SIFAT-SIFAT NILAI EIGEN DALAM MATRIKS QUATERNION

THE PROPERTIES OF THE EIGENVALUE IN THE QUATERNION MATRICES

SUSI EKAWATI

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2019

SIFAT-SIFAT NILAI EIGEN DALAM MATRIKS QUATERNION

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi

Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

SUSI EKAWATI

Kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2019

TESIS

SIFAT-SIFAT NILAI EIGEN DALAM MATRIKS QUATERNION

Disusun dan diajukan oleh

SUSI EKAWATI
Nomor Pokok P3500216018

Telah dipertahankan didepan Panitia Ujian Tesis

pada tanggal 25 Januari 2019

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Menyetujui

Komisi Penasehat,

Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc	**Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si**
Ketua	Anggota

Ketua Program Studi Magister Matematika,	Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin,
Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc	**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si**

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Susi Ekawati
Nomor Mahasiswa	: P3500216018
Program Studi	: Magister Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, Januari 2019
Yang menyatakan

Susi Ekawati

PRAKATA

Alhamdulillahirobbi'alamin. Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Swt. Tuhan bagi seluruh semesta alam atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini dengan baik.Salawat dan taslim semoga tetap tercurah kepada Rasulullah SAW yang menjadi suri tauladan bagi umat Islam dalam menjalani hidup yang sesungguhnya.

Dalam proses penulisan dan penyelesaian tesis ini, penulis banyak mendapatkan dorongan motivasi, bantuan, dukungan dan arahan dari berbagai pihak, sehingga tesis ini dapat penulis selesaikan dengan baik dan tepat waktu. Oleh karena itu, penulis dengan tulus menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ayahanda **Mustari** dan Ibunda **Rabia** tercinta yang senantiasa memberikan kasih sayang, dorongan, dukungan, do'a, dan materi kepada penulis dalam menuntut ilmu.
2. **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** dan **Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si** yang dengan sabar meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran dalam membimbing dan mengarahkan penulis pada penyusunan tesis.
3. **Prof. Dr. Hj. Aidawayati Rangkuti, MS., Dr. Loeky Haryanto, MS., M.Sc., M.Math,** dan **Dr. Budi Nurwahyu, MS** sebagai tim penguji yang telah memberikan saran dan kritik dalam penyempurnaan tesis

4. Seluruh dosen di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin yang telah mendidik, mengajarkan, membimbing, dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
5. Dekan, Wakil Dekan, Staf Fakultas, dan Staf Jurusan yang selama ini banyak membantu penulis dalam urusan administrasi.
6. Kepada saudara-saudaraku. **Hariani, Tommy Anggriawan,** dan **Ervin Alamsyah** serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan motivasi, dukungan, dan do'a yang tiada batas.
7. Teman-teman seperjuangan mahasiswa Magister Matematika angkatan 2016 atas segala motivasi dan bantuannya selama penulis di kampus Universitas Hasanuddin.
8. Semua pihak yang namanya tidak tercantum tetapi telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

Penulis menyadari dalam penyusunan tesis ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan tesis ini.

Makassar,   Januari 2019

Susi Ekawati

ABSTRAK

SUSI EKAWATI. *Sifat-sifat Nilai Eigen dalam Matriks Quaternion* (dibimbing oleh **Amir** dan **Mawardi**).

Penelitian ini bertujuan menentukan sifat-sifat nilai eigen dalam matriks quaternion.

Menurut Zhang (2007), jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc = 0$ dan λ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$. Dalam tesis ini akan ditunjukkan tiga hal. Pertama, jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc \neq 0$ dan λ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $(\lambda - a) + (\lambda - d) = 0$. Kedua, jika $A = \begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & p \\ s & q & f \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan kondisi tertentu dan λ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $(\lambda - a) + (\lambda - d) + (\lambda - f) = 0$. Dan ketiga, jika $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan kondisi tertentu dan λ adakah nilai eigen kiri dari A, maka $(\lambda - a) + (\lambda - d) + (\lambda - p) + (\lambda - s) = 0$.

Kata Kunci : Quaternion, Determinan Cayley, Nilai Eigen Kiri

ABSTRACT

SUSI EKAWATI. *The Properties of Eigenvalue in the Quaternion Matrices* (Supervised by **Amir** and **Mawardi**).

This research aimed to determine the properties of eigenvalue in the quaternion matrices.

According to Zhang (2007), if $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is a quaternion matrix with $bc = 0$ and λ is the left eigenvalue of A, then $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$. In this thesis three things will be shown. The first, if $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is a quaternion matrix with $bc \neq 0$ and λ is the left eigenvalue of A, then $(\lambda - a) + (\lambda - d) = 0$. The second, if $A = \begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & p \\ s & q & f \end{pmatrix}$ is a quaternion matrix with certain condistions and λ is the left eigenvalue of A, then $(\lambda - a) + (\lambda - d) + (\lambda - f) = 0$. And the third, if $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{pmatrix}$ is a quaternion matrix with certain conditions and λ is the eigenvalue of A, then $(\lambda - a) + (\lambda - d) + (\lambda - p) + (\lambda - s) = 0$.

Keywords : Quaternion, Cayley Determinant, Left Eigenvalue

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti/Keterangan
$\mathbb{H}$	Bilangan Quaternion
λ	Nilai Eigen suatu Matriks
x	Vektor Eigen suatu Matriks
$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H})$	Matriks Quaternion Berordo 2×2
$\mathbb{H}^{n\times n}$	Matriks Quaternion Berordo $n \times n$
$\mathbb{R}$	Bilangan Riil
$\boldsymbol{i}$	Bilangan Imajiner dalam Quaternion
$\boldsymbol{j}$	Bilangan Imajiner dalam Quaternion
$\boldsymbol{k}$	Bilangan Imajiner dalam Quaternion
$A_{m\times n}$	Matriks berordo $m \times n$
a	Bilangan Quaternion a
$\bar{a}$	Konjugat dari Quaternion a
b	Bilangan Quaternion b
$\bar{b}$	Konjugat dari Quaternion b
f	Bilangan Quaternion f
$\bar{f}$	Konjugat dari Quaternion f
p	Bilangan Quaternion p
$\bar{p}$	Konjugat dari Quaternion p
q	Bilangan Quaternion q
$\bar{q}$	Konjugat dari Quaternion q
$\lvert a \rvert$	Norm Quaternion
n	Bilangan Riil yang lebih besar dari nol

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Quaternion merupakan perluasan dari bilangan-bilangan kompleks yang tidak komutatif dan diterapkan dalam mekanika tiga dimensi. Sebagai himpunan, quaternion dilambangkan sebagai $\mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ memiliki tiga jenis operasi yaitu penjumlahan, perkalian skalar, dan perkalian quaternion. Elemen-elemen quaternion disimbolkan sebagai $1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ adalah komponen imajiner) dan dapat dituliskan sebagai kombinasi linier : $a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$ dimana a, b, c, dan d adalah bilangan riil. Persamaan-persamaan lainnya adalah $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, dan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. (Wikipedia, 2017)

Dalam jurnal Zhang (2007) mengatakan bahwa misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc = 0$. Jika λ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$. Farid, dkk (2011) mengatakan bahwa misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H})$ dengan $bc \neq 0$. Jika $\lambda \in \sigma_l(A)$ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a| = |b|$ jika dan hanya jika $|\lambda - b| = |c|$.

Telah diketahui bahwa jika $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan riil ordo 2×2, maka determinan dari matriks A adalah $a_1 b_2 - b_1 a_2$

dan jika $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan riil dengan ordo 3×3, maka determinan dari matriks B adalah $a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 a_3$. Sedangkan berdasarkan definisi determinan Cayley, jika $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan quaternion dengan ordo 2×2, maka determinan dari matriks A adalah $a_1 b_2 - a_2 b_1$ dan jika $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ adalah matriks bilangan quaternion dengan ordo 3×3, maka determinan dari matriks B adalah $a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$. (Aslaksen, 1991)

Misalkan $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{H}$ disebut nilai eigen kiri dari A jika $Ax = \lambda x$ untuk beberapa $x \in \mathbb{H}^n$ yang tak nol atau ekuivalen dengan matriks $(A - \lambda I)$ yang tidak memiliki invers, sehingga $(A - \lambda I)x = 0$. Kemudian jika misalkan $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{H}$ disebut nilai eigen kanan dari A jika $Ax = x\lambda$ untuk beberapa $x \in \mathbb{H}^n$ yang tak nol. (Zhang, 2007)

Dari uraian di atas, peneliti bermaksud melakukan penelitian untuk menyelidiki bagaimana sifat-sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion.

B. Rumusan Masalah

ada penelitian ini, masalah yang akan dibahas adalah sebagai

1. Bagaimana sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion pada $M_{2\times2}(\mathbb{H})$ dengan $bc \neq 0$?
2. Bagaimana sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion pada $M_{3\times3}(\mathbb{H})$ dengan kondisi terdapat entri matriks yang sama dengan nol?
3. Bagaimana sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion pada $M_{3\times3}(\mathbb{H})$ dengan kondisi semua entri matriks tidak ada yang sama dengan nol?
4. Bagaimana sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion pada $M_{4\times4}(\mathbb{H})$ dengan $b_{2\times2} = c_{2\times2} = 0$?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Mengetahui sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion pada $M_{2\times2}(\mathbb{H})$ dengan $bc \neq 0$.
2. Mengetahui sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion pada $M_{3\times3}(\mathbb{H})$ dengan kondisi terdapat entri matriks yang sama dengan nol.
3. Mengetahui sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion pada $M_{3\times3}(\mathbb{H})$ dengan kondisi semua entri matriks tidak ada yang sama dengan nol.
4. Mengetahui sifat nilai eigen terhadap diagonal matriks quaternion pada $M_{4\times4}(\mathbb{H})$ dengan $b_{2\times2} = c_{2\times2} = 0$.

D. Batasan Penelitian

Pada penelitian ini, permasalahan yang dibahas terbatas hanya pada matriks dengan kondisi sebagai berikut:

1. Matriks quaternion pada $M_{2\times 2}(\mathbb{H})$ dengan $bc \neq 0$.
2. Matriks quaternion pada $M_{3\times 3}(\mathbb{H})$ dengan kondisi terdapat entri matriks yang sama dengan nol.
3. Matriks quaternion pada $M_{3\times 3}(\mathbb{H})$ dengan kondisi semua entri matriks tidak ada yang sama dengan nol.
4. Matriks quaternion pada $M_{4\times 4}(\mathbb{H})$ dengan $b_{2\times 2} = c_{2\times 2} = 0$.

E. Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan dan pengetahuan tentang nilai eigen dan vektor eigen quaternion serta dapat dijadikan referensi bagi peneliti lain tentang matriks quaternion.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dikaji beberapa definisi, sifat-sifat, teorema, dan contoh yang akan digunakan dalam membuktikan hasil penelitian.

A. Quaternion

Menurut Shomake (2007) aljabar quaternion diciptakan oleh Hamilton pada tahun 1853 dan dinotasikan dengan $\mathbb{H}$ untuk menghormatinya yang merupakan perluasan bilangan kompleks untuk aljabar empat dimensi.

1. Definisi Quaternion

Quaternion merupakan kombinasi linear skalar riil dan tiga satuan imaginer ortogonal (dilambangkan dengan $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$) dengan koefisien riil yang dapat dituliskan sebagai

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} | q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

dimana elemen $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$ memenuhi aturan perkalian Hamilton berikut ini :

$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1;$

$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k};$

$\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i};$

$\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}.$

t – sifat Quaternion

kut dijelaskan sifat – sifat operasi pada bilangan quaternion :

a. Operasi penjumlahan dan perkalian

Diberikan dua buah quaternion yaitu :

$$a = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

$$b = b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$$

dengan $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Penjumlahan dua buah quternion tersebut adalah

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) + (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

dan

Perkalian dua buah quaternion adalah

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= a_0(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + a_1\boldsymbol{i}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + \\ &\quad a_2\boldsymbol{j}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + a_3\boldsymbol{k}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= (a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k}) + (a_1b_0\boldsymbol{i} + a_1b_1\boldsymbol{i}^2 + a_1b_2\boldsymbol{ij} + \\ &\quad a_1b_3\boldsymbol{ik}) + (a_2b_0\boldsymbol{j} + a_2b_1\boldsymbol{ji} + a_2b_2\boldsymbol{j}^2 + a_2b_3\boldsymbol{jk}) + (a_3b_0\boldsymbol{k} + \\ &\quad a_3b_1\boldsymbol{ki} + a_3b_2\boldsymbol{kj} + a_3b_3\boldsymbol{k}^2) \\ &= a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k} + a_1b_0\boldsymbol{i} - a_1b_1 + a_1b_2k - a_1b_3j + \\ &\quad a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1\boldsymbol{k} - a_2b_2 + a_2b_3\boldsymbol{i} + a_3b_0\boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i} - a_3b_3 \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + \\ &\quad (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)\boldsymbol{j} + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

b. Konjugat dari Quaternion

ka $a = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, maka konjugat dari a adalah

$$\bar{a} = a_0 - a_1\boldsymbol{i} - a_2\boldsymbol{j} - a_3\boldsymbol{k}$$

Contoh :

$a = 2 - 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \rightarrow \ \bar{a} = 2 + 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

c. Norm dari Quaternion

Norm dari quaternion diperoleh dari modulus perkalian quaternion dengan konjugatnya $\bar{a}$.

$$|a| = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Salah satu sifat norm quaternion adalah $|a||b| = |ab|$.

Contoh :

$a = 2 - 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \rightarrow \ |a| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{30}$

d. Invers dari Quaternion

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}$$

Contoh :

$a = 2 - 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \rightarrow \ a^{-1} = \frac{2+3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{30} = \frac{1}{30}(2 + 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$

(Djuddin, 2015)

B. Matriks

1. Definisi Matriks

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. -bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom dinyatakan dengan

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks tidak mempunyai nilai tetapi ukuran. Ukuran matriks disebut ordo yang ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom, maka matriks A berordo $m \times n$.

2. Jenis-jenis Matriks

Adapun jenis-jenis matriks antara lain:

a. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks di mana semua unsurnya nol.

Contoh : $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, yang dinyatakan dengan $A_{m\times n}$, dimana $m = n$, dapat ditulis dengan $A_{n\times n} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. Matriks berordo $n \times n$ disebut juga bujur sangkar ordo n. Dalam hal ini hanya matriks bujur sangkar yang mempunyai elemen diagonal utama dan elemen diagonal kedua.

Contoh : $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c. Matriks Segitiga

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen yang terletak di bawah elemen diagonal utama semua nol. Bentuk umumnya adalah (a_{ij}) dengan $a_{ij} = 0; \forall i > j$.

Contoh : $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen yang terletak di atas elemen diagonal utama semua nol. Bentuk umumnya adalah (a_{ij}) dengan $a_{ij} = 0; \forall i < j$.

Contoh : $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

d. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks bujur sangkar dengan semua elemen-elemen yang bukan elemen diagonal utama adalah nol. Dengan kata lain suatu matriks A berorde $n \times n$ disebut matriks diagonal, jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Contoh : $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

e. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks skalar dengan elemen-elemen gonal utama semuanya sama dengan satu. Bentuk umum matriks identitas dinyatakan dengan $A = (a_{ij})$ dimana $i = j = 1,2, \ldots, n$ dengan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Contoh : $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

f. Matriks Quaternion

Matriks quaternion adalah matriks yang entri-entrinya adalah bilangan quaternion.

Contoh : $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 - \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} & 2 - \boldsymbol{k} \\ 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} & 3 + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \end{pmatrix}$.

3. Determinan Matriks

Determinan adalah susunan bilangan atau simbol yang berbentuk bujur sangkar dan disajikan di antara dua garis tegak. Determinan sebagai satu kesatuan yang mewakili suatu nilai dari matriks yang diberikan. Determinan A dinotasikan dengan $|A|$ atau $\det(A)$.

Jika diketahui matriks A adalah bilangan riil yang berordo 2×2

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

maka determinan matriks A didefinisikan sebagai berikut

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

(Kurniati, 2010)

finisi determinan quaternion oleh Cayley dinotasikan dengan Cdet ebagai berikut

- $\text{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

- $\text{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$

- $\text{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$

Contoh :

Carilah determinan dari matriks A berikut

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} & 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \\ 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} & \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian

Berdasarkan definisi determinan matriks quaternion oleh Cayley diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Cdet} &= (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) - (3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \\ &= (-3 + \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) - (-7 + \boldsymbol{k}) \\ &= 4 + \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

C. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$. λ disebut suatu nilai eigen dari A jika terdapat suatu vektor tak nol x sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. Persamaan $Ax = \lambda x$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$(A - \lambda I)x = 0. \qquad \text{(i)}$$

aan (i) akan mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya λI singular atau secara ekuivalen

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{ii}$$

Jika determinan pada Persamaan (ii) diuraikan, maka diperoleh suatu polinomial berderajat n dalam peubah λ

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Polinomial ini disebut polinomial karakteristik dan Persamaan (ii) disebut persamaan karakteristik untuk matriks A. Akar dari polinomial karakteristik adalah nilai eigen dari A. (Hermana, 2016)

Contoh :

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\ 2 + 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian

Nilai Eigen

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$$

$$\mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\ 2 + 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \lambda & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\ 2 + 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan definisi determinan matriks quaternion oleh Cayley diperoleh

$$\mathrm{Cdet} = (1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \lambda)(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \lambda) - (2 + 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

$$= \left(\lambda^2 - (1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\lambda - \lambda(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + 2(-1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\right) - 4(-1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

$\lambda_0 + \lambda_1\boldsymbol{i} + \lambda_2\boldsymbol{j} + \lambda_3\boldsymbol{k}$, maka

$${}_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_0\lambda_1\boldsymbol{i} + 2\lambda_0\lambda_2\boldsymbol{j} + 2\lambda_0\lambda_3\boldsymbol{k}) - 2(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) -$$

$$(\lambda_0 + \lambda_1)\boldsymbol{i} + 2(\lambda_0 - \lambda_2)\boldsymbol{j} - 2(\lambda_0 + \lambda_3)\boldsymbol{k} - 2(-1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan

- $\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - 2(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) + 2 = 0$
- $2\lambda_0\lambda_1 - 2(\lambda_0 + \lambda_1) - 2 = 0$
- $2\lambda_0\lambda_2 + 2(\lambda_0 - \lambda_2) + 2 = 0$
- $2\lambda_0\lambda_3 - 2(\lambda_0 + \lambda_3) - 2 = 0$

Dari persamaan tersebut diperoleh nilai eigen

$$\lambda = \left(1 + \sqrt{2}\right)(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

$$\lambda = \left(1 - \sqrt{2}\right)(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).$$

Vektor Eigen

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \lambda & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\ 2 + 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = \left(1 + \sqrt{2}\right)(1 + i - j + k)$, maka

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\ 2 + 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} & -\sqrt{2}(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -\sqrt{2}(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) & 1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$$-\sqrt{2}(1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})x_1 + (1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})x_2 = 0 \rightarrow \sqrt{2}x_1 = x_2$$

Maka diperoleh vektor eigen : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = (1+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ (2+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ (2+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Untuk $\lambda = (1-\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$, maka

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & \sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} \sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$$\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})x_1 + (1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})x_2 = 0 \rightarrow \sqrt{2}x_1 = -x_2$$

Maka diperoleh vektor eigen : $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Uji

$Ax = \lambda x$

$$\begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \\ 2+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} & 1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = (1-\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (-1+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ (-2+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \\ (-2+\sqrt{2})(1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Teorema :

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks quaternion dengan $bc = 0$. Jika λ adalah nilai eigen kiri dari A, maka $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$.

an bahwa

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} & b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} \\ c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k} & d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

$\text{Det}\,(A - \lambda I) = 0$

$(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - \lambda)(d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k} - \lambda) - (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) = 0$

Telah diketahui bahwa $bc = 0$, sehingga

$(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - \lambda)(d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k} - \lambda) = 0$

Dari persamaan tersebut diperoleh nilai eigen

$\lambda = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$

$\lambda = d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k}$

Kemudian perhatikan bahwa

- Untuk $\lambda = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$

  $|\lambda - a| = |a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})| = 0$

  $|\lambda - d| = |a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} - (d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k})|$

  $|\lambda - a||\lambda - d| = 0$

- Untuk $\lambda = d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k}$

  $|\lambda - a| = |d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})|$

  $|\lambda - d| = |d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k} - (d_0 + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k})| = 0$

  $|\lambda - a||\lambda - d| = 0$

Sehingga jelas bahwa $|\lambda - a||\lambda - d| = |b||c|$.