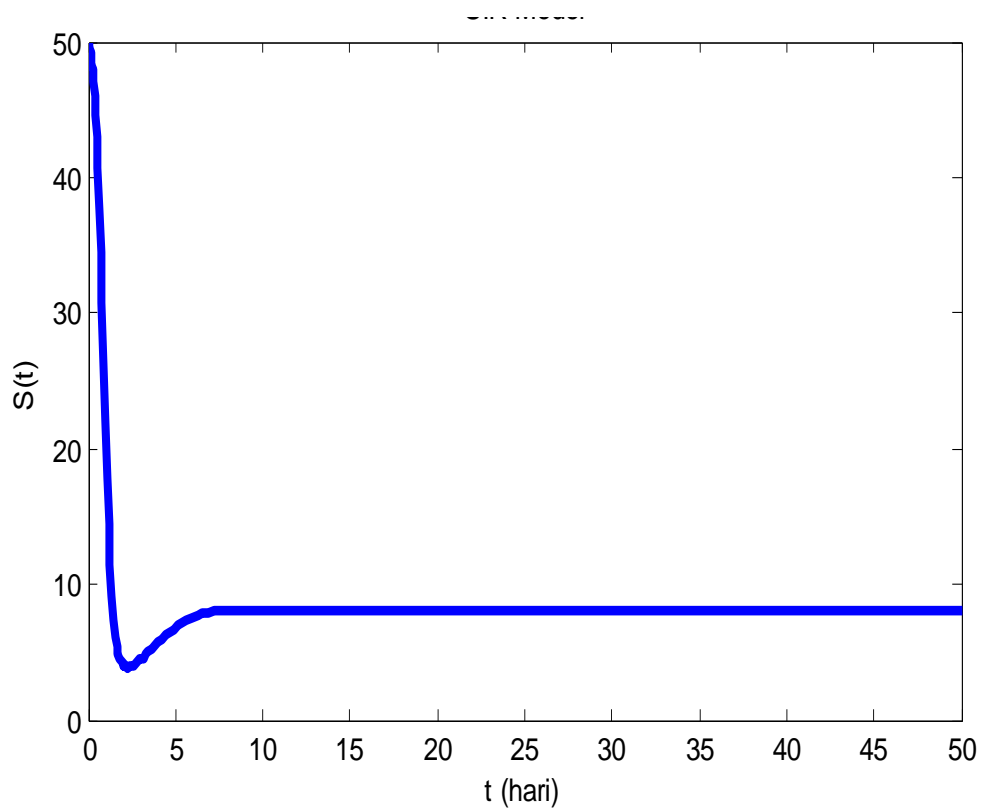


Gambar 3. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,001$)

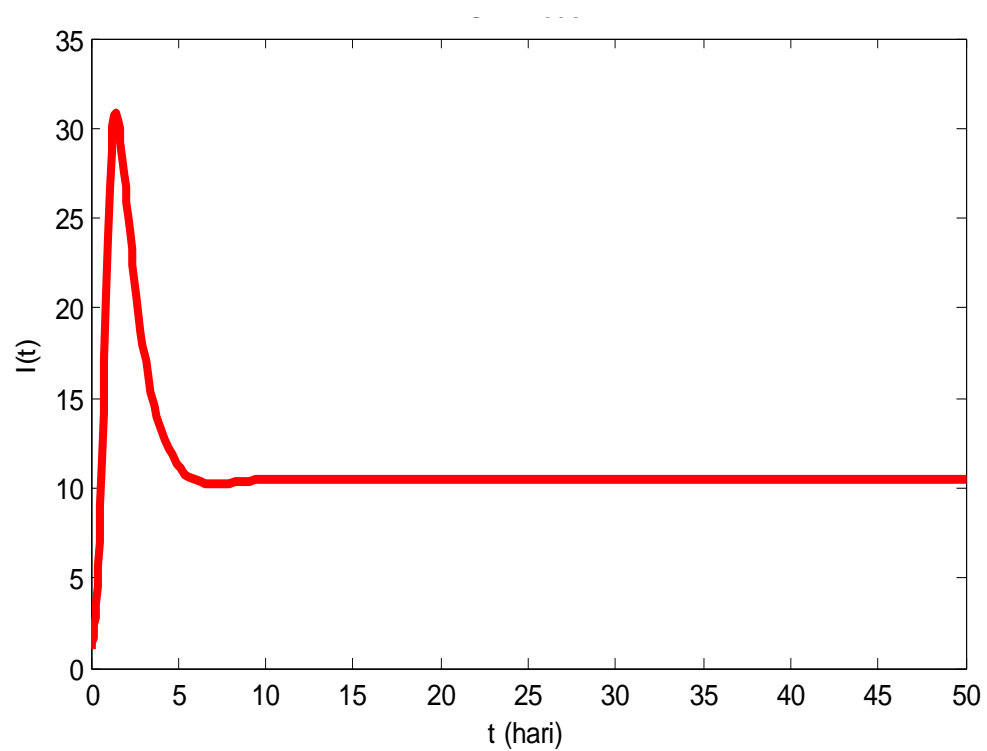


Gambar 4. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,001$)

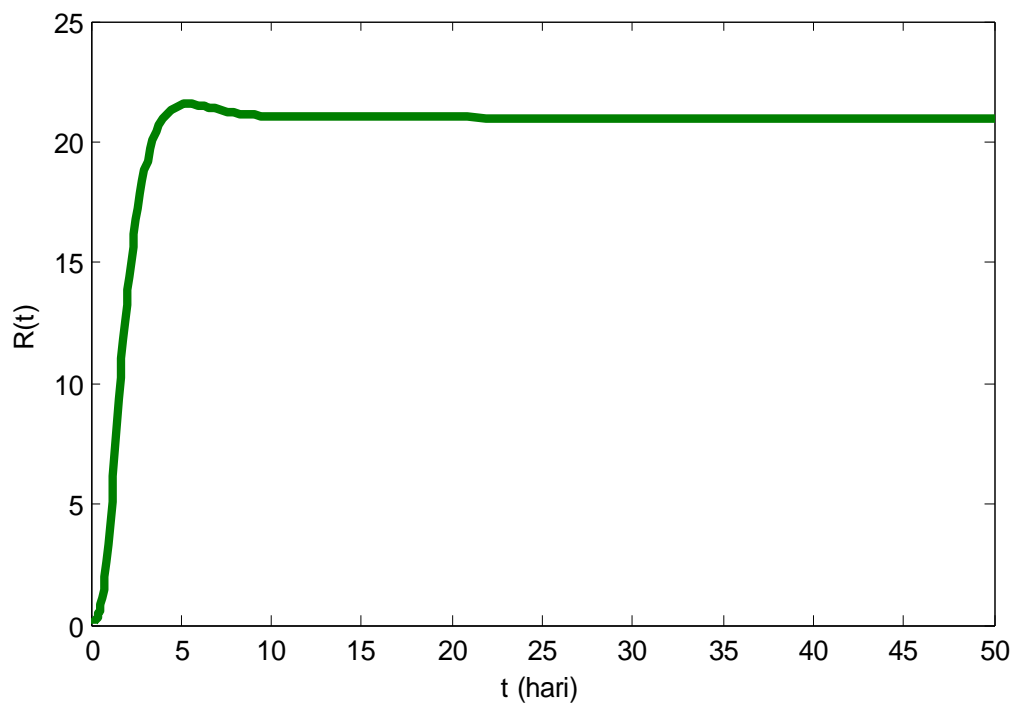
Pada gambar 2,3, dan 4 terlihat bahwa dengan laju kontak yang kecil ($\beta = 0.001$) antara individu terinfeksi dan rentan melalui vektor, jumlah populasi individu rentan, terinfeksi dan sembuh cenderung stabil dan menuju ke titik keseimbangan $Q_0 = (50,0,0)$. Jumlah individu rentan dalam waktu yang panjang akan selalu ada dan jumlah individu yang terinfeksi akan habis dan berbanding lurus dengan individu yang sembuh dari penyakit. Pada kondisi ini $R_0 < 1$, hal tersebut berarti penyakit akan menghilang dalam populasi.



Gambar 5. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1$)

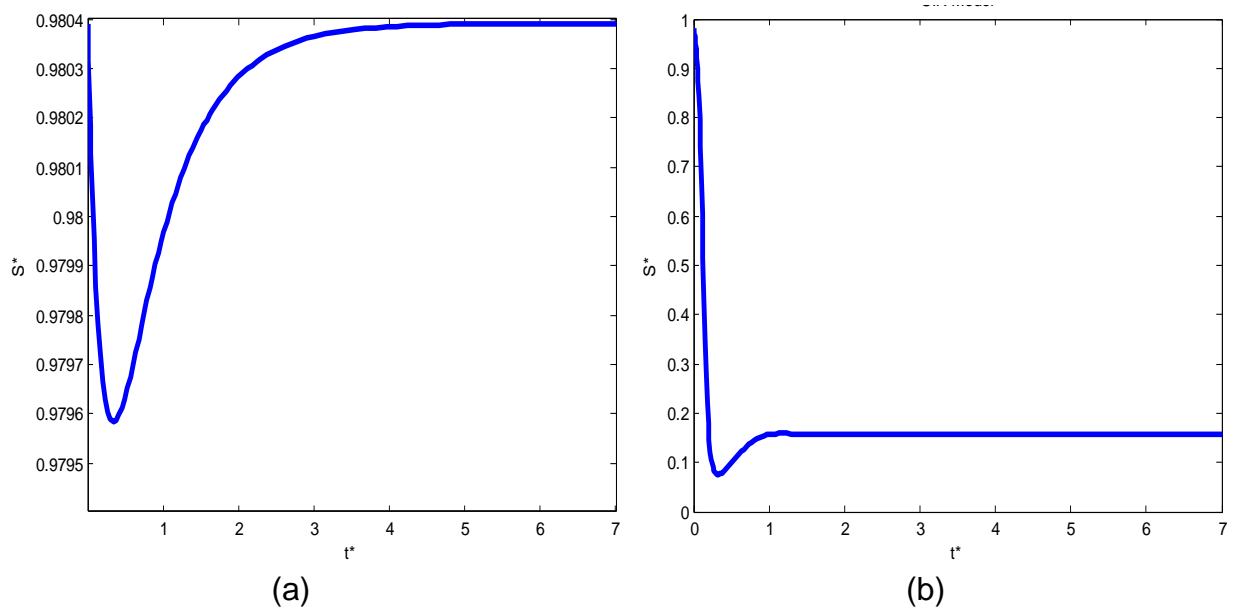


Gambar 6. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$)

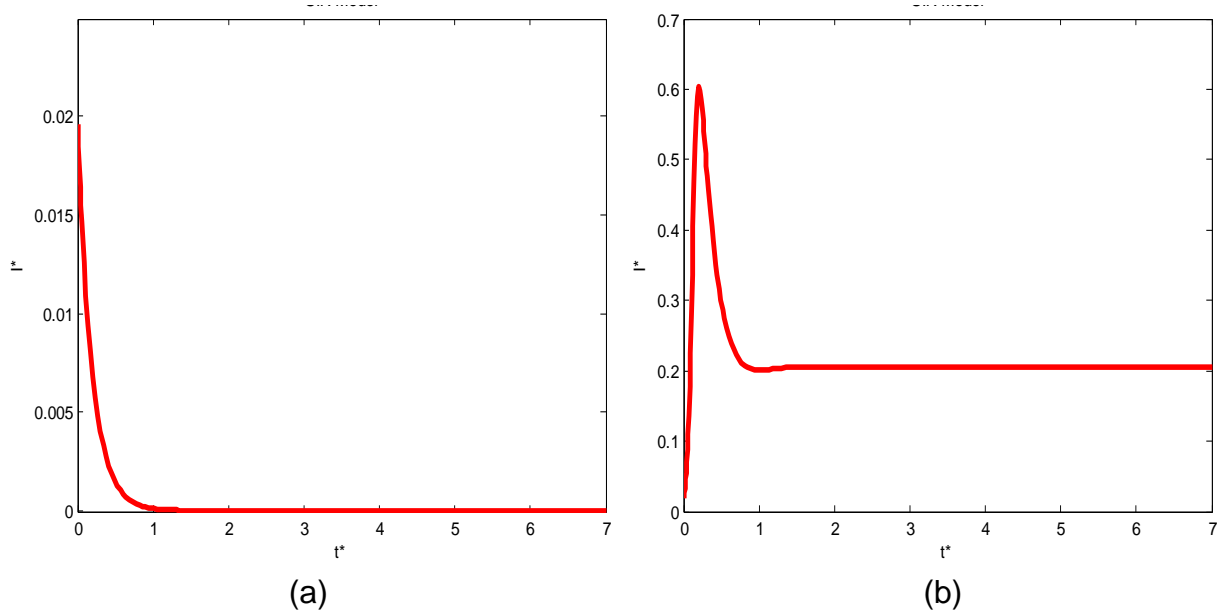


Gambar 7. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$)

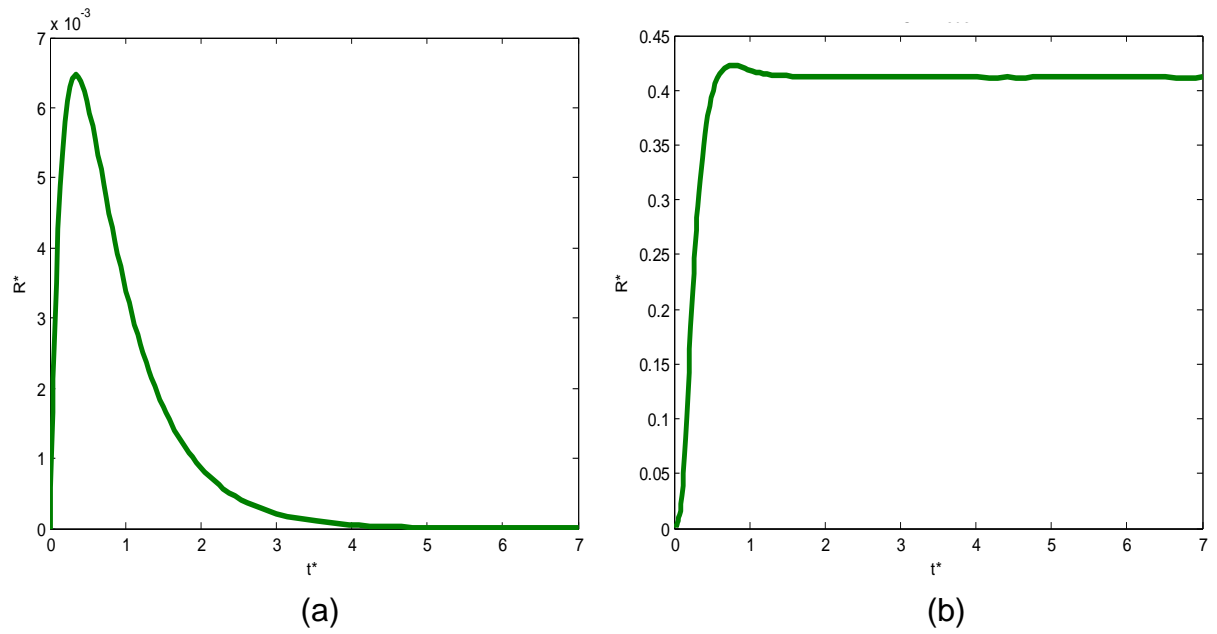
Pada gambar 5,6, dan 7 terlihat bahwa dengan laju kontak yang lebih besar dari sebelumnya ($\beta = 0,1$) antara individu terinfeksi dan rentan melalui vektor, jumlah populasi individu rentan, terinfeksi dan sembuh cenderung stabil dan menuju ke titik keseimbangan $Q_1 = (8,11,21)$. Pada kondisi ini $R_0 > 1$, hal tersebut berarti penyakit akan menyebar dan menjadi wabah dalam populasi.



Gambar 8. Populasi individu rentan pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$



Gambar 9. Populasi individu terinfeksi pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$



Gambar 10. Populasi individu sembuh pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$