# KONSTRUKSI POSISI-*P* DARI PERMAINAN WYTHOFF

## S K R I P S I


**OLEH :**

**MUHLIS MAULANA IBRAHIM**

**H 111 07 004**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**



**2013**

# KONSTRUKSI POSISI-*P* DARI PERMAINAN WYTHOFF

## SKRIPSI

***Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin***

***Makassar***

**OLEH :**


**MUHLIS MAULANA IBRAHIM**

**H 111 07 004**


**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2013**

## LEMBAR KEOTENTIKAN

***Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :***

**"KONSTRUKSI POSISI-*P* DARI PERMAINAN WYTHOFF"**

***Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.***

**Makassar, 10 Juni 2013**

**MUHLIS MAULANA IBRAHIM**
**NIM: H 111 07 004**

# KONSTRUKSI POSISI-*P* DARI PERMAINAN WYTHOFF

*Disetujui oleh:*

| Pembimbing Utama | Pembimbing Pertama |
|---|---|
| **Dr. Loeky Haryanto, MS., MSc., MAT.** | **Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** |
| **NIP. 19550915 198303 1 003** | **NIP. 19680803 199202 1 001** |

**Pada Tanggal : 10 Juni 2013**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**2013**

Pada hari ini, Senin tanggal 10 Juni 2013, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi berjudul :

# "KONSTRUKSI POSISI-*P* DARI PERMAINAN WYTHOFF"

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 10 Juni 2013

## PANITIA UJIAN SKRIPSI

| | | | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | Ketua | : Drs. Khaeruddin, M.Sc. | (……………………….) |
| 2. | Sekretaris | : Dr. Mawardi, S.Si., M.Eng. | (……………………….) |
| 3. | Anggota | : Drs. Muh. Zakir, M.Si. | (……………………….) |
| 4. | Anggota | : Dr.LoekyHaryanto,MS., MSc.,MAT. | (……………………….) |
| 5. | Anggota | : Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. | (……………………….) |

# KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

*Alhamdulillah* dengan rasa syukur kehadirat **Allah SWT**. yang dengan limpahan rahmat dan inayah-Nya. Skripsi dengan judul ***"Konstruksi Posisi-P dari Permainan Wythoff"***, dapat penulis selesaikan dan *InsyaAllah* bermanfaat. Salam dan shalawat penulis haturkan atas junjungan **Nabi Besar Muhammad SAW**, sebagai satu-satunya panutan dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini memerlukan proses dan pengorbanan yang tidaklah sedikit. Berbagai macam hambatan dan kendala penulis bisa rasakan, tapi semua itu dapat dilalui berkat do'a dan dorongan motivasi dari Ayah dan Ibunda tercinta **Alimuddin** dan **Haslia**. Kakak penulis: **Suryanti Nickita** dan **Fitria Wirawinarni**. Keponakan penulis: **Irgi**, **Viqra**, **Fitrah**, **Vika**, dan **Maisa** beserta keluarga besar lainnya.

Ucapan terimakasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis ucapkan juga kepada:

1. Bapak **Dr**. **Loeky Haryanto, MS., M.Sc., MAT.** dan Bapak **Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing penulis. Beliau merupakan dosen-dosen pembimbing yang sangat luar biasa dan senantiasa meluangkan waktu buat Penulis. Beliau juga telah banyak memberikan arahan, bimbingan dan motivasi yang luar biasa serta memberi contoh pribadi pekerja yang pantang menyerah.

2. Bapak **Drs. Khaeruddin, M.Sc.,** bapak **Dr. Mawardi, S.Si., M.Eng.,** dan bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si.**, selaku dosen penguji yang selama seminar telah banyak memberikan kritikan, saran dan masukan yang sangat berguna dalam perbaikan skripsi ini.
3. Bapak **Dr. Nurdin, M.Si.,** selaku dosen pengajar telah banyak memberikan masukan positif bagi penulis untuk senantiasa berada dalam ruang lingkup penyelesaian skripsi.
4. Bapak **Muh. Nur, M.Si.,** selaku dosen pengajar sekaligus senior dan sahabat buat penulis. Beliau telah banyak menginspirasi penulis baik dalam kata dan perbuatan. Beliau juga banyak memberikan arahan, motivasi, candaan sehingga penulis betah untuk tetap berada dalam lingkungan penyelesaian skripsi.
5. Ibu **Dr. Hasmawati, M.Si.,** selaku ketua jurusan Matematika FMIPA Unhas dan seluruh Dosen Jurusan Matematika FMIPA Unhas atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis selama masa perkuliahan.
6. Ibu **Prof. Dr. Hj. Dirayah R. Husain, DEA.,** yang telah memberikan inspirasi kepada penulis tentang profesionalisme dalam suatu tindakan dan tanggung jawab.
7. Pak **Nasir** dan Pak **Sutamin s**elaku pegawai Jurusan Matematika. Pak **Bakhtiar** , Pak **Rahmat,** Pak **Anwar,** Pak **Iswan** dan Pak **Adi** selaku pegawai Fakultas (*Science Bulding*). Merekalah yang telah membantu Penulis dalam urusan administrasi tingkat jurusan dan fakultas pada masa perkuliahan hingga saat ini. Terkhusus buat Pak **Iswan,** terimakasih banyak

atas bantuannya, keramahannya, dan tanggung jawabnya. Semoga terbentuk karakter beliau dalam pegawai-pegawai yang lainnya.

8. **Nurrahmah, S.Si., Fachrul Islam, S.Si., Rizal Mansur, S.Si., Lenni Selviani, S.Si., Sutriani, S.Si,. Sutriana Burhan, S.Si., Andi Fitri Ayu, S.Si., Ka' Uppa, Ka' Nanna,** yang senatiasa memberikan hiburan domino dan semangat kepada Penulis. Terkhusus untuk Guru saya **Niken**, yang selalu meluangkan waktu dan memberi penjelasan tambahan terkait dengan tugas akhir Penulis.
9. Keluarga Besar ***Tiens-OneVision***: Bu **Neena,** Ka' **ika,** Bu **Ida,** Pak **Udi',** Pak **Hasibuan Kanata,** Pak **Rizky Kanata,** dll yang banyak memberikan pandangan pentingnya berjiwa besar dan berpikiran positif akan suatu kejadian atau masalah.
10. Kanda-kanda, teman-teman, dan adik-adik **Warga KM FMIPA Unhas.** Terimakasih atas perhatian, dorongan, pengalaman, cerita, dan dukungannya selama ini. Terkhusus buat kanda : **Hasbullah, S.Si, Ahsani Taqwin, Sugiarto Cokrowibowo, S.Si, Ka' Akram,** yang telah banyak menginspirasi Penulis.
11. Saudara-saudari **Ekspansi 2007**: Terimakasih untuk kebersamaannya selama ini. Terkhusus kepada teman-teman yang sementara berjuang dalam penyelesaian tugas akhir: **Purnama Raya Akbar**, **Abd. Rahman Mansyur**, **Herwin Armawan, Rahmansyah, Dian Pratama, Suthawan, Agil Valentino, dan Survinky,** terus semangat. **Satu Hidup Satu Jiwa Satu Raga Untuk HIMATIKA**. Adik-adik **Ekspektasi 2008: Suci, Idrus,**

**Malton, Raja, Alif, dll**. Adik-adik **Ekstrim 2009: Vivi, Tri', Edi, Cia, Dedel, Ica', Jamal, dll** , yang selalu menyemangati Penulis.

12. Saudara-saudari **ToMalolo ToMakappa' SMA Neg.1 Polewali**: **Erna, Ika. R, Ika. C, Vivi, Fahrul, Hendrik, Mahmud, Djenal, Iccank, William, Lutfi, Rahmat, Alim, Ippank, Febrin, Ningsi, Irma. A, Irma. M, Zakia, Fitrah, Mila, Sukma, Uni, Mirna, Ridhal, Ayi', Tia', Rusna, Hasriani, Hikmah.**
13. **Sahabat-sahabatku**: **Surya Dharma Saputra** yang sudah seperti saudara Penulis, yang senantiasa memberikan banyak pelajaran mengenai arti kehidupan. **Muh. Vijay Khan**, teman berbagi cerita yang menginspirasi Penulis. **Ust. Jahid** dan **Ust. Ramli,** yang senantiasa memberikan petuah dan nasihat. **Sukuria Usman, S.ked** dan **Sherly Jayanti, S.Pd**., yang senantiasa memberi masakan terbaik. **Ardillah, S.Pd**., **Zaenal Abdullah**, **Anita Fitri Nugraha**, **Mirna Wati Adam**, **Dewi Sartika** yang senantiasa memberikan hiburan tersendiri serta **Izran Asnawi** dan keluarga.
14. Teman-teman **PT. Trikomsel Tbk(Oke Shop):** ka' **Youli**, Ka' **Ika**, Ka' **Indah**, **Obeth**, **Nani**, Ka' **Tri'**, Ka' **Harny**, **Bang Izmed**, Ka' **Farid**, Ka' **Lukman**, Ka' **Puri**, **Tresya**, Ka' **Irwan**, Pak **Riyadi**, Pak **Rudy Carlay**, Ce' **Henny**.Teman-teman **LG MOBILE MAKASSAR** dan teman-teman promotor **MTC**: **Mr. Kwak**, Ka' **Andi**, Pak **Gunawan**, Pak **Teddy Denial**, Pak **Erick**, Pak **Wahab**, **Witra**, Mbak **Ani**, Mbak **Ana**, **Fandy**, **Amel**, Ka' **Rhiny**, **Rio**, **Abdi**, **Wulan**, Ka' **Tuti**, Ka' **Rara**, **Ve**, **Iphul**, **Tandy**, Ko**Aling**, Ko **Wandi**, Ko **Jhon**, dan seluruh warga MTC lainnya.

Terimakasih banyak atas ilmu dan bantuannya selama Penulis bekerja di LG MOBILE MAKASSAR.

15. Teman-teman**AKPAR Makassar**, **UMI Makassar**, **SMANSA Bulukumba**, **Bank BCA**, **GO JU KAI**, **SLTP NEG. 4 POLEWALI** (**Gusma,Ica’,Masriyani, Suryadi, Kasriadi, Nasra), SDN 033 DARMA**, **PSJ (**Ka’ **Bobi,** Ko **Jhoni, Eva, dll)**, **MAPS Community**, **Corazone BTP (Mala, Nuke’, Eka’)**, serta teman-teman sosialita dan teman-teman dunia maya yang selalu menghibur dengan berbagai cerita, lelucon, dan teka-teki.

Dan kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu, terimakasih atas partisipasinya, semoga ALLAH SWT membalas kebaikan dan memberikan balasan yang setimpal. Amiin.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga sangat diharapkan adanya saran dan kritik yang bersifat membangun sebagai vahan perbaikan di masa yang akan datang.

Akhir kata, semoga tugas akhir ini ada manfaatnya bagi para mahasiswa, khususnya bagi Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Matematika dan bagi Perguruan Tinggi.

وَالسَّلَامُ عَلَيْكُمْ وَرَحْمَةُ اللهِ وَبَرَكَاتُهُ

Makassar, 10 Juni 2013

Penulis

# ABSTRAK

Permainan Wythoff merupakan permainan yang dimainkan oleh dua orang pemain yang secara bergantian memilih sebuah langkah sahih untuk merubah posisi $(x, y) \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ke posisi $(x', y')$. Terdapat barisan $\{(a_n, b_n)\}_{\geq 0}$ yang setiap pasangan $(a_n, b_n)$ dari barisan ini disebut posisi-*P*. Salah satu posisi-*P* adalah (0,0) dan pemain yang mendapat posisi (0, 0) dinyatakan kalah. Setiap posisi-*P* $(a_n, b_n)$ memenuhi sifat: tidak ada pilihan langkah untuk merubah posisi-*P* $(a_n, b_n)$ ke posisi-*P* yang lain. Sebaliknya dengan memilih langkah yang tepat, setiap posisi $(x, y)$ yang bukan posisi-*P* bisa dibawa ke posisi-*P*.

Sesuai dengan cara konstruksinya, ada tiga bentuk posisi-*P* dari permainan Wythoff: sebagai dua barisan Beatty yang saling komplemen yang diperoleh dari rasio mulia, sebagai koordinat titik-titik yang diperoleh dari fungsi Sprague-Grundy dan operator Mex dan sebagai posisi kemunculan ke-*n* dari symbol *a* dan *b* di dalam kata Fibonacci atas alfabet $\{a, b\}$.

**Kata Kunci**: Posisi-*P* permainan Wythoff, rasio mulia, barisan Beatty, operator *Mex*, fungsi Sprague-Grundy, kata Fibonacci.

# ABSTRACT

Wythoff game is played by two players who alternatingly choose a valid step to change the current position $(x, y) \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}$ of the game. There is a sequence $\{(a_n, b_n)\}_{\geq 0}$ in which every pair $(a_n, b_n)$ is called a *P*-position. One of the *P*-position is (0, 0) and any player who gets the position (0, 0) lost the game. Every *P*-position $(a_n, b_n)$ satisfies the following properties: there is no valid step that changes a *P*-position$(a_n, b_n)$ to another *P*-position and conversely from any non *P*-position, there is a smart step that changes the position to a *P*–position.

In accordance with the construction, there are three forms of *P*-positions: as complementary Beatty sequences generated using golden ratio, as coordinate positions obtained from the Sprague-Grundy function equipped with *Mex* operator or as positions of the *n*-th occurrence of *a* and *b* in Fibonacci word over alphabet $\{a, b\}$.



**Key Words**: *P*-positions of Wythoff game, golden ratio, Beatty sequences, *Mex* operator, Sprague-Grundy function, Fibonacci word.

# DAFTAR ISI

# BAB 1

# PENDAHULUAN

## 1. 1 Latar Belakang

Teori permainan kombinatorik (*combinatorial games*) adalah teori yang membahas permainan menang-kalah atau sukses-gagal yang dimainkan oleh dua pemain dengan berbagai aturan. Setiap pemain secara bergantian melakukan langkah-langkah untuk merubah posisi permainan sampai salah satu pemain kalah, yaitu tak bisa melanjutkan dengan satu langkah sah (langkah yang sesuai aturan permainan). Posisi menang atau kalah dapat dirumuskan secara sistematis dengan berbagai manipulasi kombinatorik berdasarkan masukan data yang diberikan atau dipilih pemain-pemainnya.

Salah satu ciri permainan kombinatorik adalah terdapat himpunan posisi-posisi yang masing-masing disebut posisi-*P* (biasa juga disebut dengan posisi aman) sedemikian hingga jika posisi permainan berada pada posisi-*P*, maka pemain yang mengerjakan langkah sebelumnya *(previous move)* bisa memaksakan kemenangan. Posisi yang bukan posisi-*P* disebut posisi-*N* (dari kata *Next*).

Salah satu bentuk permainan kombinatorik yang akan dipaparkan dalam tulisan ini adalah permainan Wythoff (*Wythoff game*), permainan yang solusinya pertama kali diberikan oleh Willem Abraham Wythoff pada tahun 1907. Permainan Wythoff hanya menggunakan dua tumpukan token. Setiap pemain bisa mengambil berapa pun token dari salah satu tumpukan, atau mengambil token dari dua tumpukan sekaligus asalkan banyaknya token yang diambil dari masing-

masing tumpukan adalah sama. Pemain yang terakhir kali mengambil token adalah pemenangnya.

Dengan aturan main ini, penulis berusaha mengkaji strategi atau langkah taktis yang harus dipilih oleh para pemain agar dapat menjadi pemenang dalam permainan ini. Dengan kata lain, mengkaji strategi atau langkah taktis seorang pemain untuk mendapatkan posisi-*P*. Hasil pengkajian akan dibuat dalam bentuk tulisan yang diberi judul:

**"Konstruksi Posisi-*P* dari Permainan Wythoff"**

## 1. 2 Rumusan Masalah

Secara umum masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah mengenai permainan Wythoff dan strategi kemenangannya. Secara spesifik, akan dibahas adalah masalah-masalah berikut:

1. Bagaimana mengkonstruksi posisi-*P* permainan Wythoff?
2. Bagaimana algoritma konstruksi posisi-*P* permainan Wythoff?
3. Bagaimana menyatakan hubungan antara permainan Wythoff dengan beberapa konsep matematika?

## 1. 3 Batasan Masalah

Pembahasan dibatasi mengenai cara bermain dari permainan Wythoff dan penentuan strategi kemenangan. Konstruksi dibatasi hanya dalam tiga cara yaitu konstruksi dengan barisan Beatty, konstruksi dengan operator *Mex* dan fungsi Sprague-Grundy, dan konstruksi dengan kata Fibonacci. Algoritma yang akan dibuat adalah algoritma konstruksi posisi-*P* dengan menggunakan kata Fibonacci.

Walaupun menggunakan kata Fibonacci, tidak ada pembahasan yang mendalam tentang aspek otomata dalam keseluruhan penulisan ini di luar konstruksi kata Fibonacci. Demikian pula ekuivalensi ketiga hasil konstruksi tidak diberikan. Lebih jauh, tulisan ini bersifat studi literatur. Pada intinya hanya membahas aturan permainan dan perumusan posisi-*P*.

## 1. 4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan dari skripsi ini adalah menguraikan konsep permainan Wythoff dan menguraikan strategi atau langkah taktis untuk memenangkan permainan. Selain itu, untuk mengetahui hubungan antara permainan Wythoff dengan beberapa konsep matematika. Lebih lanjut, skripsi ini dibuat untuk memenuhi syarat dalam menyelesaikan studi pada program sarjana matematika.

## 1. 5 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat penulisan skripsi ini sebagai berikut:

1. Dapat menambah pengetahuan tentang permainan Wythoff dan mengetahui strategi untuk memenangkan permainan.
2. Mengetahui beberapa bentuk konstruksi posisi-*P* dari permainan Wythoff.
3. Mengetahui algoritma konstruksi posisi-*P* permainan Wythoff.
4. Mengetahui hubungan antara permainan Wythoff dengan beberapa konsep matematika.

# BAB 2

# TINJAUAN PUSTAKA

## 2. 1 Permainan Kombinatoriks

Walaupun ada sedikit perbedaan antara beberapa definisi permainan kombinatorik, tetapi secara umum disepakati suatu permainan kombinatorik memiliki ciri-ciri seperti berikut [13]:

1. Ada dua orang pemain;
2. Kedua pemain melangkah bergantian;
3. Ada posisi awal yang ditetapkan lebih dulu;
4. Untuk setiap posisi (kecuali posisi kalah) dan untuk setiap pemain, tersedia beberapa pilihan melangkah dan setiap langkah yang dipilih menentukan posisi berikutnya;
5. Jika seorang pemain mendapat posisi yang membuatnya tak bisa melangkah, maka ia dinyatakan dalam posisi kalah;
6. Kedua pemain memiliki informasi lengkap tentang posisi permainan;
7. Tak ada faktor keberuntungan dalam arti, hasil akhir (menang atau kalah) sudah bisa dilakukan dengan memilih langkah-langkah yang tepat;
8. Permainan berakhir dengan banyak langkah berhingga.

**Contoh 2.1**:

Suatu permainan terdiri atas satu tumpukan yang pada awalnya berisi sebanyak $n > 0$ token. Aturan permainannya, setiap pemain secara bergantian hanya bisa mengambil token sebanyak 1, 2, atau 3 token. Pemain yang tidak dapat mengambil token lagi (karena tak ada lagi token ditumpukan) dikatakan kalah.

## 2. 2 Permainan Wythoff

Pada tahun 1907 Dr. Wythoff mempopulerkan permainan yang dikenal dengan nama permainan Wythoff. Permainan inidijelaskandengan kata-kata: *"The game is played by two persons. Two piles of counters are placed on a table, the number of each pile being artbitrary. The players play alternately and either take from one of the piles an arbitrary number of counters or from both piles an equal number. The player who takes the last counter or counters, wins"*. Menurut [2], permainan ini sebelumnya dikenal di Cina sebagai *tsyan-shidzi ("chosing stone"),* tetapi diperkenalkan ulang oleh Dr. Wythoff dengan menerbitkan analisis lengkap secara matematis dari permainan ini pada tahun 1907.

Permainan Wythoff menggunakan dua tumpukan atau wadah, dapat berupa dua keranjang berisi bola atau dua tongkat tegak yang dikalungi gelang-gelang logam atau bentuk-bentuk yang lain di mana setiap pemain pada gilirannya mengikuti aturan sebagai berikut [1]:

- Terdapat dua pemain yang bermain secara bergantian;
- Setiap pemain bisa mengambil satu token atau lebih;
- Setiap pemain bisa mengambil token dari satu tumpukan dalam jumlah sembarang;
- Setiap pemain bisa mengambil token dari kedua tumpukan, asalkan banyaknya token yang diambil dari masing-masing tumpukan adalah sama;

- Pemain yang mengambil token terakhir adalah pemenangnya.

Aturan permainan yang cukup unik memaksa para pemain untuk memiliki strategi atau langkah taktis dalam mengurangi atau mengambil token dari masing-masing tumpukan agar dapat menjadi pemenang dalam artian menjadi pemain yang terakhir kali dapat mengambil token.

Posisi atau keadaan permainan Wythoff dengan token sebanyak $x$ di tumpukan 1 dan token sebanyak $y$ di tumpukan 2 digambarkan sebagai pasangan $(x, y)$. Jadi seorang pemain kalah jika tidak ada lagi token yang bisa diambil dari kedua tumpukan, yaitu ketika pemain berada pada posisi (0, 0).

Dalam permainan Wythoff terdapat himpunan posisi-posisi yang membuat salah satu pemain bisa memenangkan permainan. Posisi-posisi tersebut dikenal dengan istilah posisi-*P* (dari kata *previous*, sesuai penjelasan paragraf mendatang). Posisi yang bukan posisi-*P* disebut posisi-*N* (dari kata *next*).

Secara umum, himpunan posisi-*P* didefinisikan sedemikian hingga jika posisi permainan berada pada salah satu posisi-*P*, maka posisi ini dihasilkan oleh pemain yang mengerjakan langkah sebelumnya (*previous move*) dan pemain ini selalu bisa memaksa lawan untuk selalu mendapat posisi-*P* sebelum melangkah dan sebaliknya pemain yang akan melakukan langkah berikutnya *(next move)* setelah mendapat posisi-*P* tidak dapat merubah posisi-*P* tersebut ke posisi-*P* yang lain, apa pun langkah sah (langkah sesuai aturan) yang dipilih.

Salah satu posisi-*P* adalah posisi-*P* mati, di mana pemain yang mendapat giliran melangkah setelah posisi-*P* mati ini tidak bisa lagi melangkah apa pun dan harus menyerah kalah [4]. Dalam permainan Wythoff, posisi (0, 0) adalah posisi-

*P* mati. Suatu permainan kombinatorik dikatakan bisa terselesaikan *(solved)* jika semua posisi-*P* dari permainan bisa diperoleh.

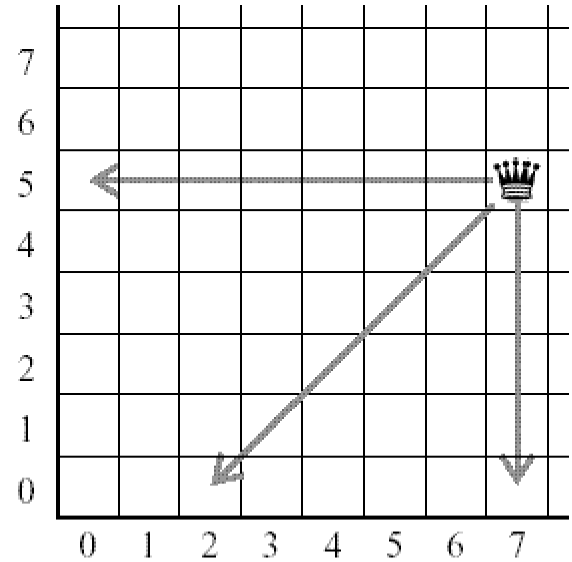
Dengan mengetahui posisi-posisi-*P* tersebut, salah satu pemain dapat memaksakan kemenangannya. Strategi inilah yang dapat digunakan para pemain untuk menyelesaikan dan mengetahui langkah apa saja yang harus dilakukan sehingga para pemain dapat memenangkan permainan ini.

## 2. 3 Permainan Gerakan Ratu (*Queen's Move*)

Rufus P. Isaacs, seorang ahli matematika dari Johns Hopkins University, menciptakan deskripsi lain dari permainan yang sama [2]. Permainan ini dikenal dengan nama *Queen's Move* yang dipopulerkan oleh Isaacs pada tahun 1960, hampir setengah abad setelah Wythoff melakukan analisis permainan.

Tanpa menyadari ekuivalensi permainan yang diciptakannya dengan permainan Wythoff, Isaacs menggambarkan sebuah permainan berdasarkan gerakan yang mirip dengan gerakan sah dari Ratu (*Queen*) permainan catur, yaitu hanya bergerak secara vertikal ke selatan, secara horizontal ke barat atau secara diagonal ke arah barat daya pada papan catur (lihat Gambar **2.1**).

Dalam permainan ini Ratu pada awalnya ditempatkan pada sembarang posisi $(s, t) \neq (0, 0)$, bisa dikolom sebelah kanan ataudi baris bagian atas papan catur atau pada diagonal. Dengan batasan aturan gerak Ratu seperti di atas, pemain yang dapat menempatkan Ratu kesudut paling kiri paling bawah adalah pemenangnya.




**Gambar 2.1** Arah Gerakan Ratu yang sah

Kesamaan antara permainan Wythoff dan *Queen's Move* sudah jelas. Permainan ini secara matematis ekuivalen meskipun konteksnya berbeda. Setiap sel dapat diberi pasangan koordinat ($x$, $y$). Pasangan inisesuai dengan jumlah token $x$ ditumpukan pertama dan jumlah token $y$ di tumpukan kedua dari permainan yang dianalisis oleh Wythoff. Ketika Ratu bergerak mendatar ke arah barat melewati $x$ kotak, gerakan ini sesuai dengan pengurangan sebanyak $x$ token pada tumpukan 1. Ketika Ratu bergerak vertikal ke arah selatan melewati $y$ kotak, gerakan ini sesuai dengan pengurangan sebanyak $y$ token pada tumpukan 2, ketika Ratu bisa dipindahkan ke sel (0, 0), gerakan ini sesuai dengan gerakan menghabiskan token pada kedua tumpukan permainan Wythoff, dan seterusnya.

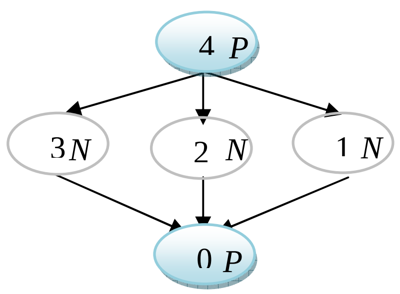
Jika tumpukan awal bersesuaian dengan posisi-*P*, pemain2 bisa memaksakan kemenangan. Pemain1 bisa dipaksa tidak punya pilihan selain selalu mendapatkan posisi-*P* sebelum melangkah. Jika permainan dimulai dari posisi-*N*, pemain 1 bisa selalu memaksakan kemenangan dengan mengurangi tumpukan sedemikian sehingga posisi berubah ke posisi-*P*.

### Error! Unknown switch argument.. 4 Ilustrasi Beberapa Posisi-*P* dan Posisi-*N*

Strategi kemenangan permainan kombinatorial dalam Contoh **2.1** bisa digambarkan sebagai berikut. Sesuai aturan pemain, jumlah token yang dapat diambil atau dikurangi oleh setiap pemain adalah 1, 2 atau 3 token. Posisi permainan dinyatakan oleh suatu bilangan bulat. Menentukan semua posisi-*P* permainan ini sangat mudah.

Jelas 0 adalah sebuah posisi-*P*. Posisi-*P* sebelum 0 adalah bilangan bulat 4, sebab pada posisi 4, langkah lanjutan apa pun yang dilakukan pemain tak bisa membawa permainan ke 0. Dengan alasan yang sama, posisi-*P* sebelum 4 adalah 8, 12, 16, ... dan seterusnya.

Jika posisi permainan atau banyaknya token dimulai dari sebuah posisi-*P*, misalnya 4, maka pemain 1 yang memilih langkah lanjutan akan kalah sebab hanya ada tiga kemungkinan posisi berikutnya: 1, 2, atau 3. Dengan mengambil semua token yang tersisa (1, 2 atau 3 token), pemain 2 menang..

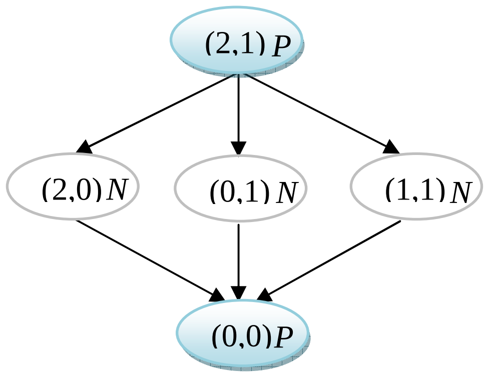



**Gambar 2. 2** Dengan posisi awal 4, pemain yang melangkah pertama akan kalah

Jadi dengan aturan permainan tersebut, posisi-*P* permainan adalah bilangan-bilangan kelipatan 4.

Berikut gambaran sederhana untuk memahami posisi-*P* pada permainan Wythoff. Di sini (0, 0) adalah sebuah posisi-*P*.

- Posisi Awal (2, 1)

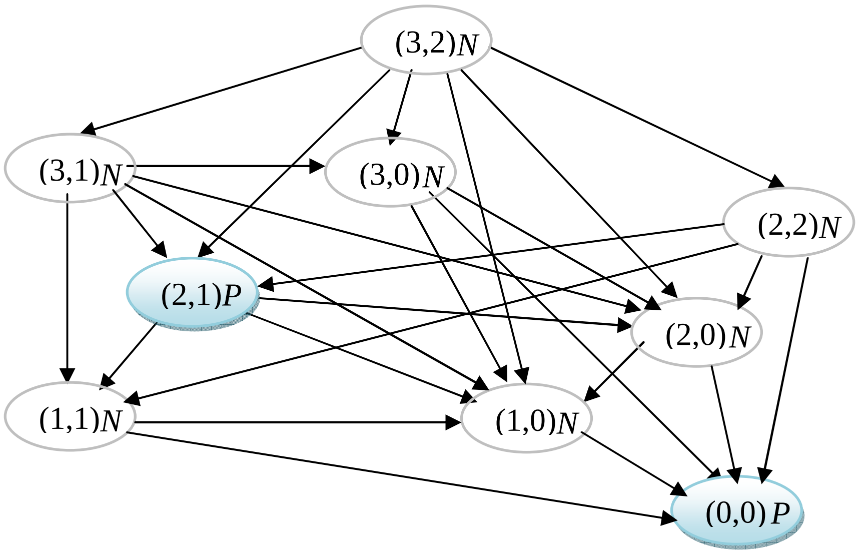



**Gambar 2. 3** Permainan Wythoff dengan posisi awal (2,1), pemain yang melangkah pertama akan kalah

Berdasarkan aturan pemain Wythoff (lihat Gambar 2.3), bahwa dari posisi (2, 1), hanya ada tiga kemungkinan posisi selanjutnya: (2, 0), (0, 1) atau (1, 1). Pemain 2 jelas memenangkan pertandingan karena sesuai aturan permainan, ia bisa menghabiskan semua token. Ini membuktikan bahwa (2, 1) adalah sebuah posisi-*P* untuk permainan Wythoff. Demikian pula, (1, 2) adalah sebuah posisi-*P* untuk permainan Wythoff.

- Poisisi Awal (3, 2)

Sesuai aturan permainan Wythoff, ada banyak pilihan untuk melangkah bagi pemain pertama, salah satu pilihan bisa menghasilkan posisi (2, 1), yaitu sebuah posisi-$P$. Sebagai akibatnya, (3, 2) bukan posisi-$P$, tetapi sebuah posisi-$N$.




**Gambar 2. 4** Permainan Wythoff dengan posisi awal (3, 2), pemain yang melangkah pertama bisa memaksakan kemenangan.

Dengan alasan yang sama, (2, 3) adalah sebuah posisi-$N$ dari permainan Wythoff.

## 2. 5 Barisan Bilangan Fibonacci

Barisan Fibonacci yang dilambangkan dengan $\{F_n\}$ di awali oleh suku

$$F_0 = 0, \;\; F_1 = 1$$

dan untuk $n = 2, 3, 4, \ldots$ , nilai $F_n$ diperoleh dari relasi rekurensi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) disebut relasi rekurensi linear homogin order 2.

Perbandingan (rasio) bilangan Fibonacci yang ke-($n$+1) dengan bilangan Fibonacci ke-$n$ untuk $n \geq 1$ menghasilkan barisan

1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, … dst

yang konvergen kebilangan

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

atau dalam notasi desimal $\varphi$ = 1.618033988749894…, yang disebut rasio mulia (*golden ratio*). Pembuktiannya dapat dilihat pada berbagai buku teks dan situs internet, misalnya pada [15].

Selain bisa diturunkan secara rekursif, suku ke-*n* barisan Fibonacci bisa diperoleh secara langsung. Pada tahun 1843, Jacques Philippe Marie Binet menemukan rumus langsung menghitung suku ke-*n* dari barisan Fibonacci dengan menggunakan rasio mulia.

**Teorema 2.1 (Rumus Binet)**

*Jika $F_n$ adalah suku ke-n dari barisan Fibonacci dan $\varphi$ adalah rasio mulia, maka*

$$(F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (\frac{-1}{\varphi})^n) \tag{2.2}$$

*untuk n* = 1, 2, 3, ..., *dst.*

Persamaan (2.2) dikenal dengan nama rumus Binet.

Jika pasangan nilai awal ($F_0$, $F_1$) = (0, 1) diganti dengan (1, 0) atau (1, 1) atau (1, 2) maka barisan yang dihasilkan kembali ke bentuk barisan Fibonacci yang diperluas atau yang diperpendek. Tetapi jika pasangan nilai awalnya diganti (2, 1), terbentuk barisan baru $\{L_n\}$ yang disebut barisan Lucas:

$$\{L_n\}_{n\geq 0} = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, ...$$

yang dipergunakan oleh Hoggat untuk memperumum permainan Wythoff.

Seperti halnya barisan Fibonacci, bisa dibuktikan bahwa perbandingan (rasio) bilangan ke-($n$ + 1) dengan bilangan ke-$n$ dari barisan Lucas

1/2, 3/1, 4/3, 7/4, 11/7, 18/11, 29/18, ...

Juga konvergen ke rasio mulia $\varphi$.

Dalam konteks permainan kombinatorik, fokus utama penulisan tugas akhir ini adalah mencari nilai barisan pasangan $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ yang merupakan barisan posisi-$P$ dari permainan Wythoff. Selain bisa diperoleh dengan dari rasio mulia $\varphi$, barisan ini bisa juga diperoleh dengan menggunakan fungsi Sprague-Grundy atau menggunakan kata Fibonacci.

Algoritma konstruksi posisi-$P$ yang akan dibahas di sini adalah algoritma konstruksi barisan $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ yang diturunkan dari kata Fibonacci. Berikut dibahas konsep kata Fibonacci.

## 2. 6 Kata Fibonacci

Kata Fibonacci adalah sebuah untaian (*string*) tak hingga **s** atas alphabet $\sum=\{a, b\}$ yang didefinisikan oleh morfisma $\sigma:\sum^*\rightarrow \sum^*$ dimana $\sum^*$ merupakan himpunan semua kata hingga atas alphabet $\sum$. Morfisma $\sigma$ memenuhi sifat: $\sigma(a)=ab$, $\sigma(b)=a$, dan untuk setiap untaian $\mathbf{s}=s_1s_2\ldots s_n\in\sum^*$ yang panjangnya $n$ berlaku sifat morfik: $\sigma(\mathbf{s}) = \sigma(s_1)\,\sigma(s_2)\,\ldots\,\sigma(s_n)$.

Dengan kesepakatan notasi $\sigma^0 = id$ (yaitu $\sigma^0$ adalah fungsi identitas) dan notasi baku komposisi fungsi: untuk setiap $k$ = 1, 2, 3, …,$\sigma^k(\sigma^{k-1})$; kata (tak hingga) Fibonacci ***s*** didefinisikan sebagai limit

$$\mathbf{s} = \lim_{k\to\infty}\sigma^k(a)\,. \tag{2.3}$$

Secara komputasi, kata Fibonacci **s** bisa didekati oleh untaian-untaian hingga berikut yang diperoleh dari iterasi $\sigma$ pada $a$ sebanyak $k$ = 1, 2, 3, … dan seterusnya: $\sigma^0(a) = a$, $\sigma(a) = ab$, $\sigma^2(a) = aba$, $\sigma^3(a) = abaab$, … , $\sigma^{10}(a)$ = *abaababaabaababaababaabaababaabaababaababaabaababaababaabaababaaba ababaababaabaababaabaababaababaabaababaababaabaababaabaababaababaa baababaababa*, … dan seterusnya.

Untuk setiap $k > 2$, berlaku

$$\sigma^k(a) = \sigma^{k-1}(a)\,\sigma^{k-2}(a). \tag{2.4}$$

## 2. 7 Barisan Beatty

Misalkan lambang $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $x$ (pembulatan ke bawah terhadap $x$). Barisan Beatty untuk bilangan tak rasional $a > 1$ adalah barisan $\{\lfloor na \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ [6], yaitu barisan

$$\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor, \ldots.$$

**Teorema 2.2 (Beatty)**

*Jika a dan b adalah bilangan tak rasional yang memenuhi* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, *maka kedua barisan* $\{\lfloor na \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ *dan* $\{\lfloor nb \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ *saling lepas dan hasil gabungannya adalah himpunan semua bilangan asli.*

Kedua barisan tersebut dalam teorema di atas disebut dua barisan Beatty yang saling komplemen.

**Contoh 2.2**:

Dengan memilih $a$ = $\sqrt{2}$ diperoleh $b$ = 2 + $\sqrt{2}$. Barisan $\{\lfloor na \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ atau $\{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ adalah

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, ...$$

sedangkan barisan komplemennya $\{\lfloor nb \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ atau $\{\lfloor n(2+\sqrt{2}) \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ adalah

$$3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, 37, 40, 44, 47, 51, 54, 58, ...$$

## 2. 8 Operator Mex dan Fungsi Sprague-Grundy

Misalkan **O** = {0, 1, 2, …} adalah himpunan bilangan-bilangan cacah. Operator *Mex* (*Minimum excluded*) didefinisikan sebagai berikut [4].

**Definisi**

*Untuk setiap himpunan* **A** $\subseteq$ **O** *dari bilangan-bilangan cacah didefinisikan*

*Mex* {**A**} = min (**O - A**)

Definisi Mex bisa dikenakan pada barisan $\{a_n\}$ dengan mengadopsi

**A=** $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$

dalam definisi di atas.

**Contoh 2.3:**

Jika diberikan dua barisan hingga $\{a_i\}$ = 1, 5, 4, 2, 0 dan $\{b_i\}$ = 1, 11, 6, 4, 5, 3, 0, 2 maka masing-masing barisan memberikan himpunan **A =** {0, 1, 2, 4, 5} dan himpunan **B =** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 11} sehingga

*Mex* ($\{a_i\}$) = min (**O – A)**

$= \min (\mathbf{O} - \{0, 1, 2, 4, 5\})$

$= \min (\{3, 6, 7, \ldots\}) = 3.$

$Mex\ (\{b_i\}) \quad = \min (\mathbf{O} - \mathbf{B})$

$= \min (\mathbf{O} - \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11\})$

$= \min (\{7, 8, 9, 10, 12, 13, \ldots\}) = 7.$

Fungsi Sprague-Grundy $Sp(s, t)$ didefinisikan secara rekursif dengan nilai awal $Sp(0, 0) = 0$ dan tiga himpunan awal $G_1(0, 0) = G_2(0, 0) = G_3(0, 0) = \{0\}$. Jika $s < 0$ atau $t < 0$, didefinisikan $G_1(s, t) = G_2(s, t) = G_3(s, t) = \varnothing$. Selanjutnya, untuk setiap pasang bilangan bulat $(s, t) \neq (0, 0)$ berlaku

$$Sp(s, t) = Mex\ (\{G_1(s-1, t) \cup G_2(s-1, t-1) \cup G_3(s, t-1)\}$$

di mana

$$G_1(s, t) = \bigcup_{0 \le x \le s} \{Sp(x, t)\}.$$

$$G_2(s, t) = \bigcup_{\substack{0 < s-x = t-y \\ \le \min(s,t)}} \{Sp(x, y)\}.$$

$$G_3(s, t) = \bigcup_{0 \le y \le t} \{Sp(s, y)\}.$$

Dengan kata lain,

$G_1(s, t) = \{Sp(0, t), Sp(1, t), \ldots, Sp(s-1, t)\}$,

$G_2(s, t) = \{Sp(s - \min\{s, t\}, t - \min\{s, t\}), \ldots, Sp(s-2, t-2), Sp\ (s-1, t-1)\}$

$G_3(s, t) = \{Sp(s, 0), Sp(s,1), \ldots, Sp\ (s, t-1)\}$

Dari $Sp(0, 0) = 0$, diturunkan $Sp(0, 1) = 1 = Sp(1, 0)$, $Sp(1, 1) = 2$, dst.

**Contoh 2.4**:

Jika $(s, t) = (4, 2)$ maka nilai-nilai $Sp(0, 2)$, $Sp(1, 2)$, $Sp(4, 0)$, $Sp(4, 1)$, $Sp(4, 2)$, $Sp(4, 3)$, $Sp(2, 0)$, $Sp(3, 1)$ telah dihitung lebih dulu dan digunakan untuk menentukan $G_1(4, 2) = \{0, 1, 2, 5\}$, $G_2(4, 2) = \{2, 3, 4\}$, $G_3(4, 2) = \{4, 5\}$ (lihat gambar 2.5)

sehingga

$$G_1(4, 2) \cup G_2(4, 2) \cup G_3(4, 2) = \{0, 1, 2, 4, 5\}$$

dan

$$Sp(4, 2) = Mex\,(\{0, 1, 2, 4, 5\}) = 3.$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | 5 | 3 | 4 | 0 | 6 | 8 |
| **4** | 4 | 5 | 3 | 2 | 7 | 6 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 2 | 0 |
| **2** | 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 |
| **1** | 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 |
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **6** |

**Gambar 2.5** Nilai fungsi $G(4, 2)$ ditentukan oleh nilai-nilai $G(s, t)$ pada posisi sesuai gerakan ratu.

Dengan hanya mengambil titik-titik koordinat $(x, y)$ dengan $x < y$ (sebelah kiri diagonal) yang fungsi Sprague-Grundynya bernilai 0, diperoleh barisan titik-titik koordinat

$$(0, 0), (1, 2), (3, 5), \ldots, \text{dan seterusnya.}$$

## 2. 9 Contoh Generalisasi Permainan Wythoff

Didefinisikan sebuah pemainan yang disebut $k$-Wythoff dengan aturan permainan sebagai berikut [1]:

- Terdapat dua pemain yang bermain secara bergantian;
- Terdapat dua tumpukan token dengan banyaknya token dari masing-masing tumpukan adalah sembarang;
- Setiap pemain bisa mengambil token dari kedua tumpukan dengan jumlah yang sama atau mengambil dari satu tumpukan dengan jumlahnya adalah kelipatan dari $k$ tetapi pemain harus mengambil minimal $k$ token;
- Pemain yang tidak bisa mengambil token berdasarkan tiga aturan sebelumnya dinyatakan kalah.

Permainan Wythoff yang asli bersesuaian dengan $k = 1$. Dengan aturan permainan yang lebih umum ini para pemain dipaksa untuk memilik strategi atau langkah taktis tergantung dari nilai $k$ yang diberikan.Jadi untuk bentuk generalisasi ini, para pemain memiliki strategi yang berbeda dengan permainan Wythoff sebelumnya.