

*Skripsi*

**PEMODELAN DUA DIMENSI DATA *DIRECT CURRENT RESISTIVITY*  
(DCR) KONFIGURASI *WENNER-SCHLUMBERGER*  
MENGUNAKAN INVERSI *LEAST SQUARE***



**OLEH:**

**OLANDIANI PASA'BI  
H221 16 520**

**DEPARTEMEN GEOFISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR**

**2021**

*Skripsi*

**PEMODELAN DUA DIMENSI DATA *DIRECT CURRENT RESISTIVITY*  
(DCR) KONFIGURASI *WENNER-SCHLUMBERGER*  
MENGUNAKAN INVERSI *LEAST SQUARE***

**Disusun dan Diajukan Oleh:**

**OLANDIANI PASA'BI  
H221 16 520**

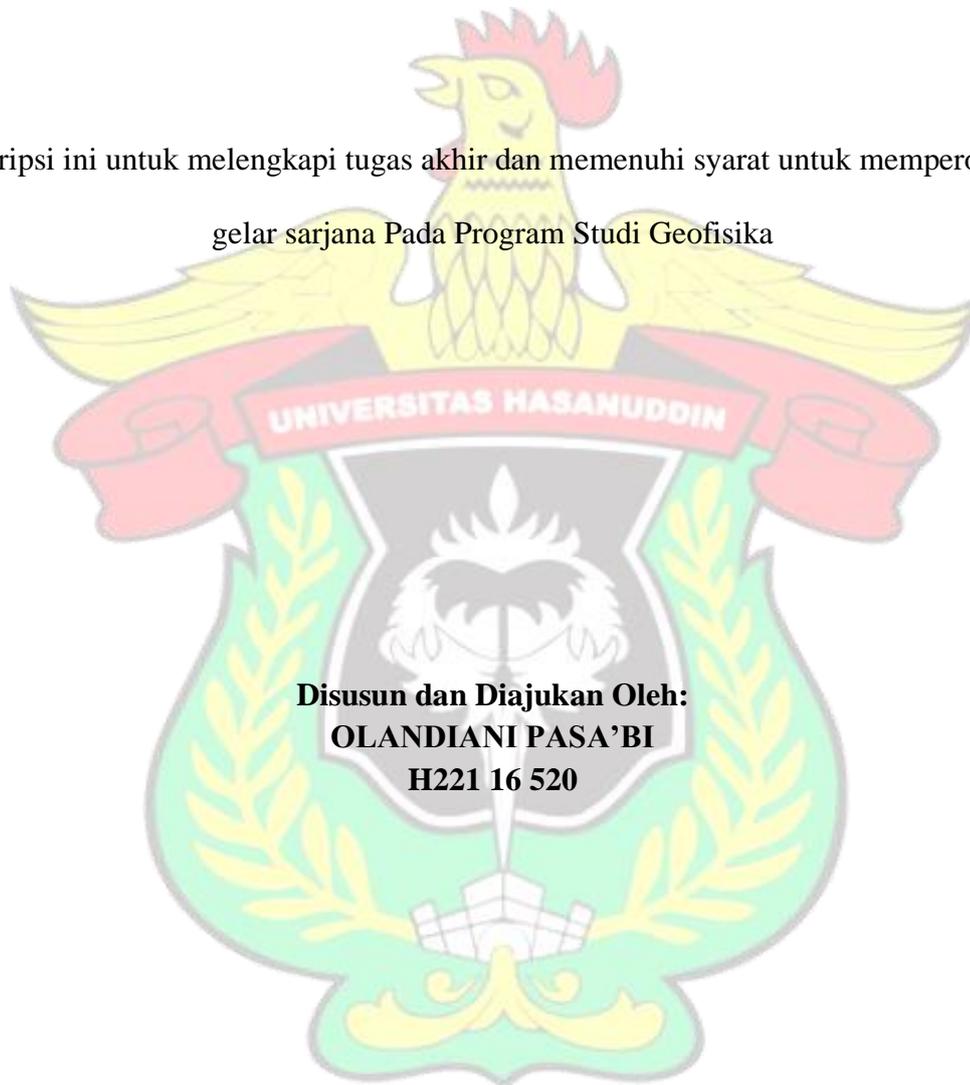


**DEPARTEMEN GEOFISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR**

**2021**

**PEMODELAN DUA DIMENSI DATA *DIRECT CURRENT RESISTIVITY*  
(DCR) KONFIGURASI *WENNER-SCHLUMBERGER*  
MENGUNAKAN INVERSI *LEAST SQUARE***

Skripsi ini untuk melengkapi tugas akhir dan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar sarjana Pada Program Studi Geofisika



**Disusun dan Diajukan Oleh:  
OLANDIANI PASA'BI  
H221 16 520**

**DEPARTEMEN GEOFISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR**

**2021**

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**PEMODELAN DUA DIMENSI DATA *DIRECT CURRENT*  
*RESISTIVITY* (DCR) KONFIGURASI *WENNER-SCHLUMBERGER*  
MENGUNAKAN INVERSI *LEAST SQUARE***

**OLEH :**

**OLANDIANI PASA'BI**

**H221 16 520**

**SKRIPSI**

**Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Ujian Guna Memperoleh Gelar Sarjana  
Sains Program Pendidikan Sarjana, Departemen Geofisika Telah Disetujui  
Oleh Tim Pembimbing Pada Tanggal Seperti Tertera Dibawah Ini**

**Disetujui Oleh:**

**Makassar, 7 Agustus 2021**

**Pembimbing Utama**

**Pembimbing Pertama**

  
**Syamsuddin, S.Si, M.T**  
**NIP. 19741152002121001**

  
**Dr. Erfan Syamsuddin, M.Si**  
**NIP. 196709032001121001**

**Mengetahui,  
Ketua Departemen Geofisika**

  
**Dr. Muhammad Alimuddin Hamzah, M.Eng**  
**NIP. 196709291993031003**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Olandiani Pasa'bi  
Nim : H221 16 520  
Departemen : Geofisika  
Judul Tugas Akhir : *Pemodelan Dua Dimensi Data Direct Current Resistivity (DCR) Konfigurasi Wenner-Schlumberger Menggunakan Inversi Least Square*

Menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar hasil karya sendiri dan belum pernah diajukan untuk mendapatkan gelar sarjana di Universitas Hasanuddin atau Lembaga penelitian lain, kecuali kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang sudah lazim digunakan. Karya tulis ini merupakan murni dari gagasan dan penelitian saya sendiri, kecuali arahan tim pembimbing dan masukan Tim penguji.

Makassar, 17 Agustus 2021

embuat pernyataan,



**OLANDIANI PASA'BI**

## ABSTRAK

Telah dilakukan penelitian mengenai pemodelan dua dimensi data *Direct Current Resistivity* (DCR) konfigurasi *Wenner-Schlumberger* menggunakan Inversi *Least-Square*. Penelitian ini bertujuan untuk menelusuri persamaan-persamaan yang termuat dalam program *Elris2D* untuk mengetahui proses inversi data Geolistrik menghasilkan model dua dimensi serta membandingkan hasil model yang diperoleh dari uji inversi data. Penelusuran persamaan dilakukan dengan melakukan investigasi hubungan antara persamaan-persamaan sehingga Langkah-langkah proses inversi data dapat diketahui. Untuk mengetahui keakuratan program dalam menghasilkan model, dilakukan perbandingan model yang dihasilkan program *Elris2D* dengan model yang dihasilkan oleh software inversi *Res2DInv*. Hasil penelusuran memperoleh penggunaan persamaan *inversi smooth constrain least-square* untuk mendapatkan hasil model yang halus, diinterpretasikan dalam model blok, dan hasil perbandingan model yang tidak memiliki perbedaan yang cukup signifikan

**Kata Kunci :** *Direct Current Resistivity, Wenner-schlumberger, Elris2D, Smooth Constrain Least-Square*

## **ABSTRACT**

Research has been carried out on two-dimensional modeling of Direct Current Resistivity (DCR) data with Wenner-Schlumberger configuration using Least-Square Inversion. This study aims to explore the equations contained in the Elris2D program to determine the Geoelectric data inversion process to produce a two-dimensional model and compare the model results obtained from the data inversion test. Equation search is done by investigating the relationship between the equations so that the steps of the data inversion process can be known. To determine the accuracy of the program in producing the model, a comparison of the model generated by the Elris2D program with the model generated by the Res2DInv inversion software was carried out. The search results obtained the use of the smooth constraint least-square inversion equation to obtain smooth model results, interpreted in the block model, and the results of model comparisons that did not have a significant difference.

**Keywords** : Direct Current Resistivity, Wenner-schlumberger, Elris2D, Smooth Constrain Least-Square

## KATA PENGANTAR

Segala puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Kuasa atas setiap kasih dan pertolongan-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul *Pemodelan Dua Dimensi Data Direct Current Resistivity (DCR) Konfigurasi Wenner-Schlumberger Menggunakan Persamaan Least Square*, sebagai salah satu syarat kelulusan untuk memperoleh gelar sarjana. Penulis sangat bersyukur karena dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini meskipun dalam menyelesaikannya penulis mengalami berbagai kesulitan dan hambatan, namun dengan segala bentuk dukungan doa, bimbingan, nasehat dan kerja sama berbagai pihak sehingga masalah tersebut dapat diatasi.

Untuk mensyukuri atas tercapainya cita-cita dalam penyusunan skripsi ini, penulis berterimakasih dengan segala hormat terkhusus kepada kedua orang tua yakni, **Ayahanda Marthen Pasa'bi** dan **Ibunda Ani Nake** sebab dari setiap doa yang di panjatkan kepada Tuhan, kerja keras dalam membimbing dan mengarahkan penulis sehingga dapat menyelesaikan Pendidikan di perguruan tinggi Strata satu.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis juga tak lupa mengucapkan terimakasih kepada setiap pihak yang terlibat dalam membantu penyelesaian skripsi ini. Dengan segala hormat dan tulus hati mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak **Syamsuddin, S.Si, MT** selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Erfan Syamsuddin, M.Si** selaku pembimbing pertama yang telah bersedia meluangkan waktunya dan membantu untuk membimbing dan mengarahkan penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.

2. Bapak **Dr. Eng.Muh. Alimuddin Hamzah, M.Eng** Ketua Departemen Geofisika Unhas dan Ketua Laboratorium Geofisika Padat **Dr. Muhammad Hamzah, S.Si, MT** selaku tim penguji yang telah memberikan saran, kritik, masukan yang bersifat membangun kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
3. Rektor Universitas Hasanuddin, Ibu Prof.**Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, MA.**, beserta seluruh staf yang bertugas di rektorat.
4. Bapak **Dr. Eng Amiruddin, S.Si., M.Si** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.
5. Seluruh Dosen, Staf Departemen Geofisika, Staf Laboratorium, serta Staf Perpustakaan FMIPA UNHAS atas semua ilmu yang telah diajarkan dan pelayanan yang telah diberikan, serta bantuannya kepada penulis.
6. Teman-Teman **HIMAFI X HMGF 2016, 16NEOUS dan PEJANTAN MIPA** yang selalu kebersamai untuk menghadapi masa-masa kuliah mulai dari diterimanya di universitas sampai penyelesaian tugas akhir ini, Terkhusus kepada **Aushaf, Ayyub, Mufli, Ulla, Aso, indra, agung, iksan, Winda, Union, Wiwi, Cinang, Mabu, dan Areif.**
7. Kakak-kakak dan Adik-adik **KPA OMEGA HIMAFI UH.** Terima kasih atas semua ilmu, kebersamaan pengalaman yang mengajarkan bagaimana arti manusia dengan ALAM semesta dan cara menikmati ciptaan tuhan dari sudut pandang yang berbeda. **SALAM LESTARI**
8. Kakak-kakak dan Adik-adik **HIMAFI FMIPA UNHAS.** Terima kasih atas ilmunya, kekeluargaan dan kepercayaan selama berorganisasi, **TETAPLAH MEMBIRU, “JAYALAH HIMAFI FISIKA NAN JAYA”.**

9. Kakak-kakak dan Adik-adik **HMGF FMIPA UNHAS**. Terima kasih atas ilmunya, kekeluargaan dan kepercayaan selama berorganisasi,
10. Kakak-kakak, Teman-teman, dan adik-adik di **GMKI Komisariat FMIPA Unhas** yang selalu mengingatkan untuk menyelesaikan tanggung jawab di kampus terkhusus kepada **Nitus dan Dewa** sebagai teman berbagi cerita, **Rael, Restu, Hana, Oxana, dan Uni** sebagai garda terdepan sebagai adik-adik yang selalu mengingatkan penulis untuk segera menyelesaikan studinya
11. Teman-teman Generasi Andalan **SMA KRISTEN RANTEPAO** yang selalu memberi kabar untuk menyelesaikan studi dengan baik
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah memberikan kontribusi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Semoga karya tulis ini dapat bermanfaat bagi penulis dan para pembacanya, terutama berkaitan dengan Geolistrik. Akhir kata, penulis mengucapkan terima kasih banyak kepada semua pihak yang telah membantu dan semoga Tuhan Yesus memberi berkat dan karunia-Nya dalam setiap kebaikan kita semua.

Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pihak-pihak yang membutuhkan dan dapat digunakan sebagaimana mestinya. Mengingat keterbatasan penulis sebagai manusia biasa, kritik dan saran akan sangat membantu untuk mengembangkan kemampuan penulis dalam menyusun penelitian lainnya dikemudian hari.

Makassar, 17 Agustus 2021

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	ii
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iv
<b>PERNYATAAN KEASLIAN</b> .....	v
<b>ABSTRACT</b> .....	vi
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	x
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
I.1 Latar Belakang .....	1
I.2 Ruang Lingkup .....	3
I.3 Rumusan Masalah .....	3
I.4 Tujuan Penelitian .....	4
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
II.1 Teori Dasar Geolistrik .....	5
II.2 Metode Geolistrik Tahanan Jenis ( <i>Resistivity</i> ) .....	5
II.2.1 Potensial Listrik Pada Bumi Homogen Isotropis .....	7
II.2.2 Potensial Disekitar Elektroda Berarus Tunggal di Bawah Permukaan Bumi .....	8
	xi

II.2.3 Potensial Disekitar Elektroda Berarus Tunggal di Permukaan Bumi	10
II.2.4 Potensial Dua Elektroda Berarus dan Dua Elektroda Potensial di Permukaan Bumi .....	11
II.2.5 Faktor Geometri .....	12
II.3 Transformasi Persamaan Geolistrik Dua Dimensi.....	13
II.4 <i>Finite-Diference Methods dan Finite-Element Methods</i> .....	14
II.5 <i>Forward Modelling</i> .....	15
II.6 Inversi Kuadrat Terkecil ( <i>Least Square</i> ).....	17
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b>	
III.1 Metode Pendekatan dan Jenis Data .....	22
III.2 Pengolahan Data .....	22
III.2.1 <i>Forward Modelling</i> .....	22
III.2.2 <i>Inverse Modelling</i> .....	23
III.3 Bagan Alir Penelitian.....	25
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
IV.1 Hasil.....	26
IV.1.1 Kalkulasi <i>Forward</i> .....	28
IV.1.2 Kalkulasi <i>Inversi</i> .....	34
IV.1.3 Perbandingan Hasil Model Program <i>Elris2D</i> dan Software <i>Res2DInv</i> .....	38
IV.2 Pembahasan .....	41
<b>BAB V PENUTUP</b>	
V.1 Kesimpulan .....	42
V.2 Saran .....	42
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	43

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b> Sumber Arus Tunggal di dalam Permukaan Medium Homogen Isotropik .....	8
<b>Gambar 2.2</b> Sumber Arus Tunggal di Permukaan Medium Homogen Isotropik	10
<b>Gambar 2.3</b> satu pasang elektroda sumber arus (titik $C_1$ dan $C_2$ ) dan satu pasang elektroda beda potensial (titik $P_1$ dan $P_2$ ) di permukaan medium homogen isotropik.....	11
<b>Gambar 2.4</b> a) Proses <i>forward modeling</i> untuk menghitung respons (data teoritik atau data perhitungan) dari suatu model tertentu. b) Teknik pemodelan dengan cara mencoba-coba dan memodifikasi parameter model hingga diperoleh kecocokan antara data perhitungan dan data lapangan. ....	16
<b>Gambar 4.1</b> Model <i>Mesh</i> yang digunakan oleh Program <i>Elris2D</i> .....	29
<b>Gambar 4.2</b> Perbandingan Model Inversi Spasi Elektroda 1 meter .....	39
<b>Gambar 4.3</b> Perbandingan Model Inversi Spasi 0,5 meter .....	40

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 4.1</b> Data Perbandingan Hasil Inversi <i>Elris2D</i> dan <i>Res2DInv</i> .....	41
---	----

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **I.1 Latar Belakang**

Geofisika sebagai bagian dari ilmu bumi yang mempelajari bumi menggunakan prinsip-prinsip fisika, memiliki tiga tahapan utama untuk mengkarakterisasi suatu kondisi geologi bawah permukaan. Tahapan tersebut meliputi akuisisi data, pengolahan data, dan interpretasi data. Akuisisi data geofisika dapat dilakukan menggunakan metode geolistrik, metode tersebut merupakan salah satu bagian dari metode geofisika yang paling umum digunakan untuk mengetahui kondisi lapisan bawah permukaan.

Metode geolistrik adalah bagian dari ilmu geofisika yang memanfaatkan penjalaran arus listrik untuk mengetahui sifat-sifat listrik batuan. Sifat-sifat listrik batuan tersebut berupa tahanan jenis yang kemudian ketika uraikan memiliki beragam data tahanan jenis. Macam- macam tahanan jenis tersebut diperoleh dari masing-masing metode, contohnya adalah tahanan jenis resistivitas yang diperoleh dari metode resistivitas arus searah (*Direct Current Resistivity*). Untuk mengukur tahanan jenis tersebut terdapat konfigurasi pada masing-masing metode, diantaranya yang paling umum digunakan adalah konfigurasi *Wenner-alpha*, *Dipole-dipole*, *Pole – dipole*, *Pole-dipole* dan *Wenner-schlumberger*. Setiap konfigurasi memiliki variasi penetrasi yang berbeda, misalnya konfigurasi *Wenner-Schlumberger* yang memiliki jangkauan penetrasi paling dalam. Faktor yang mempengaruhi variasi penetrasi ini adalah prinsip penentuan jarak elektroda yang sudah ditetapkan pada setiap konfigurasi.

Karakterisasi suatu kondisi geologi bawah permukaan baik dalam metode geolistrik ataupun metode-metode geofisika yang lainnya dapat dilakukan dengan menggunakan model dan parameter model. Estimasi model dan parameter model dilakukan berdasarkan data yang diamati di atas permukaan bumi sampai menghasilkan respon yang cocok dengan data pengamatan atau data pengamatan atau data lapangan yang disebut pemodelan. *Forward Modeling* dan *Inverse Modeling* adalah istilah yang dikenal sebagai pemodelan dalam pengolahan data. *Forward modeling* merupakan proses perhitungan data yang secara teoritis yang akan teramati di permukaan bumi, jika harga parameter model bawah permukaan tertentu dapat diketahui dengan cara coba-coba (*Trial and Error*) sedangkan *Inverse Modeling* parameter model diperoleh secara langsung dari data. Terdapat berbagai macam pemodelan digunakan untuk menginterpretasi karakteristik bawah permukaan, pemodelan satu dimensi dapat berupa kurva, model data dua dimensi ataupun model data tiga dimensi.

Penelitian mengenai pemodelan inversi geolistrik satu dimensi konfigurasi *schlumberger* telah dilakukan sebelumnya oleh (Saefullah,2015) untuk memperhatikan kurva resistivitas semu dengan menggunakan integral Bessel untuk bumi dua lapis,(Faizin,2015) dengan menggunakan metode inversi jacobi yang menghasilkan model lapisan bawah permukaan untuk tiga lapis dan (Zulkifli,2017) mengenai interpretasi kurva *Schlumberger* satu dimensi data resistivitas menggunakan inversi *Least-Square* sedangkan pada penelitian ini pemodelan yang digunakan adalah dua dimensi menggunakan inversi *Least-Square*.

Inversi *Least-Square* diharapkan dapat menghasilkan nilai optimasi dan mencari model yang merupakan representasi terbaik. Dalam penelitian ini, program *Matlab Elris2d* dimanfaatkan untuk menghasilkan model dua dimensi data *Direct Current Resistivity* (DCR) konfigurasi *Wenner Schlumberger*. Program *Elris2d* memuat algoritma prosedur inversi sehingga program ini dapat dijadikan sumber untuk mengkaji persamaan inversi yang ada didalamnya dibandingkan dengan software *Res2dinv* yang memiliki struktur program yang sangat kompleks. Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji persamaan yang dimuat dalam program *Elris2d*, dan membandingkan hasil model yang diperoleh dari proses inversi dengan hasil model yang dihasilkan oleh software *Res2dinv*, oleh karena itu penelitian ini dilakukan.

## **I.2 Ruang Lingkup**

Ruang lingkup penelitian ini adalah mengkaji program *Elris2D* di *matlab* untuk menelusuri persamaan inversi model dua dimensi data *Direct Current Resistivity* (DCR) konfigurasi *Wenner-Schlumberger* menggunakan persamaan *Least-Square* dan membandingkan hasil inversi tersebut dengan hasil inversi yang dihasilkan dari software *Res2dInv*.

## **I.3 Rumusan Masalah**

1. Bagaimana Proses inversi data pengukuran geolistrik model dua dimensi lapisan bawah permukaan bumi yang dihasilkan dari proses inversi *Least Square*.
2. Bagaimana hasil model inversi dari program *Elris2d* jika dibandingkan dengan hasil model inversi software *Res2dInv*.

#### **I.4 Tujuan Penelitian**

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan :

1. Mengetahui proses inversi data model dua dimensi lapisan bawah permukaan bumi yang dihasilkan dari persamaan *Least-Square*.
2. Melakukan perbandingan hasil model inversi dari program *Elris2d* matlab dengan hasil model inversi dari software *Res2dInv*.

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

#### **II.1 Teori Dasar Metode Geolistrik**

Metode geolistrik adalah metode yang memanfaatkan arus listrik untuk mendeteksi struktur lapisan bawah permukaan bumi dengan mengukur beda potensial yang dihasilkan. Terdapat banyak metode geofisika dalam bidang eksplorasi, diantaranya menentukan anomali gravitasi, magnet, elastisitas, radioaktif. Metode geolistrik dapat digunakan untuk mengukur potensial-potensial, arus dan medan-medan elektromagnetik yang terjadi secara alami atau buatan di dalam bumi. Pengukuran bisa dilakukan dalam berbagai variasi sesuai dengan kebutuhan (Telford dkk., 1990).

Metode resistivitas didasari pada asumsi bahwa bumi bersifat homogen isotropis. Berdasarkan hal tersebut, resistivitas yang terukur adalah resistivitas yang sebenarnya dan tidak tergantung pada jarak antar elektroda. Kenyataannya, bumi terdiri atas lapisan dengan resistivitasnya masing – masing, sehingga potensial yang terukur dipengaruhi oleh lapisan – lapisan tersebut. Dengan demikian, resistivitas yang terukur bukan merupakan nilai resistivitas untuk satu lapisan saja. Dalam hal ini yang terukur adalah resistivitas semu (Febriana dkk., 2017).

#### **II.2 Metode Geolistrik Tahanan Jenis ( *Resistivity* )**

Metode geolistrik resistivitas/ tahanan jenis (selanjutnya ditulis metode resistivitas) secara teori lebih baik digunakan dibandingkan dengan semua metode geolistrik yang lain, karena menggunakan metode aktif dengan mengalirkan arus listrik ke bawah permukaan. Namun, nilai maksimum beda potensial secara ideal jarang

ditemukan karena keadaan bawah permukaan yang begitu kompleks. Kelemahan utamanya adalah memiliki sensitivitas yang tinggi dalam mengukur konduktivitas dekat permukaan atau biasa disebut memiliki noise sangat tinggi (Telford dkk, 1990).

Pada Tahun 1827 George Simon pertama kali mencetuskan konsep dasar dari metoda Geolistrik yang menyatakan bahwa beda potensial yang timbul di ujung-ujung suatu medium berbanding lurus dengan arus listrik yang mengalir pada medium tersebut. Namun, Ohm juga menyatakan bahwa tahanan listrik berbanding lurus dengan Panjang medium dan berbanding terbalik dengan luas penampangnya. Hubungan tersebut dapat dinyatakan dalam formula sebagai berikut :

$$V \propto I \text{ atau } V = I \cdot R \quad (2.1)$$

$$R \propto \frac{L}{A} \text{ atau } R = \rho \frac{L}{A} \quad (2.2)$$

Jika pada medium homogen isotropik dialiri arus listrik searah ( $I$ ) dengan medan listrik ( $\vec{E}$ ), maka elemen arus ( $dI$ ) yang melalui suatu element luasan  $dA$  dengan rapat arus ( $\vec{J}$ ) akan berlaku hubungan :

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2.3)$$

maka rapat arus ( $\vec{J}$ ) di setiap elemen luasan akibat medan listrik ( $\vec{E}$ ), akan memenuhi hubungan :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.4)$$

dengan ( $\vec{E}$ ) dalam volt per meter dan  $\sigma$  adalah konduktivitas medium dalam siemens per meter (S/m).

Medan listrik adalah gradien dari potensial skalar;

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (2.5)$$

Sehingga didapatkan :

$$\vec{J} = -\sigma \vec{\nabla}V \quad (2.6)$$

Jika arus stasioner dengan koefisien konduktivitas konstan, maka akan diperoleh persamaan Laplace dengan potensial harmonis (Telford dkk., 1990).

### II.2.1 Potensial Listrik Pada Bumi Homogen Isotropis

Lapisan bumi bersifat homogen isotropis merupakan pendekatan yang sederhana dalam penentuan tahanan jenis lapisan-lapisan batuan dalam bumi, sehingga tahanan jenis ( $\rho$ ) dianggap tidak bergantung pada sumbu koordinat dan ( $\rho$ ) merupakan fungsi skalar jarak titik pengamatan. Arus tunggal ( $I$ ) menyebabkan timbulnya distribusi potensial. Hukum-hukum fisika dasar yang dapat digunakan adalah terutama hukum kekekalan muatan dan hukum *Ohm*. Aliran arus yang mengalir dalam bumi homogen isotropis didasarkan pada hukum kekekalan muatan, yang secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut (Telford dkk., 1990) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (2.7)$$

Persamaan di atas disebut juga persamaan kontinuitas dengan  $\vec{J}$  adalah rapat arus ( $A/m^2$ ) dan  $Q$  adalah rapat muatan ( $C/m^3$ ).

Apabila dalam suatu volume arusnya stasioner atau dengan kata lain tidak ada arus yang keluar atau masuk, maka dapat ditulis :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.8)$$

Persamaan (2.6) disubstitusikan kedalam persamaan (2.7) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\sigma \vec{\nabla} V) = 0 \quad (2.9)$$

$$\vec{\nabla} \sigma \cdot \vec{\nabla} V + \sigma \vec{\nabla}^2 V = 0 \quad (2.10)$$

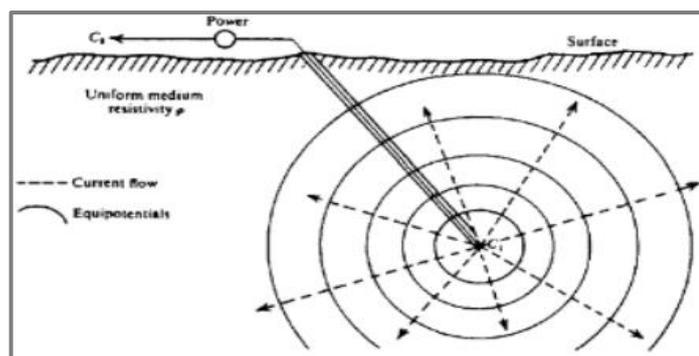
Potensial Listrik  $V$  pada setiap titik kecuali titik sumber memenuhi persamaan Laplace. Hal ini karena di dalam model lapisan bumi tersebut tidak ada sumber arus (Hendrajaya, 1990).

Untuk medium homogen isotropis  $\rho$  konstan, maka  $\sigma$  juga konstan atau  $\vec{\nabla} \sigma = 0$ , dengan demikian diperoleh persamaan *Laplace*:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.10)$$

### II.2.2 Potensial Disekitar Elektroda Berarus Tunggal di Bawah Permukaan Bumi

Dalam model bumi yang homogen isotropis, sebuah elektroda  $C_1$  di dalam bumi yang terangkai dengan elektroda lain di permukaan dengan jarak cukup jauh. Elektroda  $C_1$  dapat dipandang sebagai titik sumber yang memancarkan arus listrik ke segala arah di dalam bumi dengan hambatan jenis. Ekipotensial di setiap titik di dalam bumi membentuk permukaan bola dengan jari-jari  $r$  seperti pada Gambar (2.1) (Telford dkk, 1990).



**Gambar 2.1** Sumber Arus Tunggal di dalam Permukaan Medium Homogen Isotropik (Telford dkk., 1990)

Potensial pada suatu jarak dari sumber arus, hanya merupakan fungsi dari jari-jari saja. Persamaan *Laplace* yang berhubungan dengan kondisi ini dalam sistem koordinat bola adalah:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.11)$$

Bumi yang memiliki simetri bola, dianggap homogen isotropis serta tidak terjadi rotasi dan revolusi (statis) sehingga medan ekipotensial  $V$  merupakan fungsi jari-jari ( $r$ ) saja sehingga arah  $\theta$  dan  $\phi$  diabaikan, maka persamaan menjadi:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Atau

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Kemudian persamaan tersebut diintegrasikan dua kali sehingga diperoleh:

$$\int \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \int 0 \rightarrow dV = \frac{C_1}{r^2} dr \quad (2.14)$$

$$\int dV = \int \frac{C_1}{r^2} dr \rightarrow V_{(r)} = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (2.15)$$

Dimana  $C_1$  adalah konstanta integral pertama dan  $C_2$  adalah konstanta integral ke dua. Dengan menetapkan syarat batas bahwa potensial pada jarak tak hingga berharga nol ( $V=0$ ,  $r=\infty$ ) sehingga  $C_2$  sama dengan 0 ( $C_2=0$ ). Maka solusinya:

$$V_{(r)} = -\frac{C_1}{r} \quad (2.15)$$

Dalam kasus sumber arus didalam permukaan bumi homogen isotropik, maka medan -medan ekipotensialnya berbentuk bola. Sehingga jumlah arus yang menembus permukaan medan ekipotensial berbentuk bola tersebut adalah:

$$I = J A \quad (2.17)$$

Didefinisikan  $A$  adalah luas bola dengan  $J = -\sigma \frac{C_1}{r}$  sehingga:

$$I = 4\pi r^2 \left( -\sigma \frac{C_1}{r} \right) \quad (2.18)$$

$$I = -4\pi\sigma C_1 \quad (2.19)$$

Atau

$$C_1 = -\frac{I}{4\pi\sigma} = -\frac{I\rho}{4\pi} \quad (2.20)$$

Kemudian persamaan (2.21) disubstitusikan ke persamaan (2.17) diperoleh:

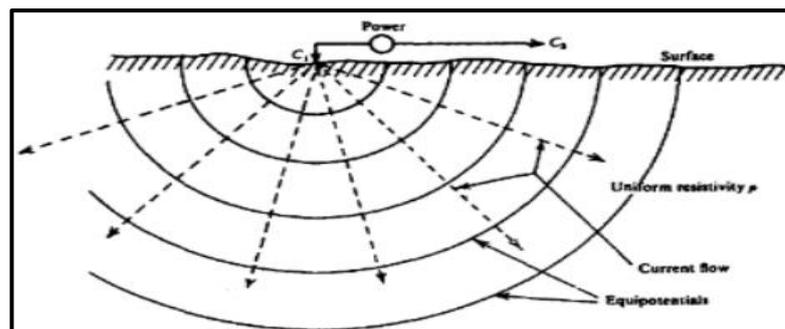
$$V(r) = -\frac{1}{r} \left( -\frac{I\rho}{4\pi} \right) \quad (2.21)$$

Sehingga diperoleh  $\rho$  (ohm meter):

$$\rho = \frac{4\pi rV}{I} \quad (2.22)$$

### II.2.3 Potensial Disekitar Elektroda Berarus Tunggal di Permukaan Bumi.

Apabila elektroda berarus dipasang di permukaan bumi homogen isotropik, maka medan equipotensialnya akan berbentuk setengah bola (Gambar 2.2) dan memiliki nilai konduktivitas sama dengan nol. Pada gambar arus  $I$  yang dialirkan melalui sebuah elektroda arus pada titik  $C_1$  di permukaan, akan tersebar ke semua arah dengan besar yang sama. Karena pengukuran dilakukan di permukaan bumi maka resistivitas udara  $=\infty$  maka permukaan yang dilalui arus  $I$  berbentuk setengah bola yang mempunyai luas  $\frac{1}{2}$  dari luas permukaan bola keseluruhan.



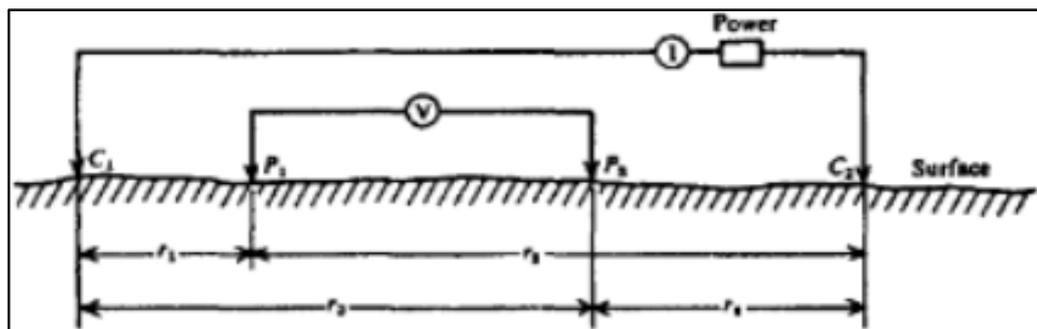
**Gambar 2.2** Sumber Arus Tunggal di Permukaan Medium Homogen Isotropik (Telford dkk., 1990)

Dengan menggunakan persamaan hubungan sumber arus dibawah permukaan tapi dengan luas permukaan equipotensial =  $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$  sehingga  $\rho$  yang di peroleh adalah:

$$V(r) = -\frac{1}{r} \left( -\frac{I\rho}{2\pi} \right) \rightarrow \rho = \frac{2\pi rV}{I} \quad (2.23)$$

#### II.2.4 Potensial Dua Elektroda Berarus dan Dua Elektroda Potensial di Permukaan Bumi.

Dalam eksplorasi dengan menggunakan metode geolistrik tahanan jenis, umumnya digunakan dua pasang elektroda. Pada permukaan biasanya digunakan satu pasang elektroda arus dan satu pasang elektroda beda potensial seperti pada (Gambar 2.3). Arus listrik diinjeksikan melalui elektroda arus sedangkan pengukuran tegangan yang terjadi diukur melalui elektroda beda potensial.



**Gambar 2.3** satu pasang elektroda sumber arus (titik  $C_1$  dan  $C_2$ ) dan satu pasang elektroda beda potensial (titik  $P_1$  dan  $P_2$ ) di permukaan medium homogen isotropik (Telford dkk., 1990)

Potensial di titik  $P_1$  akibat sumber arus  $C_1$  dan  $C_2$  adalah:

$$V_1 = \frac{I\rho}{2\pi r_1} \text{ dan } V_2 = -\frac{I\rho}{2\pi r_2} \quad (2.24)$$

Potensial yang terukur di titik  $P_1$  akibat sumber arus  $C_1$  dan  $C_2$  menjadi:

$$V_1 - V_2 = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.25)$$

Dengan aturan yang sama, potensial dititik  $P_2$  akibat sumber arus  $C_1$  dan  $C_2$  adalah:

$$V_3 = \frac{I\rho}{2\pi r_3} \text{ dan } V_4 = -\frac{I\rho}{2\pi r_4} \quad (2.26)$$

Potensial yang terukur di titik  $P_2$  akibat sumber arus  $C_1$  dan  $C_2$  menjadi:

$$V_3 - V_4 = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \quad (2.27)$$

Sehingga beda potensial antara titik  $P_1$  dan  $P_2$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Delta V = \frac{I\rho}{2\pi} \left[ \left( \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right) \right] \quad (2.28)$$

## II.2.5 Faktor Geometri

Besaran koreksi letak kedua elektroda potensial terhadap letak letak kedua elektroda arus disebut faktor geometri . Setiap konfigurasi memenuhi persamaan faktor koreksi geometri yang sama. Beberapa konfiigurasi elektroda memiliki faktor koreki geometri yang sama tetapi pengukuran akan memiliki perbedaan saat pengukuran. Nilai dari faktor koreksi geometri mengikuti pola dari persebaran elektroda (Vebrianto, 2015).

Jika besar nilai diantara 2 elektroda beda potensial dituliskan dalam persamaan (2.28) maka faktor geometri dapat di defenisikan sebagai:

$$\rho = \frac{2\pi}{\left\{ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right\}} \frac{\Delta V}{I} \text{ atau } \rho = K \frac{\Delta V}{I} \quad (2.29)$$

Dengan:

$$K = \frac{2\pi}{\left[ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right]} \quad (2.30)$$

K disebut faktor geometri yang nilainya bergantung pada letak elektroda arus maupun elektroda potensial.

### II.3 Transformasi Persamaan Geolistrik Dua Dimensi

Persamaan differensial linier umumnya dapat diselesaikan dengan menggunakan cara analitik seperti pemakaian Transformasi *Fourier*, tetapi pada bentuk yang kompleks persamaan differensial linier ini menjadi sulit diselesaikan. Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial dengan menggunakan bantuan komputer sebagai alat hitung, ketika metode analitik sulit digunakan (Munir, 2010). Pada beberapa bentuk persamaan differensial, khususnya pada differensial non- linier, penyelesaian analitik sulit sekali dilakukan sehingga metode numerik dapat menjadi metode penyelesaian yang disarankan (Andriani dkk,2016).

Untuk memperoleh potensial listrik lapisan bumi, diasumsikan pengukuran geolistrik resistivitas di permukaan bumi berlaku konservasi muatan, maka persamaan kontinuitas pada persamaan (2.7) dinyatakan:

$$\Delta \vec{j} = Q \quad (2.31)$$

Dimana Q merupakan sumber arus yang didefenisikan hanya terdapat pada lokasi injeksi saja, persamaannya dituliskan sebagai:

$$Q = I\delta(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) \quad (2.32)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan hubungan rapat arus dengan medan listrik berdasarkan hukum ohm dan persamaan gradien dari potensial skalar dengan mengasumsikan tidak ada perubahan konduktivitas diarah y maka diperoleh persamaan:

$$-\nabla \cdot (\sigma(x, z)\nabla V) = I\delta(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) \quad (2.33)$$

Dengan menggunakan vektor gradien:

$$\nabla\sigma\nabla V = \frac{1}{2}[-\sigma(x, z)\nabla^2 V + \nabla^2(\sigma V) - V\nabla^2 - V\nabla^2\sigma] \quad (2.34)$$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial geolistrik menjadi:

$$\begin{aligned} \sigma(x, z)\nabla^2 V(x, y, z) + \nabla^2(\sigma(x, z)V(x, y, z)) \\ - V(x, y, z)\nabla^2\sigma(x, z) = -2I\delta(x_s)\delta(y_s)\delta(z_s) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Persamaan (2.35) merupakan potensial listrik untuk kasus secara umum, biasanya merupakan kasus tiga dimensi. dengan menggunakan transformasi fourier persamaan tiga dimensi dapat diubah menjadi dua dimensi dengan mengasumsikan bahwa potensial kearah y adalah konstan. Sehingga untuk kasus dua dimensi bentuk persamaan diatas menjadi:

$$\sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} + k_y^2\sigma(x, z) = \frac{I}{2}\delta(x - x_s)(z - z_s) \quad (2.36)$$

Dimana  $K_y$  merupakan gelombang spasial dalam arah sumbu-y, I merupakan arus listrik dan  $\delta(x - x_s)(z - z_s)$  adalah posisi elektroda yang menginjeksi arus listrik. Persamaan diatas merupakan persamaan diferensial potensial listrik untuk kasus 2 dimensi dan untuk kasus homogen tidak ada perubahan potensial sehingga persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial poisson yaitu:

$$\nabla^2 V \neq 0 \quad (2.37)$$

Untuk memperoleh potensial yang akurat maka perlu dilakukan pendiskritisasian pada persamaan diferensial potensial listrik untuk kasus dua dimensi.

#### **II.4 Finite-Difference Methods dan Finite-Element Methods**

*Finite Difference Methods* dan *Finite Element Methods* merupakan dua macam pendekatan numerik untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial. Metode ini menyelesaikan persamaan differensial dengan membagi bidang menjadi

sejumlah pias berhingga segi empat. Metode lain untuk menyelesaikan beberapa persamaan diferensial parsial yang digunakan pada bidang teknik, yang dikenal dengan *Finite Element Methods*. Metode ini membagi domain dengan sejumlah elemen berhingga, yang direpresentasikan dalam bentuk polinomial. Dengan demikian elemen yang digunakan pada *Finite Element Methods* tidak harus berbentuk segiempat (Asih dkk., 2018).

Pada persamaan (2.36) telah diperoleh persamaan diferensial geolistrik, Dengan menerapkan *Finite-Element Method* dapat diperoleh solusi dari persamaan tersebut. Metode ini berperan unntuk mengubah persamaan diferensial potensial geolistrik menjadi persamaan linear yaitu (Andriani dkk., 2016):

$$A\vec{x} = \vec{B} \quad (2.38)$$

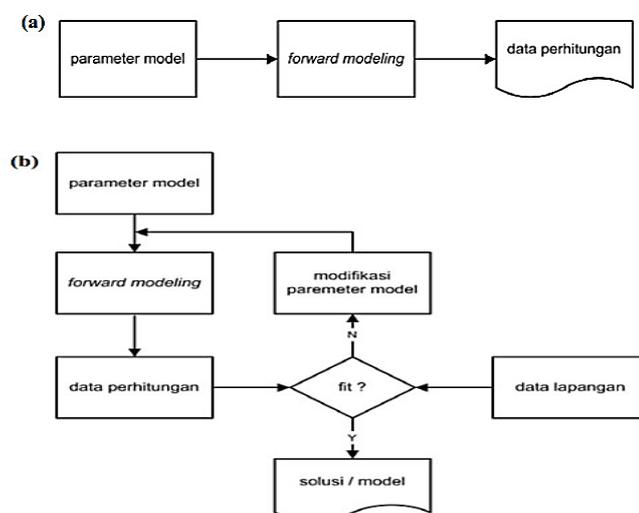
## **II.5 Forward Modelling**

*Forward modelling* menyatakan proses perhitungan data yang secara teoritis akan teramati di permukaan bumi jika diketahui harga parameter model bawah permukaan tertentu. Perhitungan data teoritis tersebut menggunakan persamaan matematik yang diturunkan dari konsep fisika yang mendasari fenomena yang ditinjau. Dalam pemodelan data geofisika, disari suatu model yang menghasilkan respons yang cocok atau fit dengan data pengamatan atau data lapangan. Dengan demikian, model tersebut dapat dianggap mewakili kondisi bawah permukaan di tempat pengukuran data (Grandis, 2009).

Untuk memperoleh kesesuaian antara data teoritis (respon model) dengan data lapangan dapat dilakukan proses coba-coba (*trial and error*) dengan mengubah-ubah harga parameter model (Gambar 2.6a). Seringkali istilah forward modeling digunakan untuk menyatakan pemodelan data geofisika dengan cara

coba-coba tersebut. Dengan kata lain, istilah *forward modeling* tidak hanya mencakup perhitungan respons model tetapi juga proses coba-coba secara manual untuk memperoleh model yang memberikan respons yang cocok dengan data (Grandis, 2009).

Secara umum metoda *forward modeling* membutuhkan waktu cukup lama karena sifatnya yang tidak otomatis sebagaimana *inverse modeling* (yang akan dijelaskan kemudian). Namun pada kasus-kasus tertentu metode *forward modeling* cukup efektif. Pada kasus dimana data mengandung noise yang cukup besar maka metode yang bersifat otomatis dan sangat obyektif seperti metode *inverse modeling* akan berusaha mencari model yang responnya fit pada data, termasuk noise-nya (Gambar 2.6b). Hal tersebut akan menghasilkan solusi yang dikehendaki atau kurang layak secara geologi. Kasus lain adalah dimana informasi geologi harus dijadikan pertimbangan utama dalam menentukan model. pada kasus tersebut model dianggap optimal jika responnya telah cocok secara garis besar dengan pola data lapangan (Grandis, 2009).



**Gambar 2.4** a) Proses *forward modeling* untuk menghitung respons (data teoritik atau data perhitungan) dari suatu model tertentu. b) Teknik pemodelan dengan cara mencoba-coba dan memodifikasi parameter model hingga diperoleh kecocokan antara data perhitungan dan data lapangan. (Grandis, 2009).

## II.6 Inversi Kuadrat Terkecil (*Least Square*)

Inversi geolistrik merupakan sebuah permasalahan yang kompleks. Oleh karena itu, perubahan kecil pada data dapat membawa perubahan yang besar pada model, maka perlu diberikan inisial awal (model awal) untuk mendekati seperti model yang sebenarnya permasalahan ini dapat diselesaikan dengan memperkenalkan faktor damping (Damping Faktor) kedalam system persamaan (Roy, 1999).

Dalam ilmu Geofisika, model dan parameter model digunakan untuk mengkarakterisasi suatu kondisi geologi bawah permukaan. Pemodelan merupakan proses estimasi model dan parameter model berdasarkan data yang diamati di permukaan bumi. Menke (1984) Mendefenisikan teori inversi sebagai suatu kesatuan teknik atau metode matematika dan statistika untuk memperoleh informasi yang berguna mengenai suatu sistem fisika berdasarkan observasi terhadap sistem tersebut.

Pada metode optimasi *least square*, model awal dimodifikasi hingga jumlah kuadrat kesalahan ( $\mathbf{E}$ ) dari selisih antara respon model dan hasil pengukuran dapat diperkecil:

$$E = \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad (2.39)$$

Diberikan  $\mathbf{g}$  didefenisikan sebagai vektor ketidaksesuaian Untuk mengurangi kesalahan pada persamaan tersebut maka persamaan Gauss-Newton digunakan untuk menentukan perubahan dalam parameter model yang seharusnya dapat mengurangi jumlah kuadrat kesalahan (Lines dan Treitel, 1984):

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}^T \mathbf{g} \quad \longrightarrow \quad \Delta \mathbf{q} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{g} \quad (2.40)$$

Dimana  $\Delta \mathbf{q}$  adalah vector perubahan parameter model dan  $\mathbf{J}$  adalah turunan parsial pada matriks jacobian. Elemen matriks jacobian diberikan oleh persamaan:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \quad (2.41)$$

Persamaan (2.41) merepresentasikan perubahan model pada respon model ke- $i$  yang disebabkan oleh karena perubahan parameter model ke- $j$ . Setelah melakukan perhitungan vektor perubahan parameter, maka didapatkan sebuah model baru yang diperoleh dari persamaan (2.41) :

$$q_{j+1} = q_j + \Delta q_j \quad (2.42)$$

Pada aplikasinya, persamaan kuadrat terkecil sederhana (persamaan 2.40) jarang digunakan secara independent pada proses inversi geofisika. Pada beberapa kondisi hasil produk matriks mungkin bernilai tunggal, sehingga persamaan kuadrat terkecil tidak memiliki penyelesaian untuk  $\Delta q$ . Terdapat masalah umum lainnya bahwa produk matriks  $J^T J$  mendekati tunggal (singular). Hal ini dapat disebabkan apabila model awal yang buruk berbeda dengan model optimum yang digunakan. Perubahan parameter vektor dihitung dengan menggunakan persamaan (2.40) dapat memiliki komponen yang terlalu besar, sehingga model baru yang dihitung menyebabkan memiliki nilai yang realistis. Salah satu metode untuk menghindari masalah tersebut adalah dengan menggunakan modifikasi marquardt-Levenberg (Lines dan Treitel, 1984) untuk persamaan Gauss-Newton yang dalam bentuk persamaan:

$$(J^T J + \lambda I) \Delta q_j = J^T g \longrightarrow \Delta q = [J^T J + \lambda I]^{-1} J^T g \quad (2.43)$$

Dimana  $I$  adalah matriks identitas. Faktor pengali  $\lambda$  disebut sebagai faktor Marquard atau dengan istilah damping faktor dengan metode ini disebut juga sebagai the ridge regression method (Inman, 1975 dalam Loke, 2004). Damping faktor secara efektif membatasi range nilai sehingga komponen-komponen vector parameter perubahan dan mengikutsertakan  $\Delta q$  dalam perhitungan.

Pada metode Gauss Newton persamaan (2.40), saat perhitungan berusaha meminimalkan jumlah kuadrat pada perbedaan vektor dan modifikasi metode *Marquart-Levenberg* juga meminimalkan kombinasi dari besarnya perbedaan vektor dan parameter perubahan vektor. Ketika jumlah parameter model sangat besar, seperti model inversi dua dimensi dan tiga dimensi yang terdiri dari banyaknya sel-sel yang berupa kotak-kotak, maka model yang dihasilkan oleh metode *Marquart-Levenberg* dapat memiliki distribusi resistivitas yang berada pada daerah yang bernilai resistivitas rendah atau resistivitas tinggi yang tidak merepresentasikan kondisi sebenarnya (Constable dkk., 1987 dalam Loke, 2004). Untuk mengatasi masalah ini persamaan kuadrat terkecil Gauss-Newton dimodifikasi lebih sehingga dapat meminimalkan variasi-variasi spasial pada parameter-parameter model tersebut. Metode kuadrat terkecil *smoothness-constraint* (Elis dan Oldenburg, 1994 dalam Loke, 2004) terdapat dalam bentuk persamaan:

$$(J^T J + \lambda F) \Delta q_j = J^T g - \lambda F q_j \rightarrow \Delta q = [J^T J + \lambda F]^{-1} J^T g \quad (2.44)$$

Dimana,

$$F = a_x C_x^T C_x + a_y C_y^T C_y + a_z C_z^T C_z \quad (2.45)$$

Dan  $C_x$   $C_y$  dan  $C_z$  merupakan matriks (*smoothing matrices*) pada arah x,y,z dan suatu besaran nilairelatif yang diberikan pada arah x,y,z persamaan (2.45) juga mencoba untuk meminimalkan kuadrat perubahan spasial atau *roughness* pada nilai resistivitas model. Modifikasi *marquardt-Levenberg* untuk persamaan Newton (2.44) dan (2.45) merupakan solusi dari persamaan metode kuadrat terkecil sederhana dimana dalam modifikasi tersebut diharapkan mampu membuat model yang optimum dan memiliki representasi yang lebih baik.

Persamaan *Smoothness-constrain least square* digunakan untuk menghubungkan model dengan parameter model yang berdekatan untuk mencegah penyimpangan tajam pada nilai resistivitas yang dapat mengakibatkan perubahan model yang jauh berbeda dengan kondisi sebenarnya. Berdasarkan hal tersebut persamaan (2.44) dimodifikasi untuk menstabilkan proses inversi. Solusi persamaan yang di buat adalah

$$\Delta m_i = (J^T W_d^T W_d J + \lambda C)^{-1} (J^T W_d^T W_d \Delta d - \lambda C m_{i-1}) \quad (2.46)$$

Dimana  $\Delta m_i$  adalah vektor koreksi model,  $J$  adalah matriks jacobian,  $\lambda$  adalah parameter regularisasi,  $d$  adalah vektor diskrepansi data,  $i$  adalah bilangan iterasi,  $W_d$  adalah matriks pembobotan data, dan  $C$  adalah persamaan lima titik Laplacian beda hingga, dengan Matriks pembobotan data yang dinyatakan dalam bentuk :

$$W_d = \text{diag}(1/\mathcal{E}_1) \quad (2.47)$$

Dimana  $i$  menunjukkan standar deviasi individu dari pengukuran dalam hal ketersediaan. Jika tidak matriks pembobotan data dihitung dengan persamaan berikut:

$$W_d = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\rho_{app}}}\right) \quad (2.48)$$

Proses pembobotan data bertujuan untuk mengurangi efek pembacaan ekstrim terhadap inversi. Matriks jacobian dihitung dengan membedakan perhitungan matrik yang terdapat pada proses forward modelling, dihubungkan dengan konduktivitas maka menghasilkan :

$$K \frac{\partial v}{\partial \sigma_i} = - \frac{\partial K}{\partial \sigma_i} v \quad (2.49)$$

Persamaan tersebut diubah sebagai sistem persamaan linier dalam bentuk persamaan (2.38) dan harus di selesaikan untuk setiap parameter model, dengan

cara ini matriks jacobian dihitung untuk setiap iterasi. Model yang diperbaharui dicapai dengan menambahkan koreksi yang dihitung ke parameter model. Model baru diverifikasi dengan membandingkan responnya dengan data terukur. Kecocokan data diukur dalam arti RMS.