

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
DALAM MODEL MATEMATIKA
DINAMIKA KORUPSI**

FITRI AMALYAH

H022191003



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

2020



Optimization Software:
www.balesio.com

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
DALAM MODEL MATEMATIKA
DINAMIKA KORUPSI**

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi
Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

FITRI AMALYAH

Kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2020



TESIS

ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
DALAM MODEL MATEMATIKA DINAMIKA KORUPSI

Disusun dan diajukan oleh

FITRI AMALYAH

Nomor Pokok H022191003

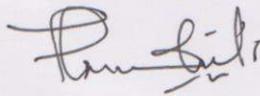
Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis

Pada tanggal 07 Oktober 2020

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

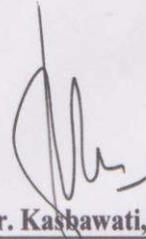
Menyetujui

Komisi Penasehat,



Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.

Ketua



Dr. Kasrawati, S.Si., M.Si.

Anggota

Ketua Program Studi
Magister Matematika,



Dr. Muhammad Zakir, M.Si.

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin,



Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.



LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Fitri Amalyah

Nomor Mahasiswa : H022191003

Program Studi : Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 07 Oktober 2020

Yang menyatakan



Fitri Amalyah



PRAKATA

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin.

Kalimat yang tiada hentinya penulis hanturkan kepada-Nya yang membuat hati berderai air mata bahagia karena syukur pada-Nya. Allah Subhanahu Wata'ala, zat yang Maha memberi segalanya, yang menggerakkan hati dan pikiran, serta menggelorakan semangat. Shalawat dan salam senantiasa penulis kirimkan kepada Nabiullah Muhammad SAW yang mengajarkan dan membimbing umat-umatnya ke arah yang benar, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "**Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal dalam Model Matematika Dinamika Korupsi**".

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika Terapan, Departemen Matematika, Program Pascasarjana, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin Makassar. Dalam penyelesaian tesis ini diperlukan proses yang sangat panjang, dengan banyak tantangan dan hambatan mulai dari penyusunan hingga akhirnya tesis ini dapat dirampungkan.

Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada kedua orang tua tercinta dan tersayang: **Nenek Hj. Rukiah Mustafa, Kakek (alm.) Mustafa dg. Bunga, Ibunda Hastuti, dan Ayahanda Musjaya Mustafa, S.E.** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang mengalir tiada henti dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Ucapan terima kasih juga kepada adik-adik tercinta **Miftah Yusroh Wijaya dan Muhammad Luthfi Yusron Wijaya** serta seluruh keluarga besar

alu senantiasa memberikan doa dan dukungan bagi penulis dalam
aikan tesis ini.



Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. selaku pembimbing utama yang telah meluangkan waktunya untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat, dan arahnya dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua yang telah meluangkan waktunya untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat, dan arahnya dalam menyelesaikan tesis ini.
3. Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc., Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si, dan Dr. Firman, S.Si, M.Si. selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan dalam penyempurnaan tulisan ini.
4. Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku Ketua Program Studi Magister Matematika yang senantiasa memberi bimbingan dan semangat dalam menyelesaikan tesis ini.
5. Rektor Univesitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta seluruh staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
6. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya, seluruh dosen dan staf administrasi pada Program Studi S2 Matematika Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan.
7. Orang tersayang Afrizal Ode, yang juga senantiasa memberikan kasih sayang, perhatian, pengertian, motivasi, saran, semangat, dan juga menjadi pendengar setia segala keluh-kesah penulis dalam menyelesaikan tesis ini, $\sqrt{-1} < 3U$.
8. Teman-teman angkatan 2019 yaitu Astri, Kak Noni, Kak Nita, Kak Ica, Kak Syam, Kak Nola, Ade, kak Amira, kak Pute, dan kak Utari yang selalu bantu, menyemangati, dan juga tempat bertukar curahan isi hati dalam menyelesaikan tesis ini.



9. Semua pihak yang telah membantu penulis dan tidak dapat dituliskan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa penulisan tesis ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis senantiasa menerima kritik dan saran untuk menyempurnakan penulisan tesis ini. Semoga hasil tesis ini memberikan kontribusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan memberi informasi ilmiah secara umum.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Makassar, 07 Oktober 2020

Yang Menyatakan,

Fitri Amalyah



ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang model matematika penyebaran perilaku korupsi yang ada di masyarakat dengan mengasumsikan bahwa perilaku korupsi tersebut dapat menyebar seperti penyakit menular, sehingga model dapat dikembangkan dengan mengadopsi sifat-sifat dari model epidemik. Penelitian ini merupakan pengembangan dan penggabungan model dari penelitian yang telah dilakukan oleh Athithan, dkk (2018) dan O.M. Nathan & Jakob (2019), sehingga model matematika dinamika korupsi menjadi empat kompartemen yaitu *Corruption-Susceptible Class (S)*, *Corrupted Class (C)*, *Political Corrupt Class (P)*, dan *Recovered from Corruption Class (R)*. Dalam model ini juga diberikan dua bentuk kontrol optimal yaitu memaksimalkan peran Komisi Pemberantasan Korupsi (KPK) dalam menindak individu koruptor politik dan memaksimalkan hukuman yang akan diberikan kepada individu koruptor politik. Masalah kontrol optimal tersebut diselesaikan dengan menggunakan prinsip minimum *Pontryagin* dan dilanjutkan dengan metode *forward-backward sweep* untuk memperoleh solusi optimal secara numerik. Berdasarkan hasil simulasi numerik yang telah dilakukan, diperoleh jumlah koruptor politik tanpa adanya penerapan kontrol awalnya mencapai sebanyak 1.992.729 koruptor namun dapat ditekan menjadi hanya 707.512 koruptor dengan diterapkannya kontrol yang optimal. Hal ini menunjukkan bahwa dengan adanya penerapan kontrol yang optimal tersebut berhasil menurunkan sebanyak 64,49% jumlah koruptor politik.

Kata Kunci: Model Matematika, Dinamika Korupsi, Prinsip Minimum *Pontryagin*, Metode *Forward-Backward Sweep*, Kontrol Optimal.



ABSTRACT

This study discusses a mathematical model of the spread of corrupt behavior in society by assuming that corrupt behavior can spread like an infectious disease, so that the model can be developed by adopting the characteristics of the epidemic model. This research is a development and combining model from research conducted by Athithan, et al. (2018) and O.M. Nathan & Jakob (2019), so that the mathematical model of the dynamics of corruption becomes four compartments, namely Corruption-Susceptible Class (S), Corrupted Class (C), Political Corrupt Class (P), and Recovered from Corruption Class (R). In this model, two forms of optimal control are also provided, namely maximizing the role of the Corruption Eradication Commission (KPK) in taking action against individual political corruptors and maximizing the punishment that will be given to individual political corruptors. The optimal control problem is solved by using the Pontryagin minimum principle followed by the forward-backward sweep method to obtain a numerically optimal solution. Based on the results of numerical simulations that have been carried out, it was found that the number of political corruptors without the implementation of control initially reached 1,992,729 corruptors but could be reduced to only 707,512 corruptors by implementing optimal control. This shows that the implementation of optimal control has succeeded in reducing 64.49% of the number of political corruptors.

Keywords: *Mathematical Model, Corruption Dynamics, Pontryagin Minimum Principles, Forward-Backward Sweep Method, Optimal Control.*



DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	i
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Studi <i>Review</i> Perkembangan Pemodelan Dinamika Korupsi	6
2.2 Pemodelan Matematika.....	8
2.3 Sistem Persamaan Diferensial.....	9
2.4 Titik Keseimbangan.....	11
2.5 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan	11
2.6 Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i>	12
2.7 Bilangan Reproduksi Dasar	14
2.8 Masalah Kontrol Optimal dan Syarat Perlu Keoptimalan	15
2.9 Prinsip Minimum <i>Pontryagin</i>	20
2.10 Metode <i>Forward-Backward Sweep</i>	25
2.11 Model Matematika Dinamika Korupsi.....	27
BAB III METODE PENELITIAN	
3.1 Identifikasi Masalah	30
3.2 Studi Literatur	30
3.3 Formulasi Model Matematika Dinamika Korupsi.....	30
3.4 Analisis Kestabilan	31
3.5 Formulasi Model Kontrol Optimal	31
3.6 Prinsip Minimum <i>Pontryagin</i>	31
3.7 Simulasi Numerik	31
3.8 Diskusikan Kesimpulan	31
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	
4.1 Pengembangan Model Matematika Dinamika Korupsi.....	32
4.2 Analisis Kestabilan Model.....	37



4.3 Bilangan Reproduksi Dasar	40
4.4 Analisis Kestabilan Model	42
4.5 Formulasi Kontrol Optimal	45
4.6 Penyelesaian Kontrol Optimal	46
4.7 Simulasi Numerik	52
BAB V PENUTUP	
5.1 Kesimpulan	64
5.2 Saran.....	65
DAFTAR PUSTAKA	66
LAMPIRAN	68



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Sifat Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen.....	12
Tabel 4.1 Daftar Variabel dan Parameter Model Dinamika Korupsi.....	35
Tabel 4.2 Nilai Parameter untuk Simulasi Model.....	52



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Proses Pemodelan Matematika	8
Gambar 2.2 Perbandingan Grafik Kontrol Optimal dan State Optimal	17
Gambar 2.3 Diagram Kompartemen Dinamika Korupsi oleh Athithan, dkk	28
Gambar 2.4 Diagram Kompartemen Dinamika Korupsi oleh Nathan & Jakob	29
Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Matematika Dinamika Korupsi	34
Gambar 4.2 Grafik Perubahan Individu Rentan Korupsi dalam Populasi terhadap Waktu ($t = 40$ tahun).....	53
Gambar 4.3 Grafik Perubahan Individu Rentan Korupsi dalam Populasi terhadap Waktu ($t = 25$ tahun).....	54
Gambar 4.4 Grafik Perubahan Individu Korupsi Biasa dalam Populasi terhadap Waktu ($t = 40$ tahun).....	55
Gambar 4.5 Grafik Perubahan Individu Korupsi Politik dalam Populasi terhadap Waktu ($t = 40$ tahun).....	56
Gambar 4.6 Grafik Perubahan Individu Korupsi Politik dalam Populasi terhadap Waktu ($t = 25$ tahun).....	56
Gambar 4.7 Grafik Perubahan Individu yang telah Berhenti dari Korupsi dalam Populasi terhadap Waktu ($t = 40$ tahun)	58
Gambar 4.8 Grafik Perubahan Individu yang telah Berhenti dari Korupsi dalam Populasi terhadap Waktu ($t = 20$ tahun)	58
Gambar 4.9 Grafik Perbandingan Fungsi Kontrol Optimal $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$	60



DAFTAR SIMBOL

Simbol	Nama / Arti
φ	Phi (<code>\varphi</code>)
ψ	Psi (<code>\psi</code>)
Λ	Lambda (<code>\lambda</code>)
μ	Mu (<code>\mu</code>)
τ	Tau (<code>\tau</code>)
γ	Gamma (<code>\gamma</code>)
σ	Sigma (<code>\sigma</code>)
η	Eta (<code>\eta</code>)
δ	Delta (<code>\delta</code>)



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program 1 – simulasi.m	68
Lampiran 2. Program 2 – simulasi_thesis.m	79
Lampiran 3. Jumlahan Riemann pada Excel dengan 500 Iterasi	82



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Korupsi bukan hal yang baru bagi bangsa Indonesia. Tanpa disadari, korupsi muncul dari kebiasaan yang dianggap lumrah dan wajar oleh masyarakat umum. Seperti memberi hadiah kepada pejabat, pegawai negeri, atau keluarganya sebagai imbal jasa sebuah pelayanan. Korupsi telah dianggap sebagai hal yang biasa, dengan dalih “Sudah Sesuai Prosedur”. Koruptor tidak lagi memiliki rasa malu dan takut, sebaliknya memamerkan hasil korupsinya secara demonstratif. Politisi tidak lagi mengabdikan kepada konstituennya. Partai Politik bukannya dijadikan alat untuk memperjuangkan kepentingan rakyat banyak, melainkan menjadi ajang untuk mengeruk harta dan ambisi pribadi.

Menurut Undang-Undang nomor 19 tahun 2019, meningkatnya tindak pidana korupsi yang tidak terkendali akan membawa bencana, tidak hanya terhadap kehidupan perekonomian nasional, tetapi juga pada kehidupan berbangsa dan bernegara pada umumnya. Tindak pidana korupsi yang meluas dan sistematis juga merupakan pelanggaran terhadap hak-hak ekonomi masyarakat, sehingga semua tindak pidana korupsi tidak lagi dapat digolongkan sebagai kejahatan biasa melainkan telah menjadi suatu kejahatan luar biasa. Begitupun dalam upaya pemberantasannya tidak lagi dapat dilakukan secara biasa, tetapi dituntut cara-cara yang luar biasa pula.

Pembaruan hukum dilakukan agar pencegahan dan pemberantasan tindak pidana korupsi berjalan secara efektif dan terpadu, sehingga dapat mencegah dan mengurangi kerugian negara yang terus bertambah akibat tindak pidana korupsi. Penguatan Komisi Pemberantasan Korupsi (KPK) dalam kegiatan pencegahan bukan berarti kegiatan pemberantasan tindak pidana korupsi diabaikan, justru adanya penguatan tersebut dimaksudkan agar kegiatan Komisi Pemberantasan

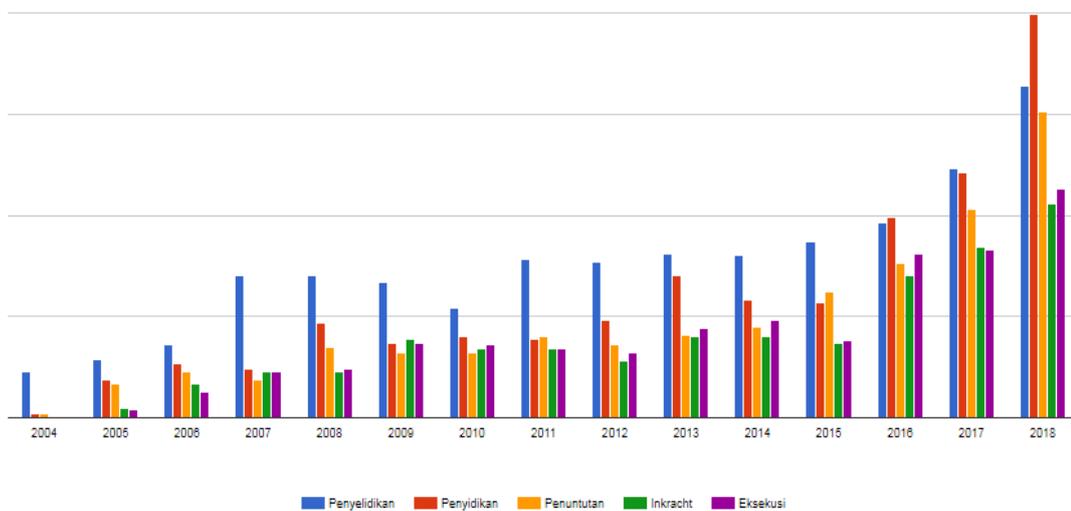
dalam menjalankan tugas dan wewenangnya semakin baik dan efisien. Pembaruan hukum juga dilakukan dengan menata kelembagaan Pemberantasan Korupsi dalam penguatan pencegahan dan penindakan,



sehingga timbul kesadaran kepada penyelenggara negara dan masyarakat untuk tidak melakukan tindak pidana korupsi yang dapat merugikan keuangan negara.

Indonesia *Corruption Watch* (ICW) menyebut nilai kerugian negara akibat korupsi di Indonesia sepanjang tahun 2018 mencapai Rp 9,2 triliun. Angka ini dikumpulkan ICW dari data data putusan perkara korupsi yang dikeluarkan oleh pengadilan di tingkat pengadilan negeri, pengadilan tinggi, serta Mahkamah Agung.

Update 31 Desember 2018



Sumber: acch.kpk.go.id/id/statistik/tindak-pidana-korupsi

Rekapitulasi Tindak Pidana Korupsi per 31 Desember 2018, di tahun 2018 KPK melakukan penanganan tindak pidana korupsi dengan rincian: penyelidikan 164 perkara, penyidikan 199 perkara, penuntutan 151 perkara, inkracht 106 perkara, dan eksekusi 113 perkara.

PENINDAKAN	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Penyelidikan	23	29	36	70	70	67	54	78	77	81	80	87	96
Penyidikan	2	19	27	24	47	37	40	39	48	70	56	57	99
Penuntutan	2	17	23	19	35	32	32	40	36	41	50	62	76
Inkracht	0	5	14	19	23	37	34	34	28	40	40	38	71
Eksekusi	0	4	13	23	24	37	36	34	32	44	48	38	81

acch.kpk.go.id/id/statistik/tindak-pidana-korupsi



Dinamika pertambahan jumlah pelaku korupsi dapat diamati dengan memodelkannya ke dalam bentuk pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan konstruksi matematis yang didesain untuk memahami suatu fenomena atau sistem yang terjadi dalam kehidupan. Pemodelan matematika dapat berupa suatu grafik, simbol-simbol matematika, simulasi ataupun eksperimen. Pemodelan matematika yang merupakan tiruan dari suatu fenomena nyata adalah hasil dari proses yang tidak lepas dari asumsi-asumsi dan penyederhanaan (Toaha, 2013). Dengan memanfaatkan suatu persamaan matematika diharapkan diperoleh langkah-langkah efektif yang dapat ditempuh dalam mengatasi korupsi.

Beberapa penelitian sebelumnya telah memodelkan masalah yang berkaitan dengan korupsi ke dalam model matematika. Diantaranya dilakukan oleh (Waykar, 2013) yang mengembangkan sebuah model matematika korupsi pada masyarakat yang berbasis persamaan diferensial untuk mengukur tingkat korupsi. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Nikolaev, 2014) yang memodelkan penindakan korupsi menggunakan pendekatan teori permainan dalam menangani korupsi. Pada tahun 2018, (Athithan, 2018) memodelkan dinamika korupsi ke dalam bentuk model matematika deterministik dan memperluasnya ke masalah kontrol optimal. Di tahun yang sama, (Legesse Lemecha, 2018) mengembangkan model matematika korupsi dengan mempertimbangkan kesadaran yang diciptakan oleh antikorupsi dan konseling di penjara. Penelitian lain juga dilakukan oleh (O. M. Nathan, 2019) yang mengembangkan model matematika korupsi dengan membagi kompartemen korupsi menjadi dua kelas yaitu *corrupted class* dan *corrupt political/sympathesizer class*. Dari beberapa penelitian tersebut disimpulkan bahwa kesadaran diri dan takut akan hukuman bisa membantu dalam mengurangi tingkat korupsi di masyarakat.

Model matematika deterministik akan digunakan dalam penelitian ini untuk mempelajari bagaimana penyebaran perilaku korupsi yang ada di masyarakat. Hal ini diasumsikan bahwa perilaku korupsi di masyarakat dapat menyebar seperti

menular, sehingga model dapat dibangun dengan mengadopsi sifat-sifat model epidemik. Model epidemik adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui perilaku penyebaran penyakit menular. Salah satu model



epidemi yang akan dijadikan dasar pada penelitian ini adalah model epidemi SIR (*Susceptible Infected Recover*).

Pengembangan model dalam penelitian ini dilakukan berdasarkan model matematika korupsi yang telah dikembangkan oleh (Athithan, 2018) dan (O. M. Nathan, 2019), yaitu membagi kompartemen korupsi menjadi dua kelas, menambahkan peran Komisi Pemberantasan Korupsi, dan dilanjutkan ke masalah kontrol optimal dimana prinsip minimum *Pontryagin* digunakan untuk menunjukkan efek kontrol optimal yang diberikan.

Berdasarkan uraian tersebut, penulis akan mengkaji dan menganalisis permasalahan korupsi dalam sebuah tulisan dengan judul:

“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal dalam Model Matematika Dinamika Korupsi”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengembangkan model matematika dinamika korupsi?
2. Bagaimana menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika dinamika korupsi?
3. Bagaimana menentukan kontrol optimal dari model matematika dinamika korupsi dengan faktor kontrol berupa penindakan korupsi politik oleh Komisi Pemberantasan Korupsi (KPK) dan upaya untuk memicu penyembuhan diri individu koruptor dari perilaku korupsi politik?
4. Bagaimana menentukan solusi optimal dari masalah optimasi model matematika dinamika korupsi melalui metode *forward-backward sweep*?
5. Bagaimana menganalisis perbandingan solusi numerik model matematika dinamika korupsi tanpa kontrol optimal dan dengan kontrol optimal?



1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengembangkan model matematika dinamika korupsi.
2. Menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan pada model matematika dinamika korupsi.
3. Memperoleh kontrol optimal dari model matematika dinamika korupsi dengan faktor kontrol penindakan oleh Komisi Pemberantasan Korupsi (KPK) dan upaya untuk memicu penyadaran diri individu koruptor dari perilaku korupsi politik.
4. Memperoleh solusi optimal dari masalah optimasi model matematika dinamika korupsi melalui metode *forward-backward sweep*.
5. Menganalisis perbandingan hasil simulasi numerik model matematika dinamika korupsi tanpa kontrol optimal dan dengan kontrol optimal.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat berupa gambaran pengetahuan tentang model dinamika korupsi serta pengendalian optimalnya dengan faktor kontrol berupa penindakan Komisi Pemberantasan Korupsi (KPK) dan upaya untuk memicu penyembuhan diri individu koruptor dari perilaku korupsi politik. Hasil penelitian ini diharapkan dapat dijadikan referensi dalam mengontrol kasus korupsi politik, terutama kasus korupsi politik yang ada di Indonesia.

1.5 Batasan Masalah

Model matematika dinamika korupsi yang digunakan dibatasi pada masalah korupsi politik yang ditangani oleh KPK. Populasi dibagi menjadi empat kompartemen yaitu *Corruption-Susceptible Class (S)*, *Corrupted Class (C)*, *Corrupt Class (P)*, dan *Recovered from Corruption Class (R)*.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Studi *Review* Perkembangan Pemodelan Dinamika Korupsi

Beberapa penelitian sebelumnya telah memodelkan masalah yang berkaitan dengan korupsi ke dalam model matematika. Diantaranya dilakukan oleh (Waykar, 2013) yang mengembangkan sebuah model matematika korupsi pada masyarakat yang berbasis persamaan diferensial untuk mengukur tingkat korupsi. Penelitian ini menyimpulkan jika populasi pertumbuhan akan meningkat secara eksponensial maka kuantitas korupsi akan meningkat secara eksponensial juga dan pertumbuhan korupsi tergantung pada konstanta *Mathematical E-virus* K . Ketika $K > 0$, pertumbuhan (+ve) korupsi akan meningkat ke tingkat yang tinggi dan pada saat itu perkembangan masyarakat di segala bidang akan menurun. Ketika kita akan mengontrol konstanta *Mathematical E-virus* K yaitu $K \leq 0$, korupsi (+ve) akan berkurang menjadi tingkat korupsi konstan matematis, pada saat itu perkembangan masyarakat akan meningkat di segala bidang atau negara mana pun di dunia.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Nikolaev, 2014) yang memodelkan penindakan korupsi menggunakan pendekatan teori permainan dalam menangani korupsi. Dalam model yang diusulkan, peneliti menerapkan pendekatan teori permainan untuk memeriksa organisasi optimal dari struktur hirarki yang menegakkan perilaku jujur dari agen yang diaudit dan auditor. Inspeksi dilakukan oleh inspektur yang jujur, yang selalu melakukan audit yang jujur, dan oleh apa yang disebut inspektur rasional, yang menerima suap ketika dirasa menguntungkan. Pengawas inspeksi memiliki informasi tentang proporsi pengawas yang jujur di setiap tingkat audit dan menggunakan informasi ini untuk mengurangi biaya penegakan perilaku jujur.

Pada tahun 2018, (Athithan, 2018) memodelkan dinamika korupsi ke dalam

model matematika deterministik dan memperluasnya ke masalah kontrol. Pada penelitian ini, difokuskan pada kesadaran, ketakutan hukum dan pemberitaan negatif oleh media dan positif citra, serta kebulatan tekad



di antara orang-orang yang dapat membantu mengurangi tingkat korupsi di masyarakat. Hasil analisis yang diperoleh dalam penelitian ini mengungkapkan bahwa dua kesetimbangan non-negatif dimungkinkan untuk sistem, satu adalah bebas korupsi (E^0) yang selalu ada dan yang lainnya adalah *endemic equilibrium* (E^*) yang hanya ada ketika $R_0 > 1$. Peneliti menunjukkan bahwa (E^0) bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$ dan (E^*) bersifat stabil asimtotik lokal kapan pun itu ada. Peneliti juga memperluas model ke model kontrol optimal dengan mempertimbangkan parameter yang sesuai dengan tingkat kesembuhan diri sebagai parameter kontrol optimal dan hasil yang diperoleh memprediksi bahwa kontrol optimal menawarkan hasil yang lebih baik daripada kontrol konstan. Lebih lanjut, peneliti dapat menyatakan bahwa angka kesembuhan diri dapat ditingkatkan dengan memberikan tekanan psikologis melawan korupsi kepada seseorang melalui media atau iklan dan bisa membantu mengurangi korupsi yang ada di masyarakat secara signifikan.

Di tahun yang sama, (Legesse Lemecha, 2018) mengembangkan model matematika korupsi dengan mempertimbangkan kesadaran yang diciptakan oleh antikorupsi dan konseling di penjara. Model ini terbukti baik secara epidemiologis dan matematis. Peneliti menunjukkan bahwa semua solusi model adalah positif dan dibatasi dengan kondisi awal dalam himpunan bermakna tertentu. Keberadaan titik ekuilibrium bebas korupsi dan endemik unik diselidiki dan jumlah reproduksi dasar dihitung. Kemudian, peneliti mempelajari stabilitas asimtotik lokal dari titik-titik kesetimbangan model. Analisis menunjukkan bahwa sistem tersebut memiliki titik ekuilibrium bebas korupsi yang stabil asimtotik secara lokal ketika jumlah reproduksi kurang dari satu dan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal ketika jumlah reproduksi lebih besar dari satu serta hasil simulasi menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis.

Penelitian lain juga dilakukan oleh (O. M. Nathan, 2019) yang mengembangkan model matematika korupsi yang mengacu pada proses yang berkaitan dengan penyalahgunaan kepercayaan atau kantor publik untuk beberapa tujuan pribadi. Peneliti mengungkapkan bahwa korupsi menjadi ancaman bagi pembangunan dan pertumbuhan nasional terutama bila tidak ada kemauan

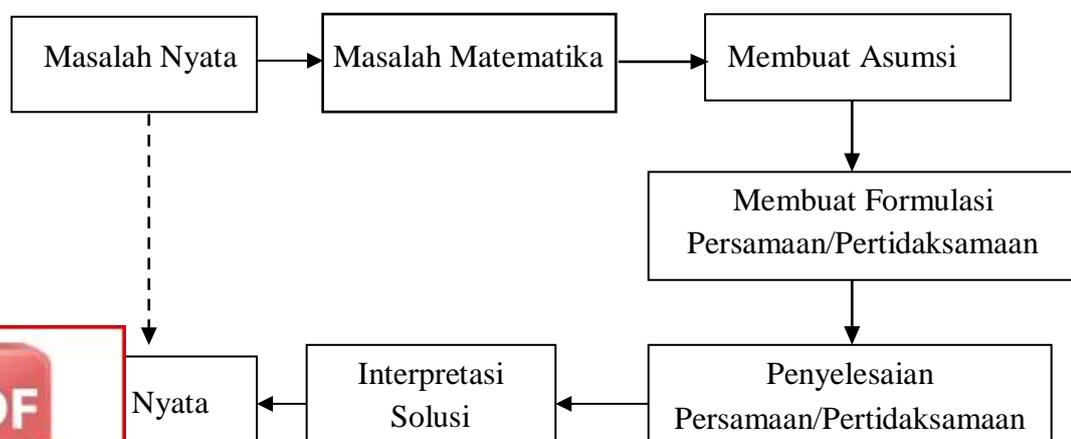


politik untuk melakukannya. Inisiatif pencegahan dan pelepasan adalah bagian dari strategi EACC yang digunakan untuk memberantas korupsi. Strategi pencegahan bertujuan untuk menghentikan atau mengecilkan hati warga yang terlibat dalam korupsi. Strategi pelepasan berupaya mereformasi koruptor individu dan untuk merebut kembali sumber daya yang dicuri kembali ke kucing publik. Peneliti menjelaskan bahwa pencegahan dan strategi pelepasan secara matematis menggunakan model kompartemen epidemiologi. Strategi pencegahan dan pelepasan dimodelkan menggunakan parameter model. Populasi beresiko mengadopsi ideologi korupsi dibagi menjadi tiga kompartemen: $S(t)$ adalah rentan kelas, $C(t)$ adalah kelas korupsi, dan $M(t)$ adalah kelas politik/simpatikan korupsi. Model menunjukkan dinamika ambang yang dicirikan oleh bilangan reproduksi dasar R_0 . Ketika $R_0 < 1$, sistem memiliki titik ekuilibrium tunggal yang stabil secara asimtotik. Untuk $R_0 > 1$, sistem memiliki titik ekuilibrium tambahan yang dikenal sebagai endemik, yang stabil asimtotik secara global. Hasil ini ditetapkan dengan menerapkan fungsi *Lyapunov* dan invariansi prinsip *LaSalle*.

2.2 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan suatu studi tentang konsep matematika yang merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan di dunia nyata ke dalam pernyataan matematika.

Terdapat beberapa tahap dalam menyusun model matematika yang dapat dinyatakan dalam alur diagram berikut:



Gambar 2.1 Proses Pemodelan Matematika



Berdasarkan **Gambar 2.1** alur proses pemodelan matematika diatas dapat dijelaskan sebagai berikut (Widowati, 2007):

1. Memodelkan masalah dunia nyata ke dalam pengertian matematika
Pada langkah ini, dilakukan identifikasi variabel-variabel dari masalah nyata yang akan dimodelkan dan membentuk beberapa hubungan antar variabel-variabel tersebut.
2. Membuat asumsi
Dalam mengonstruksi model, perlu dibuat asumsi. Proses pembuatan asumsi menggambarkan alur pemikiran sehingga model dapat berjalan dan mengarah pada situasi fisik sehingga masalah dapat diselesaikan.
3. Menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan
Pada langkah ini dilakukan formulasi asumsi dan hubungan antara variabel-variabel yang dibentuk menjadi sebuah persamaan atau sistem persamaan matematika. Setelah persamaan tersebut diformulasikan, langkah berikutnya yaitu menyelesaikan persamaan. Dalam proses penyelesaian masalah perlu berhati-hati dan fleksibel agar persamaan tersebut realistik.
4. Interpretasi solusi
Langkah terakhir yaitu interpretasi solusi yang merupakan langkah yang menghubungkan formulasi matematika kembali ke masalah nyata sehingga didapatkan suatu solusi nyata. Hal ini dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya dengan grafik untuk menggambarkan solusi yang diperoleh.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Berdasarkan bentuk diferensial yang dikandungnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua macam, yaitu (Finizo & Ladas, 1982):

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan biasa atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial biasa terbagi atas dua, yaitu persamaan diferensial biasa linear dan non



2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan tersebut haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas.

Orde (tingkat) suatu persamaan diferensial yaitu turunan tertinggi yang terdapat pada persamaan diferensial tersebut. Secara umum persamaan diferensial biasa orde- n dinyatakan dalam:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

dimana F merupakan fungsi dengan variabel bebas x dan variabel terikat y .

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar sama dengan 2. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linear apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan linear yang saling terkait. Sedangkan koefisiennya bisa berupa konstanta ataupun fungsi. Sedangkan sistem persamaan diferensial dikatakan non linear apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan non linear yang saling terkait (Ayres & Ault, 1995).

2.4 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan atau biasa disebut solusi kesetimbangan merupakan keadaan dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Suatu titik $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ adalah titik kesetimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{x}^*) = 0$ dengan:



$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

atau dengan kata lain, jika $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, maka (Wiggins, 2003):

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \mathbf{0}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

2.5 Linearisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan dilakukan untuk menganalisis kestabilan sistem persamaan diferensial non linear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan.

Definisi 2.1 (Hale, 1991): *Jika \mathbf{x}^* merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, maka persamaan diferensial linear:*

$$\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{x}^*)\mathbf{x} \quad (2.4)$$

disebut persamaan linearisasi dari vector field f pada titik kesetimbangan \mathbf{x}^* di mana $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dan

$$J(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$J(\mathbf{x}^*)$ disebut sebagai matriks Jacobi dari f di titik \mathbf{x}^* .

Kestabilan titik kesetimbangan \mathbf{x}^* dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu λ yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik:

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (2.6)$$



dengan I adalah suatu matriks identitas. Dalam Tabel 2.1 diberikan beberapa jenis sifat kestabilan yang dikategorikan berdasarkan jenis nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik (2.6) (Boyce, 2012).

Tabel 2.1 Sifat Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen

No.	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
1.	$\lambda_i > \lambda_j > 0$	Tidak Stabil
2.	$\lambda_i < \lambda_j < 0$	Stabil Asimtotik
3.	$\lambda_i < 0 < \lambda_j$	Tidak Stabil
4.	$\lambda_i = \lambda_j > 0$	Tidak Stabil
5.	$\lambda_i = \lambda_j < 0$	Stabil Asimtotik
6.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic$	$r > 0$, Tidak Stabil
7.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic$	$r < 0$, Stabil Asimtotik
8.	$\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic$	Stabil

Sumber: (Boyce, 2012)

2.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Pengujian kestabilan dapat menggunakan kriteria jenis nilai eigen, namun kadang ditemukan kesulitan dalam mencari jenis nilai eigen dari akar persamaan karakteristik, apalagi pada persamaan karakteristik yang berorde tinggi. Sehingga, dibutuhkan suatu kriteria untuk menjamin nilai akar persamaan karakteristik bernilai positif atau negatif. Salah satu kriteria yang efektif untuk menjamin jenis nilai eigen adalah kriteria *Routh-Hurwitz*. Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz*

adalah suatu metode untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem dengan memperhatikan nilai koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akarnya secara langsung.



Teorema 2.1 Diberikan persamaan karakteristik:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.7)$$

dengan $a_i, i = 1, \dots, n$ adalah bilangan real. Matriks Hurwitz dinotasikan dengan H_n , yang berisi koefisien-koefisien a_i dari persamaan karakteristik (2.7). Masing-masing n matriks Hurwitz dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

dengan $a_i = 0$, saat $i > n$.

Akar-akar dari persamaan karakteristik (2.7) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan dari matriks Hurwitz bernilai positif atau $\det(H_n) > 0, n = 1, 2, \dots, n$. Sebagai contoh, diberikan persamaan kubik:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (2.8)$$

Dari Persamaan (2.8) maka dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar Persamaan (2.8) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $\det(H_1) > 0, \det(H_2) > 0$, dan $\det(H_3) > 0$. Dengan demikian didapatkan kondisi sebagai berikut:

1. $\det(H_1) > 0 = |a_1| > 0$ atau $a_1 > 0$,

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \text{ yaitu } a_1 a_2 > 0. \text{ Karena } a_1 > 0 \text{ maka } a_2 > 0,$$



3. $\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0$, sehingga $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0$ atau $a_3(a_1 a_2 - a_3) > 0$, dengan demikian didapatkan dua kondisi yaitu:
- $a_3 > 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) > 0$
 - $a_3 < 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) < 0$.

Untuk kondisi (b) tidak mungkin terjadi sebab jika $a_3 < 0$ maka tidak mungkin $(a_1 a_2 - a_3) < 0$ sebab $a_1 a_2 > 0$. Dengan demikian, akar-akar dari persamaan karakteristik (2.8) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $a_3 > 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) > 0$. Titik kesetimbangan pada persamaan karakteristik (2.8) memenuhi kondisi (Merkin, 1997):

- $a_1 > 0$,
- $a_2 > 0$,
- $a_3 > 0$,
- $a_1 a_2 > a_3$.

2.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang dilambangkan dengan R_0 , didefinisikan sebagai ekspektasi banyaknya kasus sekunder yang timbul akibat dari kasus primer dalam populasi yang virgin. Populasi yang virgin adalah populasi rentan yang tidak memuat individu yang terinfeksi. R_0 berfungsi sebagai parameter ambang batas yang memprediksi tingkat penyebaran suatu penyakit (Diekmann, 1990).

Model epidemiologi mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan tak endemik dan titik kesetimbangan endemik. Jika $R_0 < 1$ maka dalam populasi tidak terjadi epidemik sehingga untuk jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka dalam populasi telah terjadi epidemik dan apabila tidak segera dilakukan penanganan akan menjadi suatu endemik (wabah). Untuk $R_0 = 1$ kestabilan dari kedua titik kesetimbangan tidak dapat ditentukan. R_0 dapat diperoleh melalui syarat kesetimbangan pada titik tak endemik (Watmough, 2002).



Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varphi_i(x, y) - \psi_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{y} &= \eta_j(x, y), \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

dengan φ_i adalah laju infeksi sekunder yang bertambah pada kelas terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi. Penghitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) dilinearisasikan dari sistem persamaan diferensial yang didekati oleh titik ekuilibrium bebas penyakit.

Persamaan subpopulasi kelas terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$, dan $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$. Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai:

$$K = FV^{-1}$$

dengan K disebut sebagai *Next Generation Matrix* (NGM). Nilai harapan dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks K sehingga (Driessche & Watmough, 2002):

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}) \quad (2.9)$$

2.8 Masalah Kontrol Optimal dan Syarat Perlu Keoptimalan

Masalah kontrol optimal adalah memilih fungsi kontrol $u(t)$ yang membawa sistem dari *state* awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 ke *state* akhir $x(t_f)$ pada waktu akhir

sehingga memberikan nilai maksimum atau minimum untuk suatu objektif (fungsi tujuan).



State yang bergantung pada fungsi kontrol dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial:

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.10)$$

dengan nilai awal $x(t_0) = x_0$. Sistem tersebut bergantung pada fungsi $u(t)$ yang merupakan fungsi kontrol dari sistem (2.10). Jika nilai $u(t)$ berubah maka solusi dari sistem (2.10) juga akan berubah. Masalah kontrol yang paling dasar adalah mencari fungsi kontrol $u(t)$ dan solusi sistem yang bersesuaian dengan (2.10) sehingga fungsi tujuan berikut dapat tercapai, yaitu:

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.11)$$

dengan kendala $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$.

Teknik utama untuk masalah kontrol optimal adalah menyelesaikan serangkaian syarat perlu yang harus dipenuhi oleh kontrol yang optimal dan *state* yang terkait. Syarat perlu yang diperoleh dikembangkan oleh *Pontryagin* dan rekan kerjanya di Moskow pada tahun 1950-an. *Pontryagin* memperkenalkan gagasan fungsi *adjoint* untuk menambahkan persamaan diferensial ke fungsi objektif. Fungsi *adjoint* mempunyai tujuan yang sama dengan pengali *Lagrange* dalam kalkulus multivariabel yang menambahkan kendala pada fungsi beberapa variabel yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan. Misalkan fungsi tujuan dalam persamaan (2.11) dituliskan sebagai berikut:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.12)$$

dengan x merupakan variabel *state*. Diasumsikan bahwa kontrol optimal dari masalah optimal (2.11) ada, yaitu u^* dengan x^* adalah variabel *state* optimal yang memenuhi persamaan (2.10). Misalkan $J(u^*) \leq J(u) < \infty$ untuk semua kontrol u .

Misalkan pula terdapat fungsi variasi kontinu $h(t)$ dan $\varepsilon \in R$ sedemikian

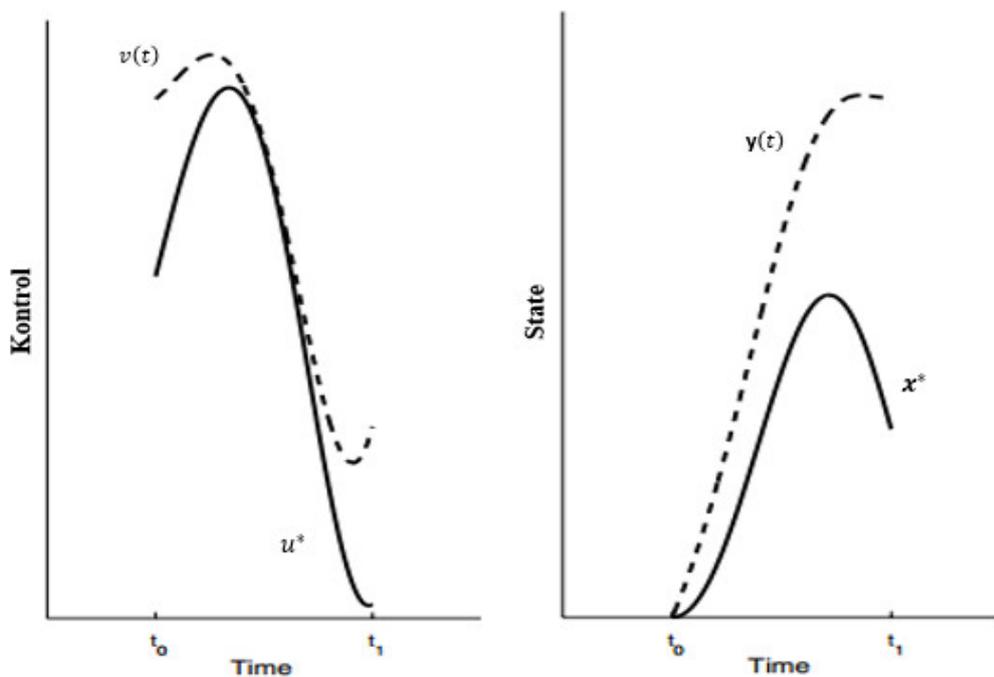
$$v(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \quad (2.13)$$



dengan $v(t)$ merupakan fungsi kontrol yang lain, ε adalah jarak untuk $[t_0, t_f]$ dan h adalah *step size* dari persamaan (2.13). Misalkan y merupakan variabel *state* yang bersesuaian dengan v yang memenuhi:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \dot{y}(t) = g(t, y(t), v(t)) \quad (2.14)$$

dimana $v(t)$ adalah kontinu dan dengan lintasan *state* berawal dari posisi yang sama, dipilih $y(t_0) = x_0$ (lihat Gambar 2.2). Dalam gambar tersebut dapat dilihat bahwa $v(t) \rightarrow u^*(t)$ untuk semua t , ketika $\varepsilon \rightarrow 0$. Hal yang sama berlaku untuk y , karena asumsi yang dibuat pada g maka $y(t) \rightarrow x^*(t)$ untuk setiap t yang tetap, dengan kata lain turunan $\left. \frac{d}{d\varepsilon}y(t) \right|_{\varepsilon=0}$ ada untuk setiap t .



Gambar 2.2 Perbandingan antara kontrol optimal u^* dengan $v(t)$ (kiri) dan *state* optimal x^* dengan $y(t)$ (kanan). Garis putus-putus menunjukkan sistem tanpa kontrol dan garis penuh menunjukkan sistem dengan kontrol optimal.

Fungsi tujuan dalam persamaan (2.12) yang dievaluasi di v adalah:

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, y(t), v(t)) dt \quad (2.15)$$



Kemudian didefinisikan $\lambda(t)$ yang merupakan fungsi *adjoint* yang akan ditentukan. Fungsi tersebut merupakan fungsi yang terturunkan dalam interval $[t_0, t_f]$. Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus diperoleh:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda^T(t)y(t)] dt = \lambda^T(t_f)y(t_f) - \lambda^T(t_0)y(t_0)$$

atau

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda^T(t)y(t)] dt + [\lambda^T(t_0)y(t_0) - \lambda^T(t_f)y(t_f)] = 0 \quad (2.16)$$

Jika bentuk yang bernilai nol tersebut dijumlahkan ke dalam fungsi $J(v)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[f(t, y(t), v(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda^T(t)y(t)) \right] dt + [\lambda^T(t_0)y(t_0) - \lambda^T(t_f)y(t_f)] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [f(t, y(t), v(t)) + \dot{\lambda}^T(t)y(t) + \lambda^T(t)g(t, y(t), v(t))] dt + [\lambda^T(t_0)y(t_0) - \lambda^T(t_f)y(t_f)] \end{aligned}$$

dengan $g(t, y(t), v(t)) = \dot{y}(t)$. Karena nilai minimum dari J terhadap kontrol u terjadi pada u^* , saat turunan dari $J(v)$ terhadap ε (dalam arah h) adalah nol, yaitu:

$$\left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(v) - J(u^*)}{\varepsilon} = 0.$$

Teorema 2.2 (*Lebesgue Dominated Convergence*): Misalkan $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty]$ adalah (*Lebesgue*) fungsi terstruktur sedemikian sehingga limit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ada. Asumsikan terdapat suatu integral $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ dengan $|f_n(x)| \leq g(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Maka f terintegrasi sebagaimana f_n untuk setiap n , dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$



Dengan menggunakan teorema *Lebesgue Dominated Convergence*, bentuk limit (begitu pula dengan turunan) dapat diubah ke dalam bentuk integral, sehingga diperoleh turunan dari $J(v)$ terhadap ε , yaitu:

$$\frac{dJ(v)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, y(t), v(t)) + \dot{\lambda}^T(t)y(t) + \lambda^T(t)g(t, y(t), v(t))] dt \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_0)y(t_0)\Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_f)y(t_f)\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Dengan menerapkan aturan rantai terhadap fungsi f dan g diperoleh:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[f_x \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \dot{\lambda}^T(t) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \lambda^T(t) \left(g_x \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \right] dt - \lambda^T(t_f) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.17)$$

dengan f_x, f_u, g_x dan g_u bergantung pada $t, x^*(t)$ dan $u^*(t)$. Jika persamaan (2.17) disederhanakan maka diperoleh:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\underbrace{\left(f_x + \lambda^T(t)g_x + \dot{\lambda}^T(t) \right) \frac{dy}{d\varepsilon}(t)}_* + (f_u + \lambda^T(t)g_u)h(t) \right] dt - \underbrace{\lambda^T(t_f) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t_f)}_{**} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.18)$$

Agar bentuk (*) dan (**) dalam persamaan (2.18) bernilai nol, maka dipilih fungsi *adjoint* $\lambda(t)$ yang memenuhi persamaan:

$$\dot{\lambda}(t) = -[f_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)g_x(t, x^*(t), u^*(t))] \quad (2.19)$$

dan syarat batas $\lambda(t_f) = 0$. Syarat batas ini dikenal sebagai syarat transversalitas.

Persamaan (2.18) tereduksi menjadi:

$$\int_{t_0}^{t_f} [f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t))]h(t)dt = 0.$$

Selanjutnya, karena persamaan (2.18) berlaku untuk sembarang fungsi variasi

yang kontinu, maka dipilih fungsi:

$$h(t) = f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t))$$



Akibatnya (2.18) menjadi:

$$\int_{t_0}^{t_f} [f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t))]^2 dt = 0.$$

Berdasarkan persamaan tersebut, diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi yang optimal yaitu:

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_f \quad (2.20)$$

Jadi persamaan (2.19) dan (2.20) yang diperoleh tersebut merupakan syarat perlu keoptimalan fungsi tujuan (2.11).

Dalam praktiknya, syarat perlu di atas dapat dihasilkan dari Hamilton H , yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda^T g(t, x, u)$$

akan memaksimumkan atau meminimumkan H pada saat u di u^* dan kondisi di atas dapat ditulis dalam persamaan Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = f_u + \lambda g_u = 0 \quad (\text{kondisi optimal/syarat stasioner})$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(f_x + \lambda g_x) \quad (\text{persamaan adjoint})$$

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (\text{syarat transversalitas})$$

dengan diberikan persamaan *state* yaitu:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0.$$

2.9 Prinsip Minimum Pontryagin

Misalkan diberikan masalah kontrol optimal sebagai berikut:

$$\min J = \min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.21)$$

dengan kendala:

$$\dot{x} = g(t, x(t), u(t)). \quad (2.22)$$

fungsi J disebut fungsi tujuan dan kontrol $u(t) \in U$, dengan U merupakan himpunan dari semua fungsi kontrol $u(t)$ yang diperkenankan. Diasumsikan



bahwa $u(t)$ merupakan fungsi terhadap waktu sehingga $f(t, x, u)$ dan $g(t, x, u)$ juga merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi dalam interval $[t_0, t_f]$. Pemilihan fungsi f bergantung pada penekanan dari sistem yang akan dioptimalkan. Dalam sistem kontrol optimal, tujuan pengontrolan adalah untuk mengoptimalkan fungsi objektif (2.21). Masalah kontrol optimal adalah mencari $u^*(t)$ yang menggerakkan sistem (2.22) ke trayektori $x^*(t)$ sedemikian sehingga fungsi objektif pada persamaan (2.21) mencapai nilai yang optimal.

Pencarian fungsi kontrol $u^*(t)$ yang mengoptimalkan J pada prinsipnya menggunakan metode pengali *Lagrange*. Sistem (2.22) menyatakan suatu fungsi kendala yang bergantung pada $t \in [t_0, t_f]$, sehingga diperlukan pengali *Lagrange* pada masing-masing waktu tersebut karena setiap kendala mempunyai satu pengali *Lagrange*. Misalkan pengali *Lagrange* disimbolkan dengan $\lambda(t) \in R^n$ maka bentuk perluasan dari J yang menyertakan kendala (2.22) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [f(t, x, u) + \lambda^T(t)(g(t, x, u) - \dot{x}(t))] dt \quad (2.23)$$

Misalkan didefinisikan fungsi Hamilton sebagai berikut:

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda^T(t)g(t, x, u) \quad (2.24)$$

dengan menggunakan fungsi Hamilton tersebut, persamaan (2.23) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [H(t, x, u, \lambda) - \lambda^T(t)\dot{x}(t)] dt. \quad (2.25)$$

Teorema 2.3: *Jika $u^*(t)$ dan $x^*(t)$ merupakan kontrol optimal dan state optimal untuk masalah berikut:*

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.26)$$



terhadap $\dot{x} = g(t, x(t), u(t))$, $x(t_0) = x_0$ maka terdapat variabel adjoint $\lambda(t)$ yang diturunkan sedemikian sehingga:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t))$$

untuk semua fungsi kontrol u pada setiap t dengan fungsi Hamilton:

$$H = f(t, x(t), u(t)) + \lambda^T(t)g(t, x(t), u(t))$$

dan

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = 0.$$

Teorema 2.4: Misalkan fungsi f dan g adalah fungsi yang diturunkan secara kontinu terhadap t, x, u dan merupakan fungsi konveks terhadap u . Misalkan u^* adalah kontrol optimal untuk masalah optimasi (2.26), dengan state optimal x^* , dan λ adalah fungsi yang diturunkan untuk setiap t . Misalkan untuk setiap $t_0 \leq t \leq t_f$ berlaku $H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0$ maka untuk semua kontrol u dan untuk setiap t diperoleh:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)).$$

Berikut adalah garis besar bagaimana prinsip ini dapat diterapkan untuk memperoleh syarat perlu dari masalah optimasi yang dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut (Lenhart & Workman, 2007):

1. Membentuk fungsi Hamilton yaitu kombinasi fungsi dari $f(t, x(t), u(t))$ dan perkalian fungsi yang berbentuk persamaan diferensial $g(t, x(t), u(t))$ dengan suatu faktor pengali *Lagrange* $\lambda(t)$. Berikut merupakan bentuk fungsi Hamilton:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda^T g(t, x(t), u(t)).$$

2. Mencari solusi fungsi *Pontryagin* berdasarkan syarat stasioner:

$$\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} = 0 \tag{2.27}$$

mendapatkan $u^* = u^*(t, x(t), \lambda(t))$.



3. Mengamati

$$H(t, x(t), u^*(t), \lambda(t)) = \min_{u \in U} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \quad (2.28)$$

4. Menyelesaikan persamaan *state*:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial \lambda} \quad (2.29)$$

dengan nilai $x(t_0) = x_0$ dan persamaan *costate*:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x} \quad (2.30)$$

dengan kondisi transversalitas $\lambda(t_f) = 0$.

5. Mensubstitusi hasil dari langkah 4 ke u^* untuk menentukan kontrol optimal.

Contoh 2.1: Misalkan diberikan suatu fungsi tujuan:

$$\min_u \int_0^1 u^2(t) dt$$

terhadap fungsi kendala $\dot{x} = -2x + u$ dengan syarat awal $x(0) = 1$ dan $x(1) = 0$. Fungsi Hamilton dari masalah kontrol optimal tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= u^2 + \lambda(-2x + u) \\ &= u^2 - 2x\lambda + u\lambda \end{aligned}$$

Syarat stasionernya adalah:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0,$$

Sehingga diperoleh:

$$u = -\frac{\lambda}{2} \quad (2.31)$$

Persamaan *costate*:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(-2\lambda) = 2\lambda$$

Dengan mensubstitusi nilai u pada persamaan (2.31) ke dalam fungsi kendala, diperoleh:

$$\dot{x} = -2x + u$$



$$\begin{aligned}
 &= -2x + \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \\
 &= -2x - \frac{\lambda}{2}
 \end{aligned}$$

Sehingga dapat ditulis kembali menjadi:

$$\dot{x}(t) = -2x - \frac{\lambda}{2}$$

$$\dot{\lambda}(t) = 2\lambda$$

Solusi dari $\dot{x}(t)$ dan $\dot{\lambda}(t)$ akan diselesaikan dengan menggunakan metode operator. Persamaannya dapat ditulis kembali menjadi:

$$(D + 2)x + \frac{1}{2}\lambda = 0 \tag{2.32}$$

$$(D - 2)\lambda = 0 \tag{2.33}$$

atau dalam bentuk:

$$\begin{vmatrix} (D + 2) & \frac{1}{2} \\ 0 & (D - 2) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.34}$$

Jika persamaan (2.34) diselesaikan, maka akan diperoleh nilai eigen $D_1 = -2$ dan $D_2 = 2$. Sehingga diperoleh solusi:

$$x = A_1e^{-2t} + A_2e^{2t} \tag{2.35}$$

$$\lambda = B_1e^{-2t} + B_2e^{2t} \tag{2.36}$$

dan

$$Dx = -2A_1e^{-2t} + 2A_2e^{2t} \tag{2.37}$$

$$D\lambda = -2B_1e^{-2t} + 2B_2e^{2t} \tag{2.38}$$

dimana A_1 , A_2 , B_1 , dan B_2 merupakan suatu konstanta. Selanjutnya, substitusi persamaan (2.35), (2.36), dan (2.37) ke dalam persamaan (2.32), maka diperoleh:

$$B_1 = 0 \text{ dan } B_2 = -8A_2$$

Solusi komplementer yang diperoleh adalah:

$$A_1e^{-2t} + A_2e^{2t} \tag{2.39}$$

$$8A_2e^{2t} \tag{2.40}$$



Kemudian substitusi nilai syarat awal ke dalam persamaan (2.39), diperoleh:

$$x(0) = A_1 + A_2 = 1 \quad (2.41)$$

$$x(1) = A_1 e^{-2} + A_2 e^2 = 0 \quad (2.42)$$

Dari persamaan (2.41) diperoleh $A_1 = 1 - A_2$.

Jika persamaan (2.41) dan (2.42) dieliminasi, maka diperoleh $A_2 = \frac{-1}{e^4 - 1}$.

Jadi, diperoleh u dan x yang optimal yaitu:

$$u^*(t) = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{-8A_2 e^{2t}}{2} = -4A_2 e^{2t} = \frac{-4e^{2t}}{e^4 - 1}$$

$$x^*(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{2t} = \frac{e^{-2t+4} - e^{2t}}{e^4 - 1}.$$

2.10 Metode *Forward-Backward Sweep*

Tinjau masalah optimasi yang diberikan pada persamaan (2.21) terhadap kendala pada persamaan (2.22). Dengan menggunakan prinsip minimum *Pontryagin*, masalah optimasi yang berkendala tersebut dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu:

$$\min_{(x,u,\lambda)} H(t, x, u, \lambda) = \min_{(x,u,\lambda)} f(t, x, u) + \lambda^T(t)g(t, x, u)$$

dengan syarat keoptimalan:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u), x(t_0) = x_0$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \lambda(t_f) = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \forall u \in U$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan berbagai metode optimasi. Salah satunya adalah dengan menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Metode ini merupakan metode iteratif yang akan

menjadi beberapa bagian, yaitu $t_0 = b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1} = t_f$ dan kontrol



$u = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$, dimana $u_i \approx u(b_i)$. Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk x dan λ yang bergantung pada u . Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas untuk x dan λ tersebut.

Metode *forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi $x(t)$. Pada metode ini, diberikan kondisi awal dan *step size* yaitu h . Pendekatannya melalui $x(t+h)$ dan $x(t)$, sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.44)$$

dengan:

$$k_1 = f(t, x(t)) \quad (2.45)$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t+h, x(t) + hk_3)$$

Sedangkan metode *backward Runge Kutta* orde 4 diberikan kondisi akhir dan *step size* yaitu h . Pendekatannya melalui $\lambda(t-h)$ dan $\lambda(t)$ sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$\lambda(t-h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.46)$$

dengan:

$$k_1 = f(t, \lambda(t)) \quad (2.47)$$

$$k_2 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t-h, \lambda(t) - hk_3)$$



Sedangkan nilai u diperbaharui di setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai u yang lama dengan nilai u yang baru yaitu:

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2}$$

dengan u_{baru} diperoleh dari syarat keoptimalan $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Pada metode ini, iterasi akan berhenti ketika syarat konvergensinya telah dipenuhi yaitu ketika nilainya menjadi sangat kecil. Bentuk uji konvergensi lain adalah $\delta \|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$, dengan δ merupakan besar toleransi yang diperkenankan (Lenhart & Workman, 2007).

2.11 Model Matematika Dinamika Korupsi

Model matematika dinamika korupsi yang akan dikembangkan dalam penelitian ini adalah model matematika dinamika korupsi oleh Athithan, dkk (2018) dan Nathan dan Jakob (2019).

1. Model Matematika Dinamika Korupsi oleh Athithan, dkk (2018)

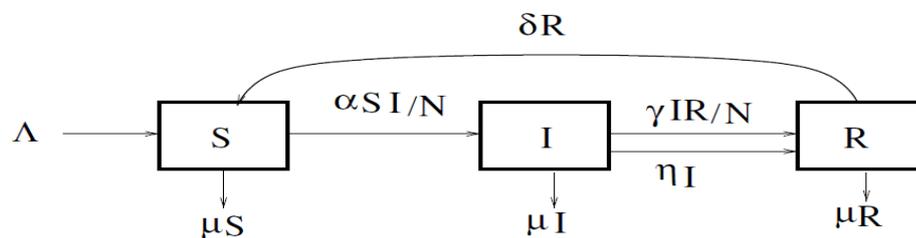
Model yang telah diturunkan oleh Athithan, dkk (2018) membagi populasi menjadi tiga subpopulasi dengan menggunakan asumsi bahwa dinamika korupsi seperti suatu penyebaran penyakit menular. Populasi N pada model ini terdiri atas *corruption-susceptible class* (S), *corruption-infected class* (I), dan *recovered from corruption class* (R) dengan asumsi-asumsi sebagai berikut:

- a. Individu yang masuk ke kelas S adalah dengan laju konstan.
- b. Aktivitas korupsi menular melalui interaksi individu yang rentan korupsi dengan individu koruptor. Individu yang telah tertular perilaku korupsi akan masuk ke kelas populasi yang korupsi (I).
- c. Individu yang telah berhenti korupsi dapat mempengaruhi individu koruptor untuk berhenti dari perilaku korupsi melalui interaksi individu yang telah berhenti korupsi dengan individu koruptor. Individu yang telah dipengaruhi untuk berhenti korupsi akan masuk ke kelas populasi yang telah berhenti korupsi (R).



- d. Individu koruptor dapat berhenti dari perilaku korupsi melalui kesadaran diri sendiri yang bisa disebabkan karena takut akan hukuman dan lain-lain.
- e. Laju kematian alami diasumsikan sama pada setiap kelas.
- f. Individu yang telah berhenti melakukan korupsi dapat kembali menjadi individu yang rentan dan berpeluang melakukan korupsi kembali.

Secara skematis, proses dinamika model korupsi berdasarkan asumsi-asumsi tersebut digambarkan dalam diagram kompartemen pada gambar berikut:



Gambar 2.3 Diagram Kompartemen Dinamika Korupsi oleh Athithan, dkk (2018)

Dari diagram kompartemen model tersebut, diperoleh sistem berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \alpha S \frac{I}{N} + \delta R,$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha S \frac{I}{N} - \gamma I \frac{R}{N} - (\mu + \eta)I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \frac{R}{N} + \eta I - (\mu + \delta)R.$$

2. Model Matematika Dinamika Korupsi oleh Nathan dan Jakob (2019)

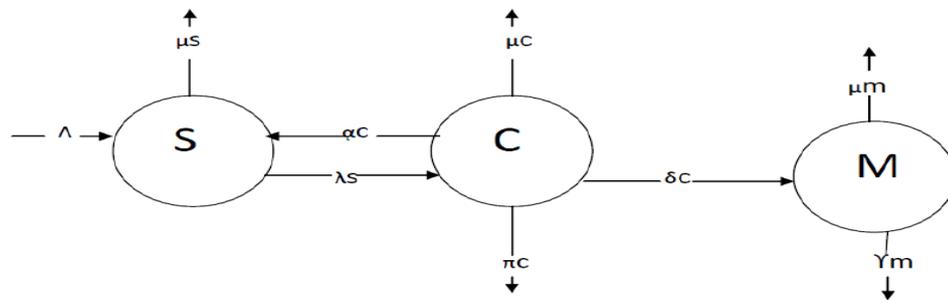
Model yang telah diturunkan oleh Nathan dan Jakob (2019) membagi populasi menjadi tiga subpopulasi yaitu *susceptible class* (S), *corrupted class* (C), dan *political corrupt class* (M) dengan asumsi-asumsi sebagai berikut:

- a. Individu yang masuk ke kelas S adalah dengan laju konstan.
- b. Aktivitas korupsi menular melalui interaksi individu yang rentan korupsi dengan individu koruptor. Individu yang telah tertular perilaku korupsi akan masuk ke *corrupted class* (C).



- c. Tingkat perekrutan C kembali ke S melalui kontak sekunder misalnya media dan kampanye dari pihak lawan seperti badan-badan anti korupsi dan kemauan politik pemerintah untuk melawan korupsi.
- d. Individu dari *corrupted class* (C) yang terpilih untuk memegang jabatan di lingkup politik akan masuk ke *political corrupt class* (M).
- e. Laju kematian alami diasumsikan sama pada setiap kelas.

Secara skematis, proses dinamika model korupsi berdasarkan asumsi-asumsi tersebut digambarkan dalam diagram kompartemen pada gambar berikut:



Gambar 2.4 Diagram Kompartemen Dinamika Korupsi oleh Nathan dan Jakob (2019)

Dari diagram kompartemen model tersebut, diperoleh sistem berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda + \alpha C(t) - \lambda S(t) - \mu S(t),$$

$$\frac{dC}{dt} = \lambda S(t) - (\delta + \pi + \alpha + \mu)C(t),$$

$$\frac{dM}{dt} = \delta C(t) - (\gamma + \mu)M(t).$$

