SKRIPSI

APLIKASI METODE *BRANCH AND BOUND* DAN *CUTTING PLANE* UNTUK MENGOPTIMALKAN KEUNTUNGAN PRODUKSI KOPI PADA KOPIAPI COFFEE ROASTERS MAKASSAR

Disusun dan diajukan oleh

AYU RAHAYU PUTRI

H11114509

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

APLIKASI METODE *BRANCH AND BOUND* DAN *CUTTING PLANE* UNTUK MENGOPTIMALKAN KEUNTUNGAN PRODUKSI KOPI PADA KOPIAPI COFFEE ROASTERS MAKASSAR

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi MATEMATIKA Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

AYU RAHAYU PUTRI

H11114509

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : AYU RAHAYU PUTRI

NIM : H11114509

Program Studi : MATEMATIKA

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

APLIKASI METODE *BRANCH AND BOUND* DAN *CUTTING PLANE* UNTUK MENGOPTIMALKAN KEUNTUNGAN PRODUKSI KOPI PADA KOPIAPI COFFEE ROASTERS MAKASSAR

Adalah benar hasil karya saya sendiri bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain dan bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini merupakan hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 27 Agustus 2021

Yang Menyatakan

AYU RAHAYU PUTRI

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

APLIKASI METODE *BRANCH AND BOUND* DAN *CUTTING PLANE* UNTUK MENGOPTIMALKAN KEUNTUNGAN PRODUKSI KOPI PADA KOPIAPI COFFEE ROASTERS MAKASSAR

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.	**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
NIP. 19750816 199903 1 001	**NIP. 19680601 199512 2001**

Ketua Program Studi

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

Pada Tanggal: 27 Agustus 2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

APLIKASI METODE *BRANCH AND BOUND* DAN *CUTTING PLANE* UNTUK MENGOPTIMALKAN KEUNTUNGAN PRODUKSI KOPI PADA KOPIAPI COFFEE ROASTERS MAKASSAR

Disusun dan diajukan oleh:

AYU RAHAYU PUTRI
H11114509

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana pada Program Studi MATEMATIKA Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 27 Agustus 2021

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc	**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
NIP. 19750816 199903 1 001	**NIP. 19680601 199512 2001**

Ketua Program Studi

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamin.

Segala puji bagi Allah Azza Wa Jalla Rabb semesta alam yang ditangan-Nya tergenggam nyawa seluruh makhluk semesta alam, yang Maha kekal sebelum sesuatunya ada, dan akan tetap kekal setelah segala sesuatunya tiada. Shalawat serta salam semoga selalu dilimpahkan kepada Nabi Muhammad ﷺ dan kepada para keluarga serta Sahabat beliau. Alhamdulillah Wasyukurillah, berkat pertolongan Allah akhirnya skripsi dengan judul **"APLIKASI METODE *BRANCH AND BOUND* DAN *CUTTING PLANE* UNTUK MENGOPTIMALKAN KEUNTUNGAN PRODUKSI KOPI PADA KOPIAPI COFFEE ROASTERS MAKASSAR"** yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana sains pada Program Studi MATEMATIKA Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan. Penulis berharap skiripsi ini dapat memberikan tambahan pengetahuan baru bagi para pembelajar dalam program studi MATEMATIKA.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada kedua orang tua tercinta dan tersayang: **Ibunda Patmawati dan Ayahanda Abdul Samad** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang mengalir tiada henti dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Ucapan terima kasih juga kepada adik-adik tercinta **Wahyu Saputra, Sazilia Al-Munawar dan Nur Aswar** serta seluruh keluarga besar yang selalu senantiasa memberikan doa dan dukungan bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati penulis meyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada :

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin berserta seluruh jajarannya.

2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika atas segala ilmu, nasehat, fasilitas, saran dan dukungan yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
4. Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.** selaku pembimbing utama dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** Selaku pembimbing pertama sekaligus Penasehat Akademik tahun 2015-2017 untuk segala ilmu, nasehat, dan kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis serta bersedia dengan setulus hati meluangkan waktunya ditengah berbagai kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku penguji atas kesediaannya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku penguji sekaligus Penasehat Akademik Tahun 2018-2021 atas waktu, dukungan serta motivasi yang diberikan kepada penulis dalam membimbing penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Bapak/Ibu **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika. Serta kepada **Pak Nasir, Pak Iswan, dan Kak Ruwaidah** selaku Staf Departemen Matematika yang telah membantu banyak dalam pengurusan akademik selama ini.
8. Terimakasih kepada sahabat **GIRLSQUAD** yaitu **Ida, Amy, Srimul, Agnes, Mira, Utari, Eka, Indah, Dian, Afni, Arni, Dan Ainun** yang telah menemani, selalu meluangkan waktunya, memberikan doa dan dukungan, serta tempat berbagi keluh kesah penulis selama masa perkuliahan sampai saat ini.
9. Teman-teman seperjuangan **Program Studi Matematika 2014** yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.
10. Seluruh Teman-teman **KKN INTERNASIONAL JAPAN Gelombang 99**, khususnya kepada teman kamar: **Fitri, Ade, Anti dan Yuli** yang telah menjadi teman dan keluarga baru. Terimakasih atas waktu singkat dan pengalaman

yang bermakna. Semoga kedepannya silaturahmi yang telah dibangun bersama tetap terjalin dengan baik.

11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas segala bentuk kontribusi, partisipasi, serta motivasi yang diberikan kepada penulis selama ini.

Semoga segala bantuan yang tulus dan ikhlas ditujukan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah-mudahan tulisan ini bermanfaat untuk adik-adik, kakak-kakak, dan semua pihak yang membutuhkan dan terutama untuk penulis sendiri.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Makassar, 27 Agustus 2021

AYU RAHAYU PUTRI

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: AYU RAHAYU PUTRI
NIM	: H11114509
Program Studi	: MATEMATIKA
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas tugas akhir saya yang berjudul:

Aplikasi Metode *Branch and Bound* dan *Cutting Plane* untuk Mengoptimalkan Keuntungan Produksi Kopi pada Kopiapi Coffee Roasters Makassar

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 27 Agustus 2021

Yang menyatakan

AYU RAHAYU PUTRI

ABSTRAK

Setiap perusahaan produksi bertujuan untuk memaksimalkan keuntungan dalam menjalankan perusahaannya. Dalam penelitian ini, salah satu perusahaan yang akan diteliti dalam mengotimalkan keuntungannya adalah kedai Kopiapi Coffee Roasters Makassar. Kedai ini menjual beberapa jenis kopi yang dipaketkan dalam satuan kilogram yang berarti bahwa hasil prosuksinya harus bulat. Untuk menentukan jumlah produksi perusahaan tersebut selama enam bulan, maka data yang diperoleh dari perusahaan dimodelkan ke dalam bentuk masalah program linier bulat. Untuk menyelesaikan masalah tersebut, dua metode akan digunakan yaitu metode *branch and bound* dan *cutting plane*. Berdasarkan metode branch and bound, perusahaan mendapatkan peningkatan keuntungan sekitar Rp. 490.500 atau sebesar 0,35% sedangkan keuntungan yang diperoleh perusahaan dengan metode cutting plane mendapatkan peningkatan keuntungan sekitar Rp. 223.500 atau sebesar 0,13%.

Kata kunci: Metode simpleks, *Branch and Bound*, *Cutting Plane, Software QM*.

ABSTRACT

Each production company aims to maximize their profits in running the company. In this study, one of the companies that will be investigated in optimizing their profits is the Kopiapi Coffee Roasters Makassar shop. This shop sells several types of coffee which are packaged in kilograms, which means that the product must be integer. To determine the amount of production of the company for six months, the data obtained from the company is modeled in the form of a integer linear programming problem. To solve this problem, two methods have been used, namely *branch and bound method* and *cutting plane method*. Based on the branch and bound method, the company gets an increase in profits of about Rp. 490,500 or 0.35% while the profit obtained by the company using the cutting plane method gets an increase in profits of about Rp. 223,500 or 0.13%.

Keywords: Simplex method, *Branch and Bound*, *Cutting Plane*, *Software QM*.

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL i
HALAMAN JUDUL.. i
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN.. ii
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING iii
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI iv
KATA PENGANTAR v
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS viii
ABSTRAK ix
ABSTRACT x
DAFTAR ISI xi
DAFTAR GAMBAR xiii
DAFTAR TABEL xiv
BAB I PENDAHULUAN 1
I.1 Latar Belakang 1
I.2 Rumusan Masalah 3
I.3 Batasan Masalah... 3
I.4 Tujuan Penelitian.. 3
I.5 Manfaat Penelitian.. 3
I.6 Sistematika Penulisan... 4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA..5
II.1 Program Linear... 5
II.1.1 Prinsip-Prinsip Program Linear 6
II.1.2 Model Program Linear 7
II.1.3 Asumsi Program Linear 9
II.1.4 Metode Simpleks... 10
II.1.5 Metode Dual Simpleks.. 15
II.2 Integer *Linear Programming* (Program Linear Bilangan Bulat)............ 15
II.3 Metode Branch and Bound.. 17
II.3.1 Syarat pencabangan (fathoming) berhenti 19
II.3.2 Contoh penerapan metode *Branch and Bound*............................... 20
II.4 Metode Cutting Plane.. 25
II.4.1 Langkah-langkah metode *cutting plane* 25

II.4.2 Contoh penerapan metode *Cutting Plane* 27
II.5 Software QM 30
BAB III METODOLOGI PENELITIAN 32
III.1 Lokasi Penelitian.. 32
III.2 Jenis dan Sumber Data.. 32
III.3 Perumusan Model 32
III.4 Analisis Data... 33
III.5 Alur Kerja Penelitian 33
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 35
IV.1 Model Program Linear.. 35
IV.2 Penyelesaian dengan Metode Simpleks.. 37
IV.3 Penyelesaian dengan Metode *Branch and Bound*.............................. 40
IV.4 Penyelesaian dengan Metode *Cutting Plane* 56
IV.5 Perbandingan Keuntungan.. 58
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN...60
V.1 Kesimpulan.. 60
V.2 Saran... 61
DAFTAR PUSTAKA 62
LAMPIRAN..64

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Pencabangan hasil metode Branch and Bound 23
Gambar 2. 2 Flowchart dari Metode *Branch and Bound* 24
Gambar 2. 3 Flowchart dari Metode *Cutting Plane* 30
Gambar 3. 1 Alur kerja penelitian..34
Gambar 4. 1 Diagram Penyelesaian dengan Metode *Branch and Bound* 55

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Simpleks dalam Bentuk Simbol 13
Tabel 2. 2 Optimum Masalah Program Linear 26
Tabel 2. 3 Setelah Penambahan Potongan Gomory 27
Tabel 4. 1 Data persediaan bahan baku September 2020 – Februari 2021 (kg) 35
Tabel 4. 2 Data produksi Roasted Beans September 2020 – Februari 2021 (kg) 35
Tabel 4. 3 Data bahan baku dan persediaan bahan baku (kg) 36
Tabel 4. 4 Data biaya produksi, harga jual, dan keuntungan (kg) 36
Tabel 4. 5 Iterasi 1 metode simpleks dengan software QM 37
Tabel 4. 6 Iterasi 2 metode simpleks dengan software QM 38
Tabel 4. 7 Iterasi 3 metode simpleks dengan software QM 38
Tabel 4. 8 Iterasi 4 metode simpleks dengan software QM 38
Tabel 4. 9 Iterasi 5 metode simpleks dengan software QM 39
Tabel 4. 10 Iterasi 6 metode simpleks dengan software QM 39
Tabel 4. 11 Solusi dari hasil dengan software QM 39
Tabel 4. 12 Hasil Akhir Metode Branch and Bound 54
Tabel 4. 13 Optimal Metode Simpleks 56
Tabel 4. 14 Setelah Penambahan Gomory 1 57
Tabel 4. 15 Penyelesaian Dual Simpleks Gomory 1 57
Tabel 4. 16 Optimal Cutting Plane 58
Tabel 4. 17 Perbandingan Keuntungan 59

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Program linear (*Linear Programming*) merupakan salah satu teknik riset operasi yang digunakan dalam aplikasi matematika. Program linear merupakan metode matematika dalam mengalokasikan sumber daya yang langka untuk mencapai tujuan. Program Linear (*Linear Programming*) merupakan sebuah teknik matematika yang didesain untuk membantu para manajer operasi dalam merencanakan dan membuat keputusan yang diperlukan untuk mengalokasikan sumber daya. Program Linear menyatakan penggunaan teknik matematika tertentu untuk mendapatkan kemungkinan terbaik atas persoalan yang melibatkan sumber serba terbatas (Mulyono, 2017).

Suatu perusahaan adalah organisasi yang mengombinasikan sumber daya (faktor produksi) dengan tujuan menghasilkan barang dan jasa untuk dijual. Tujuan utama atau sasaran utama suatu perusahaan adalah untuk memaksimalkan pendapatan atau nilai keuntungan dari suatu perusahaan. Perusahaan ada karena mereka berguna dalam proses produksi dan distribusi barang dan jasa (Tasman, 2013).

Setiap perusahaan akan berusaha mencapai keadaan optimal dengan memaksimalkan keuntungan (maksimalisasi) atau dengan meminimalkan (minimalisasi) biaya yang dikeluarkan. Maksimalisasi adalah optimasi untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal. Sedangkan minimalisasi adalah optimasi untuk mengeluarkan biaya yang paling optimal. Optimasi adalah pengambilan keputusan terbaik dengan cara memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan dengan beberapa kendala, sehingga mendapatkan keuntungan yang maksimal atau biaya yang minimal (Mulyono, 2017).

Menerjemahkan terlebih dahulu tentang kendala yang ada didalam masalah program linear kebentuk perumusan matematika merupakan cara memecahkan masalah pada program linear. Proses tersebut merupakan model matematika. Rumusan matematika yang diterjemahkan kedalam suatu masalah program linear dalam bahasa matematika yang didapat dari hasil penafsiran seseorang merupakan definisi model matematika. Model matematika dikatakan efektif bila dalam model-model tersebut berisi komponen-komponen yang dibutuhkan saja. Beberapa hal penting pada pemecahan masalah matematika adalah kemampuan pemahaman konsep matematis (Haming, 2017).

Untuk menyelesaikan persamaan linear, akan ada dua solusi yang dapat ditemukan yaitu solusi bilangan bulat dan solusi bilangan tidak bulat. Namun dalam memproduksi suatu produk, nilai yang akan dihasilkan adalah nilai bilangan bulat. Karena tidak mungkin suatu perusahaan atau pabrik memproduksi suatu produk dalam satuan desimal seperti 1,5 bungkus produk sehingga diperlukan suatu penyelesaian untuk menjadikan solusi bilangan bulat. Cara yang cukup efisien untuk memecahkan masalah program bilangan bulat adalah dengan mengaplikasikan metode *Branch and Bound* dan metode *Cutting Plane* (Haming, 2017).

Metode *branch and bound* membatasi penyelesaian optimum yang akan menghasilkan bilangan pecahan dengan cara membuat cabang atas dan bawah bagi masing-masing solusi yang bernilai pecahan agar bernilai bulat sehingga setiap pembatasan akan menghasilkan cabang baru sedangkan Metode *cutting plane,* menggunakan penambahan batasan baru yang disebut *gomory* dalam menyelesaikan persamaan linear yang memiliki solusi tidak bulat atau pecahan agar bernilai bulat. *Integer Linear Programming* adalah model program linear yang digunakan khusus untuk menyelaraskan masalah dimana nilai vaiabel-variabel keputusan dalam memecahkan optimasi mestilah berupa bilangan bulat (integer). Syarat bahwa nilai variabel keputusan perlu bilangan bulat melihat jumlahnya yang tidak mungkin berupa pecahan seperti rumah, pabrik, tugas, kopi kemasan dan lain-lain.

Kopiapi Coffee Roasters Makassar adalah sebuah pelaku bisnis yang memproduksi berbagai jenis kopi seperti kopi additional, dua sejoli, kopsus blend, dan stonghold yang dijual ke konsumen dalam kemasan 1 kg/bungkus, maka menarik bagi peneliti mengkaji mengenai optimasi keuntungan produksi pada Kopiapi Coffee Roasters Makassar.

Berdasarkan uraian diatas, maka judul penelitian ini adalah **“Aplikasi Metode *Branch and Bound* dan *Cutting Plane* untuk Mengoptimalkan Keuntungan Produksi Kopi pada Kopiapi Coffee Roasters Makassar”.**

I.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, permasalahan yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penerapan metode *Branch and Bound* dan metode *Cutting Plane* dalam mengoptimalkan keuntungan produksi kopi pada Kopiapi Coffee Roasters Makassar?
2. Bagaimana perbandingan keuntungan yang diperoleh pada Kopiapi Coffee Roasters Makassar dan keuntungan yang diperoleh dengan menggunakan metode *Branch and Bound* dan metode *Cutting Plane*?

I.3 Batasan Masalah

Dalam menentukan keuntungan dari produksi Kopiapi Coffee Roasters Makassar dengan menggunakan kedua metode yang telah ditetapkan, maka data yang digunakan semuanya bersumber dari perusahaan tersebut. Data yang digunakan mulai dari September 2020 – Februari 2021 yang bersumber dari Kopiapi Coffee Roasters Makassar.

I.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menerapkan metode *Branch and Bound* dan metode *Cutting Plane* dalam menentukan keuntungan maksimal produksi kopi pada Kopiapi Coffee Roasters Makassar.
2. Untuk membandingkan keuntungan yang diperoleh Kopiapi Coffee Roasters Makassar dengan keuntungan yang diperoleh menggunakan metode *Branch and Bound* dan metode *Cutting Plane*.

I.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Penulis:

a. Dapat mengaplikasikan teori yang telah didapat dalam perkuliahan dengan permasalahan nyata yang terjadi pada dunia industri.
b. Memberikan gambaran mengenai *Branch and Bound* dan *Cutting Plane* dalam menyelesaikan masalahProgram Linear.

2. Bagi Kopiapi Coffee Roasters Makassar:
   a. Mengefektifkan sumber daya yang ada dengan menerapkan *Branch and Bound* dan *Cutting Plane.*
   b. Dapat Memberikan keuntungan yang maksimal.
3. Bagi Pembaca
   a. Menambah pemahaman tentang penerapan metode *Branch and Bound* dan *Cutting Plane* dalam mengoptimalkan keuntungan produksi kopi pada Kopiapi Coffee Roasters Makassar.
   b. Bahan referensi dalam kajian optimasi biaya produksi.

I.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini disusun sebagai berikut:

1. Bab I Pendahuluan yang memuat Latar Belakang, Rumusan Masalah, Batasan Masalah, Tujuan Penelitian, Manfaat Penelitian, dan Sistematika Penulisan.
2. Bab II Tinjauan Pustaka, yang membahas Program Linear, Metode Simpleks, Metode Dual Simpleks, *Integer Linear Programming*, Metode *Branch and Bound,* Metode *Cutting Plane,* dan *Software QM.*
3. Bab III Metodologi Penelitian, yang memuat Lokasi Penelitian, Jenis dan Sumber Data, Perumusan Model, Analisis Data, dan Alur Kerja Penelitian.
4. Bab IV Hasil dan Pembahasan, yang membahas mengenai hasil penelitian yang telah dilakukan.
5. Bab V Penutup, yang berisi tentang Kesimpulan dan Saran.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Program Linear

Pemrograman linear merupakan suatu metode untuk membuat keputusan di antara berbagai alternatif kegiatan pada waktu kegiatan-kegiatan tersebut dibatasi oleh kegiatan tertentu. Keputusan yang akan diambil dinyatakan sebagai fungsi tujuan (*objective function*), sedangkan kendala-kendala yang dihadapi dalam membuat keputusan tersebut dinyatakan dalam bentuk fungsi kendala (*constraints*). Adapun tujuan mempelajari pemrograman linear yaitu mampu dalam membuat model matematika dan menguasai analisisnya, memiliki wawasan dalam analisis untuk menentukan fungsi tujuan maksimal dan minimal dengan kendala yang ada, dan mampu menganalisis yang fungsi tujuannya maksimal atau minimal apabila terjadi perubahan pada fungsi tujuan dan kendala dilakukan secara manual serta dengan program Lindo (Rangkuti, 2013).

Sesuai dengan model pemrograman linear, maka fungsi tujuan berupa fungsi linear dan fungsi kendala berupa sekumpulan ketidaksamaan yang linear. Dalam kasus sederhana yang hanya mempunyai dua variabel keputusan, maka fungsi tujuan dan batasan-batasan dari fungsi kendala dapat digambarkan dalam grafik dua dimensi yang berupa garis lurus. Tujuan penyelesaian masalah dengan pemrograman linear berkaitan dengan masalah optimalisasi, yaitu tujuan maksimal atau minimal sesuatu dimana tingkat pencapaian tujuan ini dibatasi oleh kendala yang mencerminkan keterbatasan dari kapasitas waktu, produk, kemampuan yang dimiliki. Nilai-nilai variabel keputusan ini disebut sebagai solusi yang layak. Solusi layak dapat memberikan nilai fungsi tujuan paling besar (untuk kasus maksimal) atau yang paling kecil (untuk kasus minimal) disebut solusi optimal (Rangkuti, 2013).

Beberapa penyelesaian optimal dalam program linear dapat ditemukan pada titik ekstrim dalam daerah layak. Titik ekstrim adalah titik potong dari minimal dua garis kendala, sedangkan daerah layak adalah daerah pada grafik yang memuat titik-titik dan memenuhi semua kendala permasalahan (kumpulan dari semua penyelesaian layak). Penyelesaian layak adalah suatu solusi untuk semua kendala dipenuhi, sehingga titik ekstrim akan menunjukkan titik-titik yang dapat menghasilkan nilai fungsi tujuan yang paling besar (untuk kasus maksimal), seperti menghitung laba atau pendapatan dan nilai fungsi yang paling kecil (pada kasus minimal) seperti menghitung biaya *(cost)* atau waktu *(time)* (Rangkuti, 2013).

Pokok pikiran yang paling utama dalam menggunakan program linear adalah merumuskan masalah dengan jelas menggunakan sejumlah informasi yang tersedia. Kemudian menerjemahkan masalah tersebut ke dalam model matematik yang cara pemecahan masalahnya lebih mudah dan terstruktur agar didapatkan solusinya (Pasaribu, 2018).

II.1.1 Prinsip-Prinsip Program Linear

Tidak semua masalah optimasi dapat diselesaikan dengan metode program Linear. Beberapa prinsip mendasari penggunaan metode Program Linear. Prinsip-prinsip utama dalam Program Linear adalah (Sunyoto, 2014):

a. Adanya sasaran. Sasaran dalam model matematika masalah program linear berupa fungsi tujuan (fungsi objektif). Fungsi ini akan dicari nilai optimalnya (**maksimum atau minimum**).
b. Ada tindakan alternatif, artinya nilai suatu fungsi tujuan dapat diperoleh dengan berbagai cara dan diantaranya alternatif itu memberikan nilai optimal.
c. Adanya keterbatasan sumber daya. Sumber daya atau input dapat berupa waktu, tenaga, biaya, bahan, dan sebagainya. Pembatasan sumber daya disebut *constraint.*
d. Masalah harus dapat dituangkan dalam bahasa matematika yang disebut model matematika. Model matematika dalam Program Linear memuat fungsi tujuan dan kendala. Fungsi tujuan harus berupa fungsi linear dan kendala berupa pertidaksamaan atau persamaan linear.
e. Antara variabel yang membentuk fungsi tujuan dan kendala ada keterkaitannya, artinya perubahan pada suatu peubah akan mempengaruhi nilai peubah lainnya.

Beberapa istilah berikut banyak digunakan dalam Program Linear meliputi (Sunyoto, 2014):

a. **Variabel keputusan** (*decision variable*) adalah kumpulan variabel yang akan dicari untuk ditentukan nilainya. Variabel keputusan biasanya diberi simbol $u,v,w,x,y,\ldots$dan jika cukup banyak menggunakan $x_1,x_2,x_3,\ldots y_1,y_2,y_3$...dan sebagainya.
b. **Nilai ruas kanan** (*right hand side value*) adalah nilai-nilai yang biasanya menunjukkan jumlah (kuantitas, kapasitas) ketersediaan sumber daya untuk dimanfaatkan sepenuhnya. Simbol yang digunakan biasanya b_i (i menunjukkan banyaknya kendala).
c. **Variabel tambahan** (*slack variable* atau *surplus variable*) adalah variabel yang menyatakan penyimpangan positif atau negatif dari nilai ruas kanan. Variabel tambahan dalam program linear sering diberi simbol $S_1,S_2,S_3,\ldots$
d. **Koefisien Tekhnis** yang biasanya diberi simbol a_{ij}, menyatakan setiap unit penggunaan b_i dari setiap variabel x_j.
e. **Z** adalah nilai fungsi tujuan yang belum diketahui dan yang akan dicari nilai optimumnya (dibuat sebesar mungkin untuk masalah maksimum dan dibuat sekecil mungkin untuk masalah minimum). Fungsi tujuan merupakan pernyataan matematika yang menyatakan hubungan Z dengan jumlah perkalian semua koefisien fungsi tujuan.
f. **Koefisien fungsi tujuan** (koefisien kontribusi) adalah nilai yang menyatakan kontribusi per-unit kepada Z untuk setiap x_j simbolnya c_j.

II.1.2 Model Program Linear

Formulasi model matematika *Linear programming* dirumuskan dengan fungsi yang telah ditetapkan, yaitu menggunakan fungsi tujuan dan fungsi kendala. Linear Programming dapat dirumuskan sebagai berikut:

Maksimumkan

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_jx_j$$

Dengan kendala:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1j}x_j \ (\geq atau \ \leq) b_1$$

$$.$$

$$.$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{1j}x_j \ (\geq atau \ \leq) b_j$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j \geq 0$$

Secara lengkap masalah program linear di atas dapat ditulis sebagai berikut:

Maksimumkan fungsi tujuan,

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ \dots + c_nx_n$$

Dengan kendala:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \dots + a_{1n}x_n \ \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \dots + a_{2n}x_n \ \leq b_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ \dots + a_{mn}x_n \ \leq b_m$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

Keterangan:

Z: fungsi tujuan yang merupakan nilai optimal (memaksimalkan atau meminimalkan)

x_j: tingkat kegiatan ke- *j*

c_j: kenaikan nilai Z terjadi apabila ada pertambahan tingkat kegiatan dengan satu satuan unit atau sumbangan setiap satuan keluaran kegiatan Z terhadap*j*

a_{ij}: banyaknya sumber *i* yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit keluaran kegiatan *j*

b_j: kapasitas sumber i yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan

n: macam kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia

m: macam batasan sumber atau fasilitas yang tersedia

II.1.3 Asumsi Program Linear

Metode analisis program linear memakai beberapa asumsi yang diberikan sebagai berikut (Haming, 2017):

a. Kelinearan *(Linearity)*

   Linearitas ini mempunyai implikasi bahwa terdapat hubungan garis lurus atau proporsional di antara variabel yang relevan. Berdasarkan asumsi kelinearan ini maka dalam program linear didefinisikan sifat hubungan berikut:

   1) Kombinasi masukan untuk berbagai skala produksi adalah tetap atau tidak berubah (konstan).
   2) Antara masukan dan keluaran pada berbagai skala produksi, terdapat hubungan yang bersifat tetap (konstan). Sehubungan dengan anggapan tersebut, maka dalam program linear segala sesuatu diikat oleh relasi atau hubungan perubahan yang bersifat garis lurus (linear) atau perubahan proporsional. Apabila salah satu atau seluruh fungsi yang ada tidak memenuhi syarat linearitas, maka tidak juga memenuhi syarat untuk menggunakan peralatan program linear.

b. Penjumlahan *(Additivity)*

   Semua fungsi, baik fungsi tujuan maupun fungsi kendala tersusun sedemikian rupa sehingga menunjukkan sifat penjumlahan. Nilai akhir fungsi khususnya fungsi tujuan adalah jumlah dari setiap unsurnya.

c. Proporsionalitas *(Proportionality)*

   Sifat keselarasan atau proporsionalitas itu muncul sehubungan dengan adanya sifat kelinearan tersebut. Dengan menambah atau mengurangi jumlah masukan secara selaras maka jumlah keluaran juga akan bertambah atau berkurang dengan nisbah yang selaras dengan itu. Dengan kata lain, fungsi program linear tergolong pula dalam fungsi yang homogen linear. Oleh karena itu, jalur ekspansi dianggap sebagai sebuah garis lurus yang melalui titik pusat *isoproduct curve.*

d. *Non-negativity Condition*

Hasil optimal program linear tidak selalu dinyatakan dengan suatu bilangan bulat *(integer),* melainkan dapat pula dinyatakan dengan bilangan yang tidak bulat *(non-integer ends),* asalkan hasil pemecahan dimaksud adalah besaran yang positif. Jika program linear optimal bukan dengan bilangan bulat, sedangkan diharapkan agar hasil optimal tersebut dinyatakan dalam bilangan bulat maka pemecahan masih harus dilanjutkan dengan memakai *integer programming,* suatu pengembangan dari model program linear yang ditujukan untuk mendapatkan hasil optimal dengan bilangan bulat.

e. Pasti *(Certainty)*

Asumsi ini menjelaskan bahwa metode program linear hanya dapat dipakai sebagai alat pemecahan masalah jika parameter fungsi analisis diketahui dengan pasti.

II.1.4 Metode Simpleks

Metode Simpleks adalah suatu metode untuk memecahkan problem-problem program linear yang diantaranya banyak pertidaksamaan dan banyak variabel. Dalam memanfaatkan metode simpleks untuk memecahkan masalah-masalah program linear, model program linear harus diubah ke dalam suatu bentuk umum yang dinamakan ”bentuk baku”. Ciri-ciri dari bentuk baku model program linear adalah semua kendala berbentuk persamaan dengan sisi kanan non negatif, fungsi tujuan bisa memaksimumkan atau meminimumkan. Salah satu teknik penentuan solusi optimal yang dipakai dalam pemrograman linear adalah metode simpleks. Penentuan solusi optimal memanfaatkan metode simpleks didasarkan pada teknik eleminasi Gauss Jordan. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan memeriksa titik ekstrem satu per satu dengan cara kalkulasi iteratif. Sehingga penentuan solusi optimal dengan simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi. Iterasi ke *i* hanya tergantung dari iterasi sebelumnya (Teguh, 2013).

Beberapa bentuk standar model metode simpleks diberikan sebagai berikut:

1) Bentuk standar ketidaksamaan *(The standard inequality form)*

   Maksimum:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ ... + c_nx_n$$

   dengan kendala:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ ... + a_{1n}x_n \ &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ ... + a_{2n}x_n \ &\leq b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ ... + a_{mn}x_n \ &\leq b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

   di mana $a_{ij}, c_j, dan\ b_j$ adalah konstanta-konstanta yang diketahui dan dapat ditentukan. Dalam notasi matriks, program linear dapat ditulis sebagai berikut:

   Maksimumkan:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ ... + c_nx_n$$

   dengan kendala:

$$Ax \leq b\ danx \geq 0$$

   dimana:

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$dan\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) Bentuk standar kesamaan *(The standard equality form)*

   Bentuk standar kesamaan dapat diperoleh dari bentuk ketidaksamaan dengan mengubah tanda $\geq\ dan\ \leq$ menjadi tanda $=$ sebagai berikut:

   a) Ketidaksamaan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ ... + a_{1n}x_n \ \leq b_1$$

dapat diubah menjadi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

di mana $x_{n+1} \geq 0$ dan disebut *slack variable*.

b) Ketidaksamaan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ ... + a_{1n}x_n \ \geq b_1$$

dapat diubah menjadi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$

di mana $x_{n+1} \geq 0$ dan disebut s*urplus variable*.

Beberapa ketentuan yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan masalah program linear menggunakan metode simpleks yaitu:

1. Nilai kanan fungsi kendala harus positif. Apabila negatif, nilai tersebut harus dikalikan -1.
2. Fungsi kendala dengan tanda " $\leq$ "harus diubah ke bentuk " $=$ "dengan menambahkan *slack*. Variabel *slack* disebut juga variabel dasar. Penambahan slack variabel menyatakan kapasitas yang tidak digunakan atau tersisa pada sumber daya tersebut. Hal ini karena ada kemungkinan kapasitas yang tersedia tidak semua digunakan dalam proses produksi.
3. Fungsi kendala dengan tanda " $\geq$ " harus diubah ke bentuk " $\leq$ " dengan cara dikalikan dengan -1, lalu di ubah ke bentuk persamaan " $=$ " dengan menambahkan slack variabel. Karena nilai kanan bernilai negatif, dikalikan dengan -1 dan ditambah *artificial variable. Artificial variable* ini secara fisik tidak mempunyai arti, dan hanya digunakan untuk kepentingan perhitungan.
4. Fungsi kendala dengan tanda " $=$ " harus ditambah *artificial variable* jika belum ada basis.

Berikut ini langkah-langkah untuk memaksimumkan penyelesaian persoalan program linear dengan menggunakan metode simpleks:

a. Mengubah fungsi tujuan dan batasan-batasan

Fungsi tujuan diubah menjadi fungsi implisit, artinya semua $c_n x_n$ digeser ke ruas kiri persamaan. Pada bentuk standar, semua batasan mempunyai tanda $\leq$. Ketidaksamaan ini harus diubah menjadi kesamaan. Caranya dengan menambahkan slack variabel, yaitu variabel tambahan yang mewakili tingkat pengangguran atau kapasitas yang merupakan batasan. *Slack variabel* ini adalah$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots . x_{n+m}$.

b. Menyusun persaman-persamaan di dalam tabel

Setelah fungsi tujuan dan batasan diubah, kemudian disusun ke dalam tabel, dalam bentuk simbol seperti tampak pada tabel berikut:

Tabel 2. 1 Simpleks dalam Bentuk Simbol

Variabel Dasar	z	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	NK
z	1	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_{n+m}		a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m

Keterangan:

m: jenis batasan-batasan sumber/fasilitas yang tersedia

n: jenis batasan-batasan kegiatan yang menggunakan sumber/fasilitas tersebut

i: nomor setiap sumber/fasilitas yang tersedia (1 sampai m)

j: nomor setiap jenis kegiatan yang menggunakan sumber/fasilitas (1 sampai n)

x_j : tidak kegiatan ke-j

a_{ij} : banyaknya sumber yang diperlukan untuk menghasilkan etiap unit output

b_i: banyaknya sumber yang tersedia untuk dialokasikan kesetiap unit kegiatan (1 sampai m)

Z: Nilai yang dioptimalkan

c_j: kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan kegiatan (x_j) dengan satu satuan/unit merupakan sumbangan setiap satuan keluaran kegiatan ke-j terhadap nilai Z

NK: nilai yang berada disebelah kanan tanda sama dengan

c. Memilih kolom kunci

Cara menentukan kolom kunci adalah dengan memilih kolom yang mempunyai nilai negatif dengan angka terbesar pada baris fungsi tujuan.

d. Menentukan nilai indeks pada tiap-tiap baris

Nilai indeks tiap-tiap baris ditentukan dengan cara membagi nilai -nilai pada kolom NK dengan nilai yang sebaris dengan kolom kunci, atau:

$$indeks = \frac{nilai\ kolom\ NK}{nilai\ kolom\ kunci}$$

e. Memilih baris kunci

Baris kunci adalah baris yang mempunyai indeks positif dengan angka terkecil.

f. Menentukan angka kunci

Angka kunci adalah angka yang termasuk dalam kolom kunci dan juga termasuk pada baris kunci dinamakan angka kunci.

g. Mengubah nilai-nilai baris kunci

Nilai baris kunci diubah dengan caraa membaginya denga angka kunci.

h. Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci

Nilai-nilai baris yang lain, selain pada baris kunci dapat diubah dengan rumus sebagai berikut:

Baris baru = baris lama – (koefisien kolom kunci x nilai baru baris kunci)

i. Melanjutkan perbaikan-perbaikan/perubahan-perubahan

Ulangi langkah-langkah perbaikan mulai langkah ke-c sampai langkah ke-f untuk memperbaiki tabel yang telah diubah/diperbaiki nilainya. Perubahan baru berhenti setelah pada baris pertama (baris fungsi tujuan) tidak ada lagi yang bernilai negatif.

II.1.5 Metode Dual Simpleks

Metode dual simpleks digunakan jika tabel optimal tidak layak. Jika fungsi kendala ada yang menggunakan tanda pertidaksamaan "≥" dan tidak ada tanda "=" dalam bentuk umum PL, maka metode dual simpleks dapat digunakan. Menurut Dimyati pada dasarnya metode dual simpleks ini menggunakan tabel yang sama seperti metode simpleks pada primal, tetapi leaving dan entering variabel-nya ditentukan sebagai berikut (Dimyati, 2011):

1. *Leaving variable* (kondisi fisibilitas)

   Yang menjadi *leaving variable* pada dual simpleks adalah variabel basis yang memiliki nilai negatif terbesar. Jika semua variabel basis telah berharga positif atau nol, berarti keadaan fisibel telah tercapai.
2. *Mentering variable* (kondisi optimalitas)
   a. Tentukan perbandingan (rasio) antara koefisien persamaan z dengan koefisien persamaan leaving variable. Abaikan penyebut yang positif atau nol. Jika penyebut berharga positif atau nol, berarti persoalan yang bersangkutan tidak memiliki solusi fisibel.
   b. Untuk persoalan minimasi, *entering variable* adalah variabel dengan rasio terkecil, sedangkan untuk persoalan maksimasi, *entering variable* adalah variabel dengan rasio absolut terkecil.

II.2 Integer *Linear Programming* (Program Linear Bilangan Bulat)

Integer Linear Programming merupakan suatu cara dari program matematika. *Integer Linear Programming* merupakan suatu masalah tertentu dari program linear di mana seluruh atau sebagian variabel dibatasi sebagai bilangan cacah tak negatif. Seandainya semua variabel dibatasi sebagai bilangan cacah, masalahnya dapat disebut sebagai pure integer programming dan seandainya sebagian variabel tertentu dibatasi sebagai bilangan cacah sedangkan yang lain tidak, masalahnya disebut mixed integer programming. Metode simpleks merupakan basis untuk mencari jalan keluar masalah program linear di mana disyaratkan bahwa semua variabel merupakan tak negatif. Tetapi untuk mencari jalan keluar masalah (model) *Integer Linear Programming* mempunyai beberapa cara. Tetapi, baik *Linear Programming* ataupun *Integer Linear Programming*, mulai dengan ruang yang sama yaitu ruang mencari jalan keluar yang layak (feasible). Namun, akibat adanya persyaratan bilangan cacah bagi masalah kedua yang bermakna adanya batasan tambahan mengakibatkan adanyasuatu pengurangan dari ruang jalan keluar yang layak (Angeline, 2014)

Program *integer* mensyaratkan bahwa (Pasaribu, 2018):

1. Semua nilai variabel keputusan harus merupakan bilangan *bulat* disebut *All Integer Linear Programming* (AILP).
2. Hanya sebagian keputusan yang merupakan bilangan *bulat*disebut *Mixed Integer Linear Programing* (MILP).
3. Jika variabel keputusan harus bernilai 0 dan 1 disebut *Zero One Integer Linear Programming* (ZOILP).

Model dari program *integer* adalah sebagai berikut (Angeline, 2014):

Maksimal atau minimal:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \; ; \; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ atau } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$$

$$x_j \ge 0$$

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n$

Keterangan:

Z: fungsi sasaran atau fungsi tujuan

x_j: variabel keputusan

c_j: koefisien fungsi tujuan

a_{ij}: koefisien kendala

b_i: nilai ruas kanan

Metode pemecahan masalah *Integer Linear Programming* diawali dengan memanfaatkan metode simpleks. Pemecahan masalah optimal yang didapatkan dengan metode ini mungkin tidak *integer*. Kesukaran ini memfokuskan para peneliti untuk memilih cara-cara lain untuk memecahkan masalah tersebut. Cara pendekatan salah satunya dengan cara memecahkan model tersebut sebagai sebuah *Linear Programming* yang kontinu dan kemudian membulatkan pemecahan masalah optimal ke nilai *integer* terdekat yang layak. Namun, pemecahan masalah yang dibulatkan tidak menjamin untuk memenuhi kendala. Ada dua metode untuk mendapatkan batasan-batasan khusus yang akan didapat jalan keluar masalah optimal dari masalah *Linear Programming* relaksasi untuk mencapai ke arah mencari jalan keluar *integer* yang dibutuhkan, yaitu *Branch and Bound* dan *Cutting Plane* (Syafwan, 2015).

II.3 Metode Branch and Bound

Metode *branch and bound* pertama kali diperkenalkan oleh Land dan Doig (1960). Ide dasarnya adalah untuk membagi daerah solusi fisibel menjadi daerah solusi fisibel yang lebih kecil. Ini merupakan prosedur sederhana yang menetapkan batasan yang lebih tinggi atau rendah menjadi solusi saat menyelesaikan sub-masalah secara sistematis. Kemudian metode ini dimodifikasi oleh Dakin (1965) dan dengan sukses menerapkannya di dalam kitab undang-undang hukum dagang sehingga banyak orang dapat dengan mudah memecahkan persoalan program *integer* (Siang, 2014).

Metode *Branch and Bound* adalah pendekatan mencari jalan keluar yang bisa digunakan untuk beragam persoalan yang tidak sama. Metode *Branch and Bound* mempunyai prinsip yang mendasar yaitu jumlah seluruh subset jalan keluar masalah yang fisibel bisa dibagi menjadi subset jalan keluar yang lebih kecil. Subset-subset ini kemudian bisa dievaluasi secara teratur sampai terdapat jalan keluar masalah yang terbaik didapatkan penerapan metode *Branch and Bound* pada problem *Integer Linear Programming* dimanfaatkan bersama-sama dengan metode simpleks (Akram, 2016).

Ada dua batas yang terdapat pada Algoritma *Branch and Bound* yaitu batas atas (*upper bound)* dan batas bawah *(lower bound)* yaitu sebagai berikut:

a. Pada problem maksimalisasi: batas atas adalah jalan keluar masalah *Integer Linear Programming* relaksasi dari sub problem tersebut sedangkan batas bawahnya merupakan nilai dari sub problem tersebut ataupun jalan keluar masalah dari sub problem lain yang semua variabel keputusan yang wajib bernilai integer sudah bernilai integer.

b. Pada problem minimalisasi: batas bawah adalah jalan keluar masalah *Integer Linear Programming* relaksasi dari sub problem tersebut sedangkan batas atasnya merupakan nilai dari sub problem tersebut ataupun jalan keluar dari sub problem lain yang semua variabel keputusan bernilai integer.

Adapun langkah-langkah metode Branch and Bound dalam kasus optimasi adalah sebagai berikut (Siang, 2011):

1. Menyelesaikan LP dengan metode simpleks.
2. Jika variabel basis yang diharapkan bernilai bulat telah mencapai nilai berupa bilangan bulat, maka solusi bulat optimum telah tercapai.
3. Jika variabel basis yang diharapkan bernilai bulat belum mencapai nilai yang berupa bilangan bulat, maka nilai solusi yang masih berupa bilangan pecahan harus dicabangkan ke dalam sub-sub masalah (*branching)*. Misalkan variabel dari nilai solusi optimum yang belum berupa bilangan bulat adalah x_j dengan $i_1 < x_j < i_2$ (i_1 dan i_2 merupakan 2 bilangan bulat berurutan). Pencabangan dilakukan menjadi 2 sub masalah baru yaitu $x_j \leq i_1$ untuk cabang kiri dan $x_j \geq i_2$ untuk cabang kanan. Perhitungan yang diselesaikan terlebih dahulu adalah pencabangan di sisi sebelah kiri. Bila terdapat lebih dari satu variabel pecahan pada solusi optimum, maka pilih variabel dengan nilai pecahan terbesar untuk dicabangkan terlebih dahulu.
4. Nilai solusi optimum kontinu fungsi tujuan ditetapkan sebagai batas atas pada setiap sub-masalah. Batas bawah adalah pemecahan bulat pertama yang didapatkan melalui tahap pencabangan yang menjadi patokan kapan pencabangan dapat dihentikan (misalkan X^* dengan nilai fungsi $f(X^*)$). Batas bawah belum tentu merupakan penyelesaian optimal masalah mula-mula.
5. Setiap pencabangan diselesaikan dengan metode simpleks.
6. Jika salah satu atau kedua bagian tersebut menghasilkan solusi yang bulat, maka bagian tersebut dihentikan dan ditetapkan sebagai batas

bawah. Jika kedua masalah belum menghasilkan solusi yang bulat, maka dipilih salah satu bagian yang memiliki nilai fungsi tujuan yang lebih besar untuk kembali dicabangkan. Selesaikan pencabangan dengan metode simpleks sampai ditemukan batas bawah (langkah 5).

7. Setelah ditemukan batas bawah, lakukan pencabangan pada variabel yang belumberupa bilangan bulat pada solusi optimum. (X_a) adalah solusi optimum lain yang didapat setelah ditemukannya batas bawah(berupa variabel bulat atau tidak).
8. Pencabangan dihentikan apabila solusi optimum lain (X_a) memiliki nilai fungsi lebih besar dari nilai fungsi batas bawah $(f(X_a) > f(X^*))$ pada kasus maksimasi dan jika solusi optimum lain (X_a) memiliki nilai fungsi lebih kecil dari nilai fungsi batas bawah $(f(X_a) < f(X^*))$ pada kasus minimasi. Jika pencabangan dihentikan dengan solusi optimum lain (X_a) yang belum berupa bilangan bulat, maka batas bawah akan ditetapkan sebagai solusi bulat optimum. Pencabangan juga dihentikan apabila pemecahan menghasilkan nilai yang tidak layak (nilai variabel basis pada kolom solusi bernilai negatif) dan apabila terjadi maka batas bawah ditetapkan sebagai solusibulat optimum.
9. Jika ditemukan solusi optimum lain (X_a) yang bernilai bulat, maka lakukan pembandingan dengan batas bawah, lalu dipilih solusi bulat optimum yang memiliki nilai paling optimal atau menghasilkan nilai Z yang lebih optimal (bernilai lebih besar untuk kasus maksimasi dan bernilai lebih kecil untuk kasus minimasi).
10. Jika sudah ditemukan nilai optimum yang memenuhi syarat *integer* maka nilai tersebut dibandingan dengan nilai keuntungan produksi sebelumnya yang biasa dilakukan perusahaan.

II.3.1 Syarat pencabangan (fathoming) berhenti

Pencabangan atau pencarian solusi pada suatu sub-masalah dihentikan jika:

1. Infeasible atau tidak mempunyai daerah layak.
2. Semua variabel keputusan yang harus bernilai integer sudah bernilai integer.

3. Pada masalah memaksimalkan, penghentian pencabangan pada suatu sub-masalah dilakukan jika batas atas dari sub-masalah tersebut tidak lebih besar atau sama dengan batas bawah.
4. Pada masalah meminimumkan penghentian pencabangan pada suatu sub-masalah dilakukan jika batas bawah tidak lebih lebih kecil atau sama dengan batas atas.

II.3.2 Contoh penerapan metode *Branch and Bound*

Maksimalkan: $Z = 8x_1 + 5x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$

Dengan menggunakan metode simpleks diperoleh hasil sebagai berikut:

Iterasi 0

Variabel Dasar	Z	X1	X2	Slack 1	Slack 2	NK
Z	1	-8	-5	0	0	
Slack1	0	1	1	1	0	6
Slack 2	0	9	5	0	1	45

Iterasi 1

Variabel Dasar	Z	X1	X2	Slack 1	Slack 2	NK
Z	1	0	0,5556	0	-0,8889	
Slack1	0	0	0,4444	1	-0,1111	1
X1	0	1	0,5556	0	0,1111	5

Iterasi 2

Variabel Dasar	Z	X1	X2	Slack 1	Slack 2	NK
Z	1	0	0	-1,25	-0,75	41,25
X2	0	0	1	2,25	-0,25	2,25
X1	0	1	0	-1,25	0,25	3,75

Dari hasil iterasi menggunakan metode simpleks diperoleh hasil sebagai berikut:
$Z = 41{,}25$, $x_1 = 3{,}75$, $x_2 = 2{,}25$

Dengan metode pembulatan ke bawah diperoleh$x_1 = 3,\ \ x_2 = 2,\ \ Z = 34$. Kemudian Pencabangan dilakukan pada pecahan terbesar yaitu pada x_1. Maka pencabangan pertama dilakukan dengan menambahkan kendala $x_1 \geq 4$ (sub-masalah 1) dan kendala $x_1 \leq 3$ (sub-masalah 2).

Sub-Masalah 1:

Maksimalkan: $Z = 8x_1 + 5x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Sub-Masalah 2:

Maksimalkan: $Z = 8x_1 + 5x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

Diperoleh hasil:

Sub-Masalah 1:

$Z = 39$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3$

Sub-Masalah 2:

$Z = 41$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1{,}8$

Selanjutnya di tentukan batas atas dan batas bawahnya:
BA = $Z = 41$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1{,}8$ dan BB = $Z = 29$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

Pecahan terbesar terletak di $x_2 = 1{,}8$. Maka pencabangan untuk sub-masalah selanjutnya yaitu dengan menambahkan kendala $x_2 \geq 2$ (sub-masalah 3) dan kendala $x_2 \leq 1$ (sub-masalah 4).

Sub-Masalah 3:

Maksimalkan: $Z = 8x_1 + 5x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 4$

$x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Sub-Masalah 4:

Maksimalkan: $Z = 8x_1 + 5x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

Diperoleh hasil:

Sub-Masalah 3: Tidak ada solusi fisibel.

Sub-Masalah 4: $Z = 40{,}5556$, $x_1 = 4{,}44$, $x_2 = 1$

Selanjutnya di tentukan batas atas dan batas bawahnya:

BA = $Z = 40{,}5556$, $x_1 = 4{,}44$, $x_2 = 1$, dan BB = $Z = 37$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

Pecahan terbesar terletak di $x_1 = 4{,}44$. Maka pencabangan untuk sub-masalah selanjutnya yaitu dengan menambahkan kendala $x_1 \geq 5$ (sub-masalah 5) dan kendala $x_1 \leq 4$ (sub-masalah 6).

Sub-Masalah 5:

Maksimalkan: $Z = 8x_1 + 5x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 4$

$x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Sub-Masalah 6:

Maksimalkan: $Z = 8x_1 + 5x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

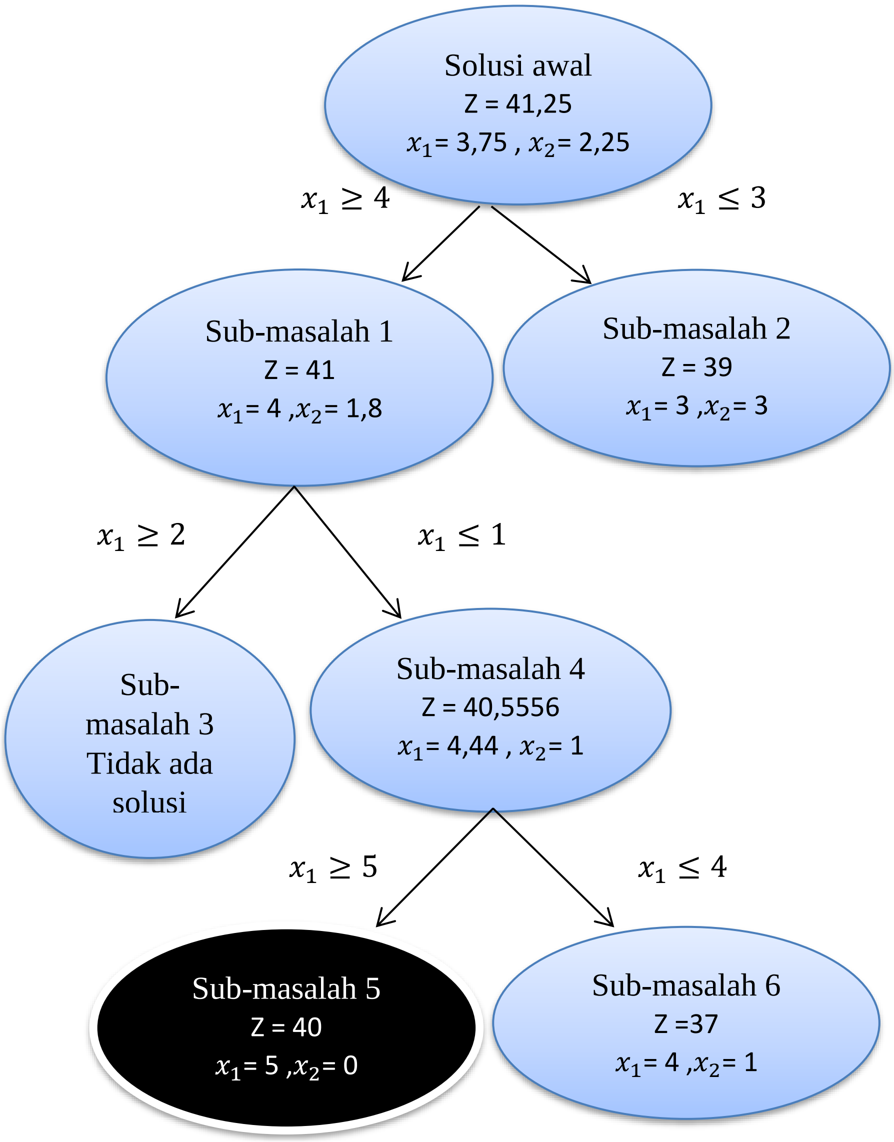
Diperoleh hasil:

Sub-Masalah 5: $Z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$

Sub-Masalah 6: $Z = 37$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$

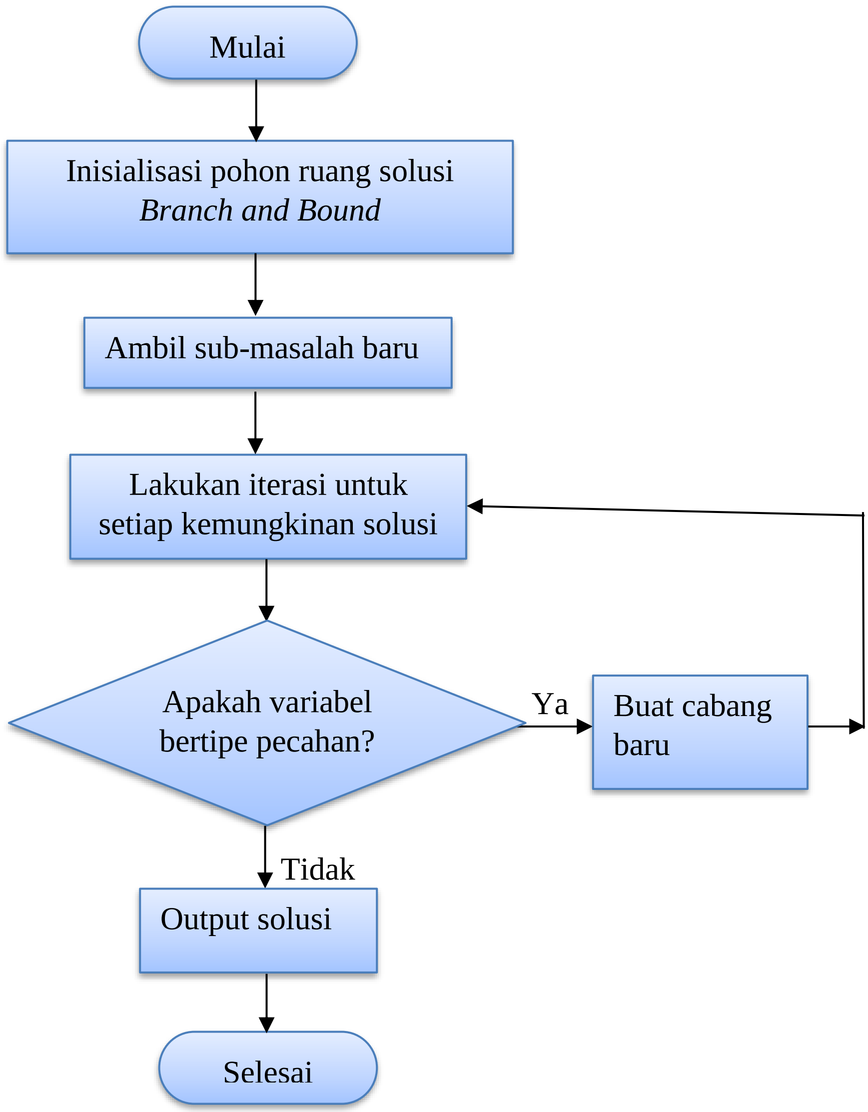
Sub-Masalah 5 menghasilkan penyelesaian bulat dengan nilai optimal yang lebih besar dari Sub-Masalah 6. Sehingga Sub-Masalah 5 menjadi penyelesaian optimal dari masalah ini.

Pencabangan selengkapnya dapat dilihat pada **Gambar 2.1** berikut:



Gambar 2. 1 Pencabangan hasil metode Branch and Bound

Langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode *branch and bound* yang disajikan pada **gambar 2.2** berikut:



Gambar 2. 2 Flowchart dari Metode *Branch and Bound*

II.4 Metode Cutting Plane

Metode cutting plane merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan program linear bilangan bulat, baik bilangan bulat murni maupun campuran dengan penambahan batasan baru yang disebut gomory. Batasan gomory diberikan jika nilai dari variabel keputusan belum bulat (bernilai pecahan). Batasan-batasan tersebut secara efektif akan menyingkirkan beberapa ruang penyelesaian yang tidak berisi titik bilangan bulat yang layak, tetapi tidak pernah menyingkirkan satupun titik bilangan bulat yang layak. Metode cutting plane digunakan untuk permasalahan yang variabel keputusannya harus bulat. Program linear tidak efektif untuk menyelesaikan permasalahan tersebut sehingga dikembangkan metode cutting plane yang lebih efektif dan memberikan hasil yang lebih baik (Alannuariputri, dkk 2017).

II.4.1 Langkah-langkah metode *cutting plane*

Langkah-langkah metode *cutting plane* diringkas seperti berikut:

1. Menyelesaikan masalah program linear bilangan bulat dengan metode simpleks dengan mengabaikan syarat bilangan bulat.
2. Periksa solusi optimum. Jika semua variabel basis memiliki nilai integer, solusi optimum integer telah diperoleh dan proses solusi telah berakhir. Jika satu atau lebih variabel basis masih memiliki nilai pecah, teruskan ke langkah 3.
3. Buatlah suatu batasan *gomory* dan cari solusi optimum melalui prosedur dual simpleks.

Tabel 2. 2 Optimum Masalah Program Linear

Basis	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m	w_1	$\cdots$	w_j	$\cdots$	w_n	S_i	Hasil
z	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\overline{c_1}$	$\cdots$	$\overline{c_j}$	$\cdots$	$\overline{c_n}$	0	β_0
x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	α_1^1	$\cdots$	α_1^j	$\cdots$	α_1^n	0	β_1
. . .	. . .		. . .		. . .	. . .		. . .		. . .	. . .	. . .
x_i	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	α_i^1	$\cdots$	α_i^j	$\cdots$	α_i^n	0	β_i
. . .			. . .		. . .	. . .		. . .		. . .	. . .	. . .
x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	α_m^1	$\cdots$	α_m^j	$\cdots$	α_m^n	0	β_m

Ket:

Variabel x_i adalah variabel basis, $i = 1,2,\ldots,m$.

Variabel w_j adalah variabel non basis, $j = 1,2,\ldots,n$.

4. Tentukan baris sumber dengan menentukan baris variabel keputusan yang akan dibulatkan. Jika lebih dari satu, dipilih nilai pecahan terbesar. Pada langkah ini dibentuk potongan *Gomory* yang digunakan sebagai batasan baru. Misalkan persamaan ke-*i* dimana variabel basis x_i memiliki nilai *noninteger*

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \, w_j, \beta_i \; tidak \; integer \; (baris \; sumber)$$

Batasannya dapat ditulis dalam bentuk:

$$S_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j = -f_i$$

Persamaan inilah yang disebut persamaan potongan *Gomory.*

Tabel 2. 3 Setelah Penambahan Potongan Gomory

Basis	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m	w_1	$\cdots$	w_j	$\cdots$	w_n	S_i	Hasil
z	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\overline{c_1}$	$\cdots$	$\overline{c_j}$	$\cdots$	$\overline{c_n}$	0	β_0
x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	α_1^1	$\cdots$	α_1^j	$\cdots$	α_1^n	0	β_1
. . .	. . .		. . .		. . .	. . .		. . .		. . .	. . .	. . .
x_i	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	α_i^1	$\cdots$	α_i^j	$\cdots$	α_i^n	0	β_i
. . .			. . .		. . .	. . .		. . .		. . .	. . .	. . .
x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	α_m^1	$\cdots$	α_m^j	$\cdots$	α_m^n	0	β_m
S_i	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$-f_{i1}$		$-f_{ij}$	$\cdots$	$-f_{in}$	1	$-f_i$

Dimana S_i adalah variabel *slack* nonnegatif yang berdasarkan defenisinya haruslah integer. Persamaan batasan ini mendefenisikan pemotongan *gomory*. Dari table 2.2, $w_j = 0\ dan\ S_i = -f_i$ tidak layak. Ini berarti bahwa batasan baru tersebut tidak dipenuhi oleh solusi yang diberikan. Metode dual simpleks dapat dipergunakan untuk mengatasi ketidaklayakan ini.

5. Mengerjakan dengan metode simpleks dual untuk memperoleh penyelesaian optimal yang baru. Jika penyelesaian baru (setelah menerapkan metode simpleks dual) bernilai *integer*, maka proses selesai. Jika belum, langkah selanjutnya adalah menentukan persamaan batasan *Gomory* lagi dari tabel yang dihasilkan pada langkah 4 kemudian diselesaikan menggunakan metode simpleks dual kembali. Langkah ini diulang sampai diperoleh penyelesaian yang bernilai *integer*. Jika pada salah satu langkah simpleks dual tersebut menunjukkan bahwa tidak ada penyelesaian layak, maka masalah tersebut tidak memiliki penyelesaian *integer* yang layak.

II.4.2 Contoh penerapan metode *Cutting Plane*

Maksimalkan: $Z = 8x_1 + 5x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$

Solusi dengan metode simpleks:

Iterasi 0

B	X1	X2	S1	S2	NK
Z	-8	-5	0	0	
S1	1	1	1	0	6
S2	9	5	0	1	45

Iterasi 1

B	X1	X2	S1	S2	NK
Z	-5/9	0	0	8/9	40
S1	4/9	0	1	-1/9	1
X2	5/9	1	0	1/9	5

Iterasi 2

B	X1	X2	S1	S2	NK
Z	0	0	5/4	¾	165/4
X1	1	0	9/4	-1/4	9/4
X2	0	1	-5/4	¼	15/4

Solusi yang didapatkan adalah $x_1 = \frac{9}{4}, x_2 = \frac{15}{4}, Z = \frac{165}{4}$.

Nilai x_1 dan x_2 bukanlah solusi integer. Karena yang diinginkan adalah solusi x_1 dan x_2 merupakan bilangan integer maka dibuatlah kendala gomory. Nilai f_i terbesar pada nilai x_2 sehingga dari persamaan kedua didapatkan:

$x_2 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = \frac{15}{4}$ atau $x_2 + (-2 + \frac{3}{4})s_1 + \frac{1}{4}s_2 = 3\frac{3}{4}$ sehingga kendala gomory yang didapatkan adalah $s_g - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 = -\frac{3}{4}$

Tabel baru setelah penambahan kendala gomory adalah sebagai berikut:

Iterasi 3

B	X1	X2	S1	S2	s_g	NK
Z	0	0	5/4	¾	0	165/4
X1	1	0	9/4	-1/4	0	9/4
X2	0	1	-5/4	¼	0	15/4
s_g	0	0	-3/4	-1/4	1	-3/4

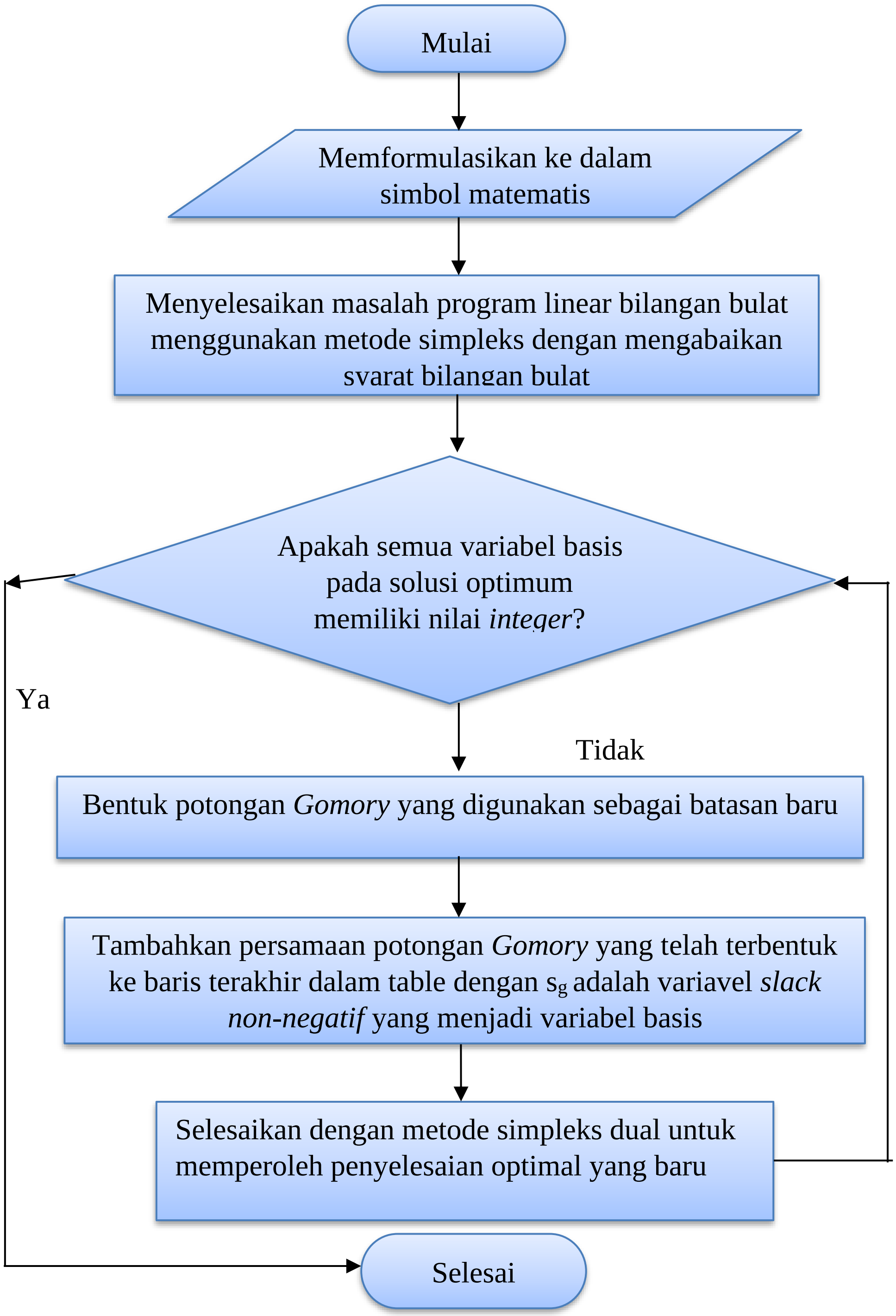
Dengan penyelesaian menggunakan metode dual simpleks didapatkan hasil seperti berikut:

Iterasi 4

B	X1	X2	S1	S2	s_g	NK
Z	0	0	0	1/3	5/3	40
X1	1	0	0	-1	3	0
X2	0	1	0	2/3	-5/3	5
s_g	0	0	1	1/3	-4/3	1

Berdasarkan tabel pada iterasi 4 didapatkan $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $Z = 40$. Karena solusi x_1 dan x_2 yang didapatkan merupakan solusi yang integer, maka iterasi selesai.

Langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode *cutting plane* yang disajikan pada **gambar 2.3** berikut:



Gambar 2. 3 Flowchart dari Metode *Cutting Plane*

II.5 Software QM

*Software POM/QM for Windows*adalah sebuah *software* yang dirancang untuk melakukan perhitungan yang diperlukan pihak manajemen untuk mengambil keputusan di bidang produksi dan pemasaran. *Software* ini dirancang hanya untuk membantu perhitungannya saja, jadi kita harus dapat menginterpretasikan masalah dan teori programasi linear. *Software* ini dirancang oleh Howard J. Weiss tahun 1996 untuk membantu manajer produksi khususnya dalam menyusun prakiraan dan anggaran untuk produksi bahan baku menjadi produk jadi atau setengah jadi dalam proses pabrikasi.

Software QM berguna untuk membantu pengambilan keputusan seperti misalnya menentukan kombinasi produksi yang sesuai agar memperoleh keuntungan sebesar-besarnya, menentukan order pembelian barang agar biaya perawatan menjadi seminimal mungkin, menentukan penugasan karyawan terhadap suatu pekerjaan agar dicapai hasil yang maksimal, dan lain sebagainya. Program ini menyediakan beberapa modul berbeda, yaitu*: Aggregate Planning, Assembly Line Balancing, Assignment, Break Even/Cost-Volume Analysis, Capital Investment, Decission Analysis, Forecasting, Game Theory, Goal Programming, Integer And Mixed Integer Programming, Inventory, Job Shop Sceduling, Layout, Learning Curve, Linear Programming, Location, Lot Sizing, Markov Analysis, Material Requirements Planning, Networks, Productivity, Project Management (PERT/CPM), Quality Control, Reliability, Simulation, Statistics, Transportation, Waiting Lines, Work Measurement.*