

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN
FUNGSI RESPON TIPE HOLLING II DAN
WAKTU TUNDA**

*STABILITY ANALYSIS OF PREDATOR PREY MODEL WITH
HOLLING TYPE II FUNCTIONAL RESPONSE AND
TIME DELAY*

BUDYANITA ASRUN



**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2013**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN
FUNGSI RESPON TIPE HOLLING II DAN
WAKTU TUNDA**

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi

Matematika

Disusun dan diajukan oleh

BUDYANITA ASRUN

Kepada

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2013

TESIS

ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON TIPE HOLLING II DAN WAKTU TUNDA

Disusun dan diajukan oleh

BUDYANITA ASRUN

Nomor Pokok P3500211003

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis

pada tanggal 28 Mei 2013

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Menyetujui

Komisi Penasehat

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc

Ketua

Ketua Program Studi
Matematika Terapan,

Prof. Moh.Ivan Azis, M.Sc.,Ph.D

Anggota

Direktur Program Pascasarjana
Universitas Hasanuddin,

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc

Prof. Dr. Ir. Mursalim, M.Sc

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Budyanita Asrun
Nomor Mahasiswa : P3500211003
Program Studi : Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar,
Yang menyatakan

Budyanita Asrun

PRAKATA

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah yang tiada henti diberikan kepada hambaNYA dengan terselesaikannya tesis ini.

Tema yang dipilih oleh penulis dalam penelitian ini adalah model mangsa pemangsa dengan judul Model Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Tipe Holling II dan Waktu Tunda. Secara umum penulis berharap dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan serta untuk menambah wawasan pengetahuan dalam bidang matematika terapan terutama dalam bidang matematika ekologi.

Banyak kendala yang dihadapi oleh penulis dalam penyusunan tesis ini, yang hanya berkat bantuan berbagai pihak, maka tesis ini dapat terselesaikan. Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc sebagai Ketua Komisi Penasihat dan Prof. Moh. Ivan Azis, M.Sc., Ph.D sebagai Anggota Komisi Penasehat atas bantuan dan bimbingan yang telah diberikan. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada keluarga tercinta khususnya Ayahanda Masri dan Ibunda Dra. Ruhniah yang telah banyak memberikan dukungan, semangat, nasehat dan doa selama dalam proses penulisan tesis ini, serta Muh. Ilham Budi Utama yang telah membantu dan memberikan banyak motivasi, dan yang terakhir ucapan terima kasih kepada teman-teman Matematika Pascasarjana Angkatan 2011 yang

telah bersama mengikuti pendidikan ini kurang lebih dua tahun, terima kasih atas bantuan dan kerjasamanya.

Makassar, Mei 2013

Budyanita Asrun

ABSTRAK

BUDYANITA ASRUN. *Analisis Kestabilan Model Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Tipe Holling II dan Waktu Tunda* (dibimbing oleh Syamsuddin Toaha dan Moh. Ivan Azis).

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh waktu tunda pada kestabilan titik keseimbangan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II.

Metode penelitian ini merupakan kajian pustaka yang dilakukan di jurusan Matematika Universitas Hasanuddin Makassar.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa dari model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II diperoleh tiga titik keseimbangan, yaitu $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ dan $E_2 = (\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2})$. Dari hasil analisis diperoleh dua titik keseimbangan yang dapat stabil pada kondisi syarat tertentu, yaitu titik keseimbangan $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ stabil jika $ad - \varepsilon c - \alpha ac < 0$ dan titik keseimbangan $E_2 = (\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2})$ stabil jika $\varepsilon d - \alpha ad + \alpha \varepsilon c + \alpha^2 ac > 0$. Waktu tunda dapat mempengaruhi kestabilan titik keseimbangan E_2 dari stabil menjadi tidak stabil.

ABSTRACT

BUDYANITA ASRUN. *Stability Analysis of Predator Prey Model with Holling Type II Functional Response and Time Delay* (Supervised by Syamsuddin Toaha and Moh. Ivan Azis).

The research aimed to investigate the effect time delay on the stability of an equilibrium point in the predator prey model with Holling type II functional response.

This was a library research carried out in the Department of Mathematics of Hasanuddin University, Makassar.

The research result indicates that the predator prey model with Holling type II functional response is obtained three equilibrium points, i.e. $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ and $E_2 = (\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2})$. The stability analysis is obtained two equilibrium points which can be stable on the certain condition, i.e. the equilibrium point $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ is stable if $ad - \varepsilon c - \alpha ac < 0$ and the equilibrium point $E_2 = (\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2})$ is stable if $\varepsilon d - \alpha ad + \alpha \varepsilon c + \alpha^2 ac > 0$. The delay time can affect the stability on the equilibrium point E_2 from stable to unstable.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN	iv
PRAKATA	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
DAFTAR ARTI LAMBANG	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Tujuan Penelitian	3
D. Kegunaan Penelitian	4
BAB II MODEL MANGSA PEMANGSA LOTKA VOLTERRA	
A. Pendahuluan	5
B. Keadaan Seimbang	7

C. Analisis Kestabilan	8
D. Simulasi Numerik	12
BAB III MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON TIPE HOLLING II	
A. Pendahuluan	19
B. Keadaan Seimbang	20
C. Analisis Kestabilan	22
D. Simulasi Numerik	25
BAB IV MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON TIPE HOLLING II DAN WAKTU TUNDA	
A. Pendahuluan	32
B. Analisis Kestabilan	33
C. Simulasi Numerik	45
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	
A. Kesimpulan	59
B. Saran	61
DAFTAR PUSTAKA	62
LAMPIRAN	63

DAFTAR TABEL

Nomor	Halaman
1. Nilai Parameter dan konstanta model (2.2a) dan (2.2b)	12
2. Nilai parameter α model (3.1a) dan (3.1b)	26

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Halaman
1a. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $c = 2$	14
1b. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $c = 2$	15
1c. Trayektori dari $x(t)$ dan $y(t)$ dengan $c = 2$	15
1d. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $c = 0.2$	16
1e. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $c = 0.2$	17
1f. Trayektori dari $x(t)$ dan $y(t)$ dengan $c = 0.2$	17
2a. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $c = 2$, dan $\alpha = 0.1$	27
2b. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $c = 2$, dan $\alpha = 0.1$	28
2c. Trayektori dari $x(t)$ dan $y(t)$ dengan $c = 2$, dan $\alpha = 0.1$	28
3a. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $c = 0.2$, dan $\alpha = 0.1$	29
3b. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $c = 0.2$, dan $\alpha = 0.1$	30
3c. Trayektori dari $x(t)$ dan $y(t)$ dengan $c = 2$, dan $\alpha = 1$	30
4a. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $c = 2$, $\alpha = 1$, $\tau = 0$, $\tau = 0,5$, dan $\tau = 10$	46
4b. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $c = 2$, $\alpha = 1$, $\tau = 0$, $\tau = 0,5$, dan $\tau = 10$	46
5a. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $x(0) = 5$, $c = 0.2$, $\alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.65$	48

5b.	Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $y(0) = 1, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.65$	48
5c.	Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan $x(0) = 5, y(0) = 1,$ $c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.65$	49
5d.	Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $x(0) = 5,$ $c = 0.2, \alpha = 0.1,$ dan $\tau = 1.731007353$	50
5e.	Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $y(0) = 1, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.731007353$	50
5f.	Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan $x(0) = 5, y(0) = 1,$ $c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.731007353$	51
5g.	Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $x(0) = 5,$ $c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.8$	52
5h.	Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $y(0) = 1, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.8$	52
5i.	Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan $x(0) = 5, y(0) = 1,$ $c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.8$	53
6a.	Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $x(0) = 0.55, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.65$	54
6b.	Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $y(0) = 10, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.65$	54
6c.	Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan $x(0) = 0.55, y(0) = 10,$ $c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.65$	55
6d.	Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $x(0) = 0.55, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.731007353$	55
6e.	Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $y(0) = 10, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.731007353$	56
6f.	Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan $x(0) = 0.55, y(0) = 10$ $c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.731007353$	56
6g.	Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $x(0) = 0.55, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.8$	57

- 6h. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan
 $x(0) = 0.55, c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.8$ 57
- 6i. Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan $x(0) = 0.55, y(0) = 10$
 $c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.8$ 58

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Halaman
1. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 1a,1b, dan 1c	63
2. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 1d,1e, dan 1f	64
3. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 2a,2b, dan 2c	65
4. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 3a,3b, dan 3c	66
5. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 4a dan 4b	67
6. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 5a,5b, dan 5c	68
7. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 5d,5e, dan 5f	69
8. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 5g,5h, dan 5i	70
9. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 6a,6b, dan 6c	71
10. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 6d,6e, dan 6f	72
11. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 6g,6h, dan 6i	73

DAFTAR ARTI LAMBANG

Lambang	Arti dan Keterangan
x	Variabel yang menyatakan jumlah populasi mangsa
y	Variabel yang menyatakan jumlah populasi pemangsa
\dot{x}	Laju perubahan jumlah populasi mangsa per waktu t
\dot{y}	Laju perubahan jumlah populasi pemangsa per waktu t
a	Laju kelahiran mangsa
b	Laju kematian mangsa akibat predasi
c	Laju kematian alami pemangsa
d	Laju pertumbuhan pemangsa akibat predasi
ε	Laju kompetisi dalam populasi mangsa
α	Laju penanganan mangsa

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Semua makhluk hidup memiliki hubungan saling bergantung satu sama lain. Masing-masing individu berinteraksi dengan individu lain yang sejenis maupun lain jenis. Dalam ekosistem terdapat pula proses mangsa memangsa antar makhluk hidup. Hubungan antara mangsa dan pemangsa disebut pemangsaan atau predasi. Hubungan ini sangat erat sebab tanpa mangsa populasi pemangsa tak dapat hidup. Sebaliknya, pemangsa juga berfungsi sebagai pengontrol populasi mangsa.

Salah satu model mangsa pemangsa yang paling terkenal dinamai setelah dua ilmuwan Alfred Lotka dan Vito Volterra yang terlebih dulu mempelajari dan menerapkan model ini dan memperkenalkannya pada tahun 1926. Model mangsa pemangsa Lotka Volterra terdiri atas dua persamaan differensial yang pertama untuk x sebagai mangsa dan yang kedua untuk y sebagai pemangsa.

Asumsi dasar dari model mangsa pemangsa Lotka Volterra klasik adalah bahwa setiap populasi mengalami pertumbuhan atau peluruhan eksponensial dalam ketiadaan yang lain. Eksistensi terbaru dari model ini menyelidiki pertumbuhan logistik dari satu populasi ketika yang lain tidak

hadir, penundaan waktu respon oleh satu populasi terhadap perubahan populasi yang lain, dan interaksi antar populasi. Kemudian model mangsa pemangsa Lotka Volterra dimodifikasi dengan menambahkan asumsi bahwa jumlah populasi juga dipengaruhi oleh adanya tingkat kompetisi dalam populasi tersebut (Olinick, 2006).

Salah satu pengembangan lain dari model mangsa pemangsa Lotka Volterra adalah model yang dilakukan oleh Ruan dan Xiao (2001), Liu dan Chen (2002), serta Tian dan Xu (2011), dimana dalam model Lotka Volterra diberikan penambahan fungsi respon tipe Holling II pada interaksi antara mangsa dan pemangsa, yang dimana fungsi respon tipe Holling II menggambarkan tingkat pemangsaan sebagai fungsi naik dari populasi mangsa, sampai pada kepadatan mangsa yang tinggi dimana tingkat konsumsi mencapai titik jenuh. Hal ini disebabkan setiap pemangsa hanya dapat memakan sejumlah kecil mangsa pada satu unit waktu.

Untuk membangun model yang lebih realistis Beretta dan Kuang (1996) dan Ruan (2009) mempertimbangkan waktu tunda (time delay) untuk jangka respon pemangsa terhadap mangsa, maka pada kompartemen y penyebab penambahan jumlah populasi pemangsa diperlukan adanya waktu tunda, hal ini diasumsikan bahwa penggunaan waktu tunda pada sistem tersebut karena adanya waktu yang diperlukan populasi pemangsa dalam memangsa mangsanya. Kemudian Teng *et.al*

(2011) juga melakukan hal yang sama memberikan waktu tunda pada fungsi respon tipe Holling II pada kompartemen yang sama.

B. Rumusan Masalah

Model yang akan dikaji berdasarkan model mangsa pemangsa Lotka Volterra yang telah dimodifikasi dengan menambahkan asumsi bahwa jumlah populasi mangsa juga dipengaruhi oleh adanya tingkat kompetisi dalam populasi mangsa tersebut, kemudian dikembangkan Ruan dan Xiao (2001), Liu dan Chen (2002), serta Tian dan Xu (2011) dengan memberikan fungsi respon tipe Holling II pada pengaruh predasi terhadap populasi.

Dari model tersebut, maka dirumuskan permasalahan yang akan dibahas, yaitu bagaimana menganalisis kestabilan dari titik keseimbangan pada model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II dan waktu tunda.

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui pengaruh waktu tunda pada kestabilan titik keseimbangan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II.

D. Kegunaan Penelitian

Manfaat dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Secara umum diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan serta untuk menambah wawasan pengetahuan dalam bidang matematika terapan terutama dalam bidang matematika ekologi.
2. Secara khusus memberikan gambaran tentang kestabilan titik keseimbangan dari model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II dan waktu tunda.

BAB II

MODEL MANGSA PEMANGSA LOTKA VOLTERRA

A. Pendahuluan

Model mangsa pemangsa Lotka Volterra pertama kali diperkenalkan oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1926. Model tersebut memiliki asumsi dasar bahwa populasi mangsa akan mengalami pertumbuhan secara eksponensial tanpa adanya pemangsa dan berkembang menjadi pertumbuhan secara logistik ketika pertumbuhan mangsa dibatasi oleh kapasitas batas lingkungan.

Ketika tidak ada pemangsa, maka diasumsikan bahwa populasi mangsa akan mengalami pertumbuhan eksponensial. Sedangkan ketika tidak ada mangsa, maka populasi pemangsa akan mengalami proses kematian secara alami. Selanjutnya jumlah mangsa yang mati akibat predasi sebanding dengan frekuensi pertemuan antara populasi. Dengan demikian predasi sedikit jika populasi mangsa atau pemangsa sedikit dan predasi banyak ketika kedua populasi relatif besar. Misalkan $x = x(t)$ menyatakan jumlah populasi mangsa dan $y = y(t)$ menyatakan jumlah populasi pemangsa, maka model laju perubahan populasi mangsa dan pemangsa klasik yang diusulkan Lotka Volterra diberikan sebagai berikut

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad (2.1a)$$

$$\dot{y} = dxy - cy, \quad (2.1b)$$

dimana \dot{x} dan \dot{y} secara berturut-turut menyatakan laju perubahan populasi mangsa dan pemangsa per waktu. Jumlah populasi mangsa pada kompartemen x bertambah karena adanya laju kelahiran mangsa ax dan berkurang akibat predasi bxy . Sedangkan jumlah populasi pemangsa pada kompartemen y bertambah karena adanya predasi mangsa dxy dan akan berkurang akibat kematian populasi pemangsa secara alami cy .

Beberapa modifikasi dari model Lotka Volterra mangsa pemangsa telah diusulkan yang menawarkan gambaran yang lebih realistis dari interaksi populasi. Salah satunya dengan menambahkan asumsi jika populasi mangsa selalu jauh lebih besar daripada jumlah pemangsa, maka pertimbangan persamaan logistik dapat digunakan. Jika jumlah mangsa menjadi cukup besar, maka mangsa dapat mengganggu satu sama lain dalam upaya mereka untuk memperoleh makanan dan ruang (habitat). Salah satu cara untuk menggambarkan efek ini secara matematis adalah dengan menggantikan model (2.1a) oleh sistem persamaan yang lebih rumit, dimana populasi mangsa tumbuh logistik dalam ketiadaan pemangsa, dengan daya dukung ϵx^2 . Model sistem persamaan (2.1a) dan (2.1b) setelah modifikasi diberikan sebagai berikut

$$\dot{x} = x(a - \epsilon x - by), \quad (2.2a)$$

$$\dot{y} = y(dx - c). \quad (2.2b)$$

B. Keadaan Seimbang

Pada keadaan seimbang, model yang dinyatakan oleh sistem persamaan (2.2a) dan (2.2b) memenuhi sistem persamaan

$$\dot{x} = \dot{y} = 0, \quad (2.3)$$

sehingga diperoleh

$$x (a - \varepsilon x - by) = 0, \quad (2.4a)$$

$$y (dx - c) = 0. \quad (2.4b)$$

Untuk memenuhi persamaan (2.4a) dapat ditulis dua kemungkinan, yaitu

$$x = 0, \quad (2.5a)$$

atau

$$\begin{aligned} a - \varepsilon x - by &= 0 \\ y &= \frac{a - \varepsilon x}{b}, \end{aligned} \quad (2.5b)$$

sedangkan untuk memenuhi persamaan (2.4b) dapat ditulis dua kemungkinan, yaitu

$$y = 0, \quad (2.6a)$$

atau

$$\begin{aligned} (dx - c) &= 0 \\ x &= \frac{c}{d}. \end{aligned} \quad (2.6b)$$

Pada keadaan dimana tidak ada pemangsa, maka $y = 0$. Substitusi $y = 0$ ke persamaan (2.5a) dan (2.5b). Untuk $y = 0$ yang disubstitusi ke persamaan (2.5a) maka diperoleh

$$x_0 = 0 \text{ dan } y_0 = 0, \quad (2.7)$$

dengan demikian diperoleh titik keseimbangan

$$E_0 = (0,0).$$

Untuk $y = 0$ yang disubstitusi ke persamaan (2.5b) maka diperoleh

$$x_1 = \frac{a}{\varepsilon} \text{ dan } y_1 = 0, \quad (2.8)$$

dengan demikian diperoleh titik keseimbangan

$$E_1 = \left(\frac{a}{\varepsilon}, 0 \right).$$

Pada keadaan dimana ada pemangsa, maka $y \neq 0$. Substitusi persamaan (2.6b) ke persamaan (2.5b), maka diperoleh

$$x_2 = \frac{c}{d}, \quad (2.9)$$

dan

$$y_2 = \frac{ad - \varepsilon c}{bd}, \quad (2.10)$$

dengan demikian diperoleh titik keseimbangan

$$E_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{ad - \varepsilon c}{bd} \right).$$

Namun dengan mempertimbangkan positif dari parameter yang tidak diketahui, maka titik keseimbangan $E_2 (x_2, y_2)$ berada pada kuadran pertama apabila $ad - \varepsilon c > 0$.

C. Analisis Kestabilan

Perilaku dinamis dari titik keseimbangan dapat dipelajari dengan memperhatikan nilai eigen dari matriks Jacobi pada sistem persamaan yang telah dilinearisasi. Tinjau kembali persamaan (2.2a) dan (2.2b) yang dituliskan dalam bentuk

$$\dot{x} = x (a - \varepsilon x - by) = f_1(x, y), \quad (2.11a)$$

$$\dot{y} = y (d x - c) = f_2(x, y). \quad (2.11b)$$

Linearisasi di sekitar titik keseimbangan $E^*(x^*, y^*)$, dapat dituliskan dalam bentuk matriks Jacobi

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} a - 2\epsilon x^* - by^* & -bx^* \\ dy^* & -c + dx^* \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Nilai eigen persamaan karakteristik sistem persamaan (2.11a) dan (2.11b) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\det(\lambda I - J) = 0$.

1. Analisis kestabilan titik keseimbangan E_0 dan E_1

Tinjau titik keseimbangan E_0 dan E_1 .

a. Pada titik keseimbangan $E_0 = (0, 0)$.

Matriks Jacobi untuk titik keseimbangan E_0 sebagai berikut

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik pada titik keseimbangan ini adalah

$$\det(\lambda I - J) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda + c \end{vmatrix} = 0,$$

atau

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad (2.13)$$

dimana

$$a_1 = c - a,$$

$$a_2 = -ac.$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, semua nilai eigen persamaan (2.13) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$. Karena $a_2 = -ac$, maka jelas bahwa $a_2 < 0$. Jadi titik keseimbangan E_0 tidak stabil. Dengan mencari nilai eigen dari persamaan (2.13), maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = a \text{ dan } \lambda_2 = -c.$$

Karena nilai eigen dari titik keseimbangan E_0 real dan berbeda tanda, maka titik keseimbangan E_0 merupakan titik pelana (sadel).

b. Pada titik keseimbangan $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$.

Matriks Jacobi untuk titik keseimbangan E_1 sebagai berikut

$$J\left(\frac{a}{\varepsilon}, 0\right) = \begin{bmatrix} -a & -\frac{ab}{\varepsilon} \\ 0 & -c + \frac{ad}{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik pada titik keseimbangan ini adalah

$$\det(\lambda I - J) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + a & \frac{ab}{\varepsilon} \\ 0 & \lambda + c - \frac{ad}{\varepsilon} \end{vmatrix} = 0,$$

atau

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \tag{2.14}$$

dimana

$$a_1 = a - \left(\frac{ad - \varepsilon c}{\varepsilon}\right),$$

$$a_2 = -a \left(\frac{ad - \varepsilon c}{\varepsilon}\right).$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, semua nilai eigen persamaan (2.14) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$. Karena $a_1 = a - \left(\frac{ad - \varepsilon c}{\varepsilon}\right)$ dan $a_2 = -a \left(\frac{ad - \varepsilon c}{\varepsilon}\right)$, maka $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ jika $ad - \varepsilon c < 0$. Jadi titik keseimbangan E_1 akan stabil jika $ad - \varepsilon c < 0$.

2. Analisis kestabilan titik keseimbangan E_2

Tinjau titik keseimbangan $E_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{ad - \varepsilon c}{bd}\right)$, sehingga diperoleh matriks Jacobi untuk titik keseimbangan E_2 sebagai berikut

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{ad - \varepsilon c}{bd}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon c}{d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad - \varepsilon c}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik pada titik keseimbangan ini adalah

$$\det(\lambda I - J) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{\varepsilon c}{d} & \frac{bc}{d} \\ -\frac{ad - \varepsilon c}{b} & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

atau

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{2.15}$$

dimana

$$a_1 = \frac{\varepsilon c}{d},$$

$$a_2 = \frac{(ad - \varepsilon c)c}{d}.$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, semua nilai eigen persamaan (2.15) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$. Karena $a_1 = \frac{\varepsilon c}{d}$, maka jelas $a_1 > 0$, sedangkan $a_2 = \frac{(ad - \varepsilon c)c}{d}$, karena sebelumnya telah diasumsikan syarat agar titik keseimbangan E_2 berada pada kuadran pertama jika $ad - \varepsilon c > 0$, maka jelas $a_2 > 0$. Jadi titik keseimbangan E_2 stabil.

D. Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan dengan menggunakan software Maple dan Matlab dengan nilai parameter dari model (2.2a) dan (2.2b) diberikan pada Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1. Nilai parameter model (2.2a) dan (2.2b)

	Parameter	Nilai
a	Laju kelahiran mangsa	$1,2 \text{ (hari)}^{-1}$
b	Laju kematian mangsa akibat predasi	$0,1 \text{ (populasi x hari)}^{-1}$
c	Laju kematian alami pemangsa	2 (hari)^{-1} $0,2 \text{ (hari)}^{-1}$
d	Laju pertumbuhan pemangsa akibat predasi	$0,4 \text{ (populasi x hari)}^{-1}$
ε	Laju kompetisi dalam populasi mangsa	$0,6 \text{ (populasi x hari)}^{-1}$

Sumber : Zhang *et.al* (2011) dan Teng *et.al* (2011)

Model sistem persamaan (2.2a) dan (2.2b) disimulasikan dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel I dan Tabel II, serta dengan menggunakan syarat awal, yaitu

$$x(0) = 5 \text{ dan } y(0) = 1.$$

Untuk $c = 2$ maka kondisi sistem akan stabil pada titik keseimbangan E_1 , yaitu

$$E_1 = (2, 0),$$

dimana pada akhir periode populasi pemangsa akan musnah. Adapun nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (2.14) adalah

$$\lambda_1 = -1,2 \text{ dan } \lambda_2 = -1,2.$$

Sedangkan untuk $c = 0.2$ maka kondisi sistem akan stabil pada titik keseimbangan E_2 , yaitu

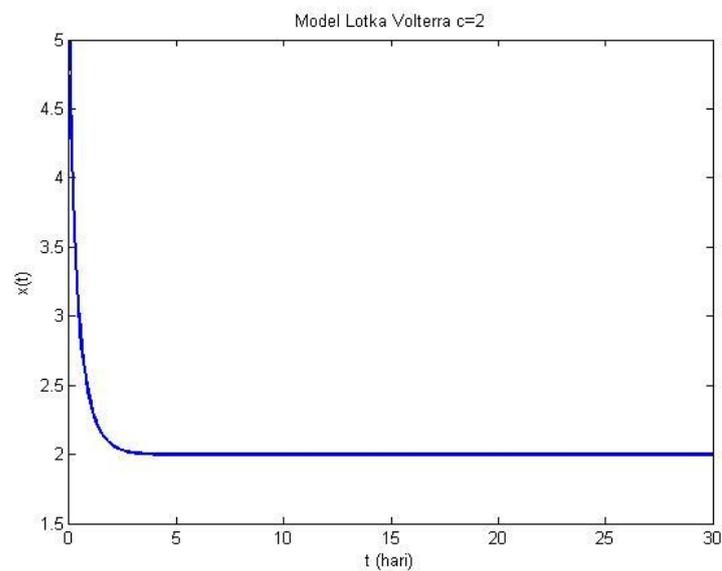
$$E_2 = (0.5, 9),$$

dimana pada akhir periode semua populasi akan tetap ada. Adapun nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (2.15) adalah

$$\lambda_1 = -0.15 + 0.3968626967 I \text{ dan } \lambda_2 = -0.15 - 0.3968626967 I.$$

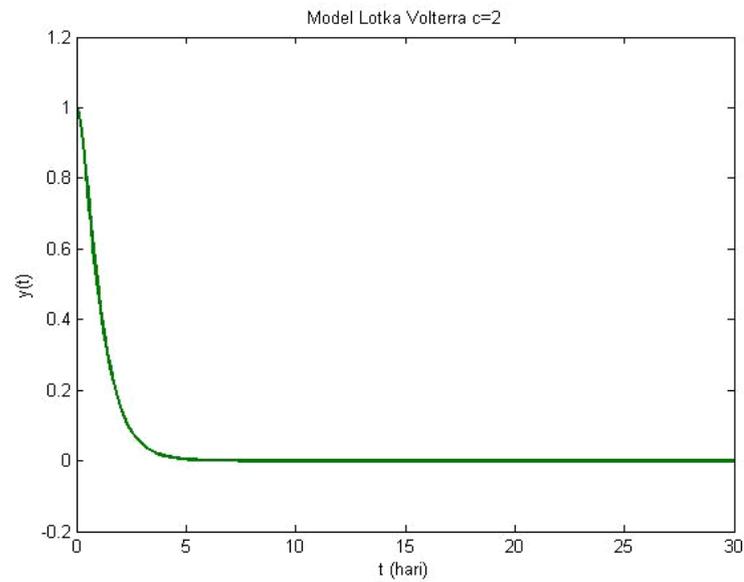
Pada Gambar 1a,1b dan 1c hasil simulasi menunjukkan ketika kondisi $ad - \varepsilon c < 0$. Dalam hal ini titik keseimbangan E_2 tidak berada pada kuadran pertama, maka populasi mangsa dan pemangsa stabil menuju titik keseimbangan E_1 dimana dalam waktu yang panjang populasi pemangsa akan musnah, sedangkan Gambar 1d, 1e dan 1f hasil simulasi menunjukkan ketika kondisi $ad - \varepsilon c > 0$ yang memenuhi syarat bahwa

titik keseimbangan E_2 berada pada kuadran pertama, maka populasi akan stabil menuju ke titik keseimbangan E_2 dimana dalam waktu yang panjang semua populasi akan tetap ada. Berikut gambar hasil simulasi dari model (2.2a) dan (2.2b) terhadap populasi mangsa dan pemangsa, serta trayektorinya.



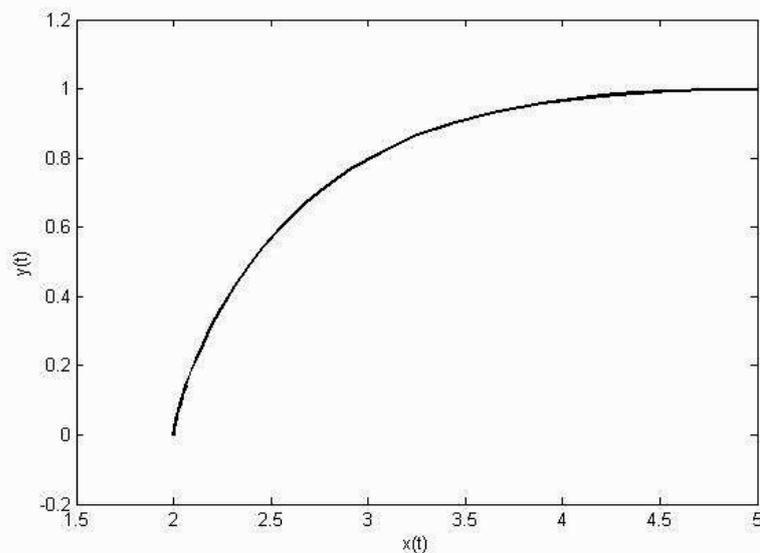
Gambar 1a. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $c = 2$

Gambar 1a memperlihatkan bahwa tingkat populasi mangsa terus menerus menurun akibat predasi hingga mencapai kestabilan.



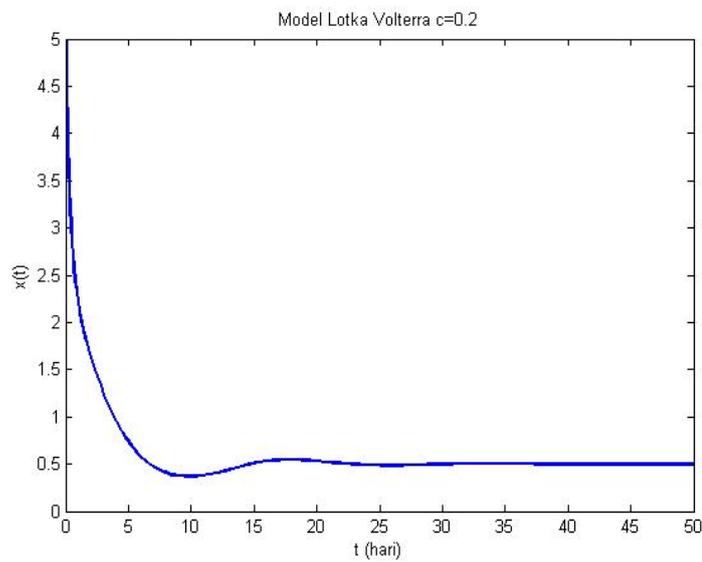
Gambar 1b. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $c = 2$

Gambar 1b memperlihatkan bahwa tingkat populasi pemangsa terus menerus menurun hingga mencapai kestabilan, yaitu populasi pemangsa mengalami kepunahan.



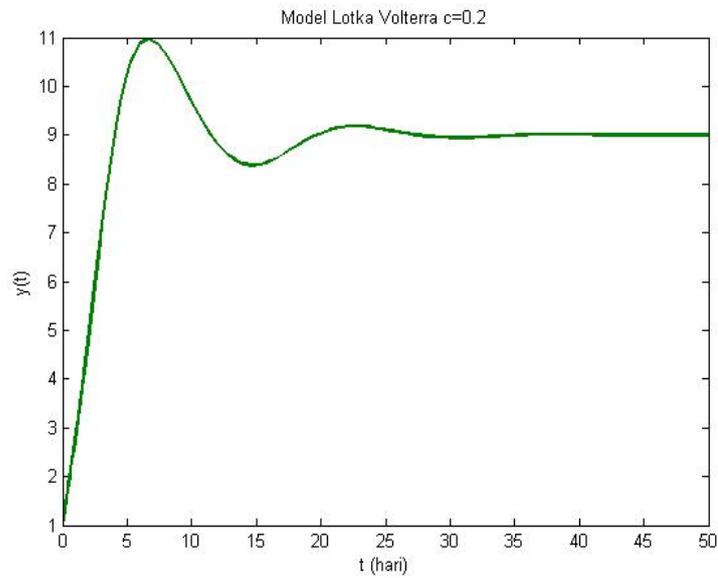
Gambar 1c. Trayektori dari $x(t)$ dan $y(t)$ dengan $c = 2$

Gambar 1c memperlihatkan bahwa pemangsa mengkonsumsi mangsanya lebih sedikit sehingga lambat laun jumlah populasinya akan menurun hingga mencapai kepunahan, sedangkan populasi mangsa juga terus menurun karena predasi hingga mencapai kestabilan. Dalam hal ini, populasi akan stabil menuju ke titik keseimbangan $E_1 = (2,0)$



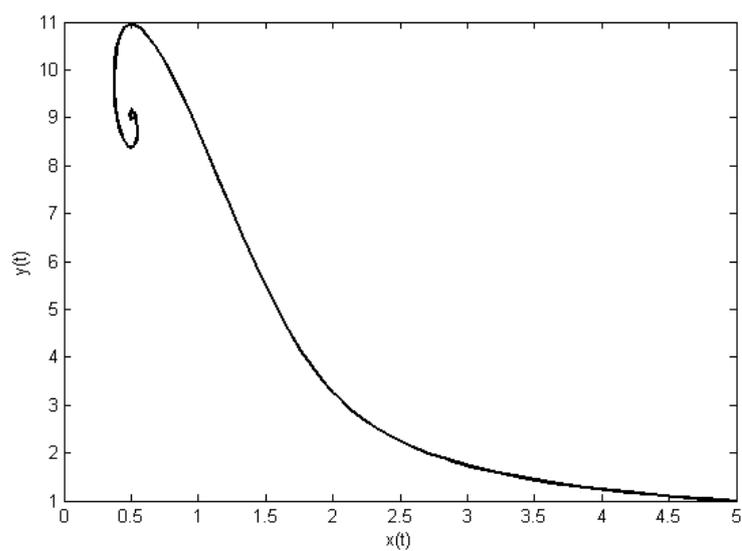
Gambar 1d. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$ dengan $c = 0.2$

Gambar 1d menjelaskan bahwa tingkat populasi mangsa diawal menurun akibat predasi, kemudian berfluktuasi hingga mencapai kestabilan.



Gambar 1e. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$ dengan $c = 0.2$

Gambar 1e menjelaskan bahwa tingkat populasi pemangsa diawal meningkat akibat predasi, kemudian berfluktuasi hingga mencapai kestabilan.



Gambar 1f. Trayektori dari $x(t)$ dan $y(t)$ dengan $c = 0.2$

Gambar 1f memperlihatkan bahwa diawal akibat predasi tingkat populasi mangsa terus menerus menurun, dan menyebabkan populasi pemangsa meningkat. Ketika populasi mangsa mulai menurun, maka populasi pemangsa juga mengalami penurunan, kemudian pada akhirnya mencapai kestabilan. Dalam hal ini, populasi akan stabil menuju ke titik keseimbangan $E_2 = (0.5, 9)$.