ESTIMASI PARAMETER REGRESI MODEL DATA PANEL EFEK TETAP DENGAN METODE *FIRST DIFFERENCE*

SKRIPSI

ASTI INAYATI MAGFIRAH

H 121 16 516

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2020

ESTIMASI PARAMETER REGRESI MODEL DATA PANEL EFEK TETAP DENGAN METODE *FIRST DIFFERENCE*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ASTI INAYATI MAGFIRAH

H 121 16 516

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JUNI 2020

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh – sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

ESTIMASI PARAMETER REGERSI MODEL DATA PANEL EFEK TETAP DENGAN METODE *FIRST DIFFERENCE*

Adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 9 Juni 2020

METERAI TEMPEL
98137AHF654825822
6000
ENAM RIBU RUPIAH

ASTI INAYATI MAGFIRAH
NIM. H 121 16 516

ESTIMASI PARAMETER REGRESI MODEL DATA PANEL EFEK TETAP DENGAN METODE *FIRST DIFFERENCE*

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Drs. Raupong, M.Si.	**Dr.Dr. Georgina M. Tinungki, M.Si.**
NIP. 19621015 198810 1 001	**NIP. 19620926 198702 2 001**

Pada Tanggal : 9 Juni 2020

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	: Asti Inayati Magfirah
NIM	: H 121 16 516
Program Studi	: Statistika
Judul Skripsi	: Estimasi Parameter Regresi Model Data Panel Efek Tetap dengan Metode *First Difference*.

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

		Tanda Tangan
1. Ketua	: Drs. Raupong., M.Si.	(......................)
2. Sekertaris	: Dr.Dr. Georgina Maria Tinungki., M.Si.	(......................)
3. Anggota	: Dr. Erna Tri Herdiani., M.Si.	(......................)
4. Anggota	: Dr. Nurtiti Sunusi., S.Si., M.Si.	(......................)

kan di : Makassar

l : 9 Juni 2020

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaahirabbil'aalamiiin, Puji syukur kehadirat Allah SWT karena berkah rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir Skripsi yang berjudul "**Estimasi Parameter Regresi Model Data Panel Efek Tetap dengan Metode *First Difference***". Tak lupa pula, Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang menjadi suri tauladan bagi seluruh umat manusia. Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memperoleh gelar sarjana Sains (S.Si) pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Tidak sedikit hambatan dan tantangan yang penulis hadapi dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, namun dengan bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak sehingga semua hambatan itu dapat teratasi. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati dan penuh rasa hormat penulis menghaturkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

Allah Subhanahu wa Ta'ala yang telah melimpahkan Rahmat dan Karunia-Nya, Ayahanda Ir. Asrullah Burhanuddin, Ibunda Widiawati, serta adik-adikku Haidir Jibran yang selalu membantuku jika ada kendala selama penulisan dan Adinda Putri Auliah yang selalu memberikan masukan-masukan, mereka semualah yang telah memberikan do'a dan selalu setia memberikan bantuan serta semangat selama proses penelitian dan penyusunan skripsi ini. Penulis tak lupa pula untuk menyampaikan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, M.A** selaku Rektor Universitas Hasanuddin Makassar.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar.
3. Ibu **Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si** selaku ketua Departemen Statistika serta Anggota Tim Penguji atas bimbingan dan saran yang diberikan.
4. Bapak **Drs. Raupong, M.Si** selaku Ketua Tim Penguji sekaligus sebagai Pembimbing Utama yang telah sabar dan ikhlas meluangkan begitu banyak waktu untuk membimbing dan memberikan masukan dalam penulisan skripsi ini.

5. Ibu **Dr.Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si** selaku Sekretaris Tim Penguji sekaligus sebagai Pembimbing Pertama dan Penasehat Akademik yang telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk memberikan arahan dalam penulisan skripsi ini.
6. Ibu **Dr. Erna Tri Herdiani, M.Si** selaku Anggota Tim Penguji atas semua bimbingan dan saran yang diberikan.
7. Seluruh dosen, staf dan karyawan Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah membekali pengetahuan, bimbingan dan arahan selama ini.
8. Sahabat Perkuliahanku, yaitu Fahmi, Dicky, Nisa, Grace, Mamik, Risma, dan Rizki yang telah memberi warna selama perkuliahan, mengajari penulis dengan sabar jika ada yang tidak dipahami, serta semangat dan keceriaanya selama ini.
9. Saudaraku "AmpiJR" yaitu Dinda, Nisa, Ilma, Tity, Fira, Uci, dan Yenny yang selalu memberikan doa dan support kepada penulis.
10. Teman – temanku Fina, Amus, Putu, Sahlan, dan Iqbal yang memberikan semangat, saran, dan informasi – informasi tentang skripsi kepada penulis.
11. Teman – teman seperjuangan "Kelas NIM Genap" khususnya Andis, Ririn, dan Mila atas bantuan, semangat dan keceriannya.
12. Teman – teman seperjuangan "STATISTIKA 2016" khususnya Vieri yang membantu penulis jika terdapat kesulitan selama perkuliahan maupun penyusunan skripsi.
13. Saudaraku "IKAF12" yaitu Dora, Ilo, Ischak, Imam, Riri, Baso, IlhamT, dkk yang selalu menghibur dalam situasi apapun dan selalu memberikan semangat kepada penulis.
14. Teman – teman KKNT Pulau Sebatik Gelombang 102 Desa Aji Kuning yaitu Ilmi, Yuni, Igeth, Ardi, Susan, Hikmah, Rahma, Muli, Kak Wahyu, Taufik, Iccang, dan Jackson untuk hiburan, dukungan, dan doanya.

Serta semua pihak yang telah berjasa tidak dapat saya sebutkan satu per satu. bantuan baik yang bersifat moral maupun material selama penelitian rselesainya penulisan skripsi ini dapat menjadi amal baik dan ibadah, serta t balasan dari Allah SWT. Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari sempurna, dan banyak kekurangan baik dalam metode penulisan maupun dalam pembahasan materi. Hal tersebut dikarenakan keterbatasan kemampuan penulis. Sehingga penulis mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun mudah-mudahan dikemudian hari dapat memperbaiki segala kekuranganya. Aamin Ya Rabbal Alaamiin.

Makassar, 9 Juni 2020

Penulis,

Asti Inayati Magfirah

NIM. H 121 16 516

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Asti Inayati Magfirah
NIM	: H 121 16 516
Program Studi	: Statistika
Departemen	: Statistika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusiive Royalty-Free Right*)** atas tugas akhir saya yang berjudul:

"Estimasi Parameter Regresi Model Data Panel Efek Tetap dengan Metode *Fisrt Difference*"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar, pada tanggal 9 Juni 2020

Yang menyatakan,

yati Magfirah

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengestimasi parameter regresi model data panel efek tetap dengan metode *first difference* pada pengaruh Angka Harapan Hidup, Rata-Rata Lama Sekolah, dan Pengeluaran Perkapita terhadap Indeks Pembangunan Manusia Sulawesi Selatan tahun 2012 - 2018. Metode *first difference* digunakan untuk memperoleh perbedaan intersep masing-masing kabupaten/kota yang menjelaskan efek perbedaan wilayah. Proses *first difference* mengakibatkan data berautokorelasi maka setelah dilakukan *first difference* digunakan metode *generalized least square* untuk mengestimasi parameter. Hasil menunjukkan Angka Harapan Hidup, Rata-Rata Lama Sekolah, dan Pengeluaran Perkapita memiliki pengaruh signifikan terhadap Indeks Pembangunan Manusia Sulawesi Selatan tahun 2012 - 2018 secara simultan maupun parsial.

Kata Kunci : *Generalized Least Square*, Indeks Pembangunan Manusia, Metode *First Difference*, Model Efek Tetap, Regresi Data Panel.

ABSTRACT

This study aims to estimate the regression parameters fixed effects panel data model using the first difference method on the influence of Life Expectancy, Average Length of School, and Per capita Expenditure on the Human Development Index of South Sulawesi in 2012 - 2018. The first difference method is used to obtain intercept differences in each district/city explaining the effect of regional differences. The first difference process results in autocorrelation of data so after the first difference is done the generalized least square method is used to estimate the parameters. The results show Life Expectancy, Average Length of School, and Per capita Expenditure has a significant influence on the Human Development Index of South Sulawesi in 2012 - 2018 simultaneously or partially.

Keywords : First Difference Method, Fixed Effect Model, Generalized Least Square, Human Development Index, Panel Data Regression,

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Regresi linear adalah teknik yang digunakan untuk memperoleh model hubungan antara satu variabel tak bebas dengan satu atau lebih variabel bebas. Jika hanya digunakan satu variabel bebas dalam model, maka teknik ini disebut regresi linear sederhana, sedangkan jika yang digunakan adalah beberapa variabel bebas, teknik ini disebut regresi linear berganda (Harlan, 2018).

Analisis regresi telah banyak dikembangkan dalam berbagai model salah satunya adalah regresi model data panel. Data panel adalah gabungan antara data *cross section* dan data *time series* (Jaya & Sunengsih, 2009). Data *cross section* menurut Winarno dalam (Elvianto & Kartikasari, 2015) adalah data yang dikumpulkan dengan objek lebih dari satu pada suatu waktu tertentu. Sedangkan *time series* ialah data yang diamati berdasarkan satu objek dan dikumpulkan dalam beberapa periode.

Regresi model data panel digunakan untuk melakukan pengamatan terhadap suatu data yang diteliti secara terus menerus selama beberapa periode. Menurut Baltagi dalam (Gujarati, 2006) ada beberapa keuntungan menggunakan regresi data panel, yaitu: (1) Dengan mengombinasikan data *time series* dan data *cross section*, data panel memberikan data yang lebih informatif, lebih variatif, mengurangi kolineritas antarvariabel, derajat kebebasan yang lebih banyak, dan efisiensi yang lebih besar; (2) Dengan mempelajari bentuk *cross section* berulang-ulang dari observasi, data panel lebih baik untuk mempelajari dinamika perubahan data; (3) Data panel dapat mendeteksi lebih baik dalam mengukur efek-efek yang tidak dapat diobservasi dalam data *cross section* maupun data *time series* saja; (4) Data panel memungkinkan untuk dipelajarinya model perilaku yang lebih rumit.

Regresi data panel memiliki tiga model, yaitu: Model Efek Umum (MEU), Model Efek Tetap (MET), dan Model Efek Acak (MEA). Berdasarkan pernyataan H... lam (Latuconsina, 2017) MET menetapkan bahwa intersep adalah sebagai ...k yang spesifik/berbeda dalam setiap individu pada model regresinya. Pada ...a tiga pendekatan yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter ...tode *within group* (WG), metode *least squares dummy variable* (LSDV), dan metode *first difference* (FD). Metode FD lebih efisien dibandingkan metode WG jika residual berautokorelasi begitu pula sebaliknya jika residual tidak berautkorelasi maka metode WG lebih efisien (Muck, 2018).

Beberapa penelitian yang telah dilakukan menggunakan data panel efek tetap antara lain yang dilakukan oleh (Ahmad, 2019) menggunakan metode *Leas Square Dummy Variable* terdapat beberapa variabel yang terbukti memiliki pengaruh yang signifikan terdahap Indeks Pembangunan Manusia. Dalam penelitian tersebut menyimpulkan bahwa variabel Angka Harapan Hidup dan Rata-Rata Lama Sekolah berpengaruh positif signifikan terhadap IPM.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Hufaini, 2020) pada penelitian tersebut juga terbukti dengan menggunakan metode *Within Group* bahwa variabel Angka Harapan Hidup dan Rata-Rata Lama Sekolah berpengaruh positif signifikan terhadap Indeks Pembangunan Manusia.

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) merupakan alat ukur yang mampu menggambarkan tingkat kesejahteraan secara menyeluruh karena dapat menggambarkan faktor ekonomi dan nonekonomi (Aji & Syarifuddin, 2015). Berdasarkan pernyataan *Human Development Report* 1990 dalam (Badan Pusat Statistik Jakarta Pusat, 2015) manusia adalah kekayaan bangsa yang sesungguhnya. Tujuan utama dari pembangunan adalah menciptakan lingkungan yang memungkinkan bagi rakyatnya untuk menikmati umur panjang, sehat, dan menjalankan kehidupan yang produktif. Hal ini tampaknya merupakan suatu kenyataan yang sederhana. Tetapi hal ini seringkali terlupakan oleh berbagai kesibukan jangka pendek untuk mengumpulkan harta.

Sustainable Development Goals (SDGs) atau dikenal dengan Tujuan Pembangunan Berkelanjutan (TPB) merupakan agenda pembangunan global yang disepakati oleh negara-negara di dunia hingga tahun 2030. TPB mencakup 17 tujuan, yaitu: (1) Tanpa Kemiskinan; (2) Tanpa Kelaparan; (3) Kehidupan Sehat dan Sejahtera; (4) Pendidikan Berkualitas; (5) Kesetaraan Gender; (6) Air Bersih dan Sanitasi Layak; (7) Energi Bersih dan Terjangkau; (8) Pekerjaan Layak dan ...han Ekonomi; (9) Industri, Inovasi, dan Infrastruktur; (10) Berkurangnya ...gan; (11) Kota dan Pemukiman yang Berkelanjutan; (12) Konsumsi dan ... yang Bertanggung Jawab; (13) Penanganan Perubahan Iklim; (14)

Ekosistem Lautan; (15) Ekosistem Daratan; (16) Perdamaian, Keadilan dan Kelembagaan yang Tangguh; dan (17) Kemitraan untuk Mencapai Tujuan. Terdapat beberapa target yang menyinggung tentang pembangunan manuisa yaitu tujuan ketiga, tujuan keempat, dan tujuan kedelapan. Melalui SDGs, tujuan dan target pembangunan manusia terus diupayakan peningkatannya (Nugroho & Rahmawati, 2018).

IPM dihitung dari agregasi tiga dimensi, yaitu umur panjang dan hidup sehat, pengetahuan, serta standar hidup layak. Setiap dimensi diwakili oleh indikator. Dimensi umur panjang dan hidup sehat diwakili oleh indikator umur harapan hidup saat lahir. Sementara itu, rata-rata lama sekolah dan harapan lama sekolah merupakan indikator yang mewakili pengetahuan. Terakhir, dimensi standar hidup layak Indonesia diwakili oleh indikator pengeluaran per kapita yang disesuaikan (Nugroho & Rahmawati, 2018).

Kedua penelitian yang dilakukan oleh (Ahmad, 2019) dan (Hufaini, 2020) terdapat satu dimensi dari IPM yang belum terwakili yaitu dimensi standar hidup layak. Maka penulis menambahkan satu variabel yaitu Pengeluaran per Kapita yang mewakili dimensi standar hidup layak. Untuk mengetahui variabel-variabel yang paling berpengaruh terhadap IPM, dilakukan analisis regresi model data panel efek tetap, karena data panel mengandung data *time series* maka rentan terjadi autokorelasi, maka penulis menggunakan metode *first difference* dalam mengestimasi parameter. Berdasarkan tinjauan latar belakang masalah maka penulis mengambil judul "Estimasi Parameter Regresi Model Data Panel Efek Tetap Dengan Metode *First Difference*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka didapatkan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengestimasi parameter regresi model data panel efek tetap dengan metode *first difference* pada data IPM Sulawesi Selatan tahun 2012 - 2018?
2. ...mana pengaruh variabel Angka Harapan Hidup, Rata-Rata Lama Sekolah, ...ngeluaran per Kapita terhadap IPM Sulawesi Selatan tahun 2012 - 2018 ?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan kajian penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengestimasi parameter regresi model data panel efek tetap dengan metode *first difference* pada data IPM Sulawesi Selatan tahun 2012 - 2018.
2. Untuk menyelidiki pengaruh variabel Angka Harapan Hidup, Rata-Rata Lama Sekolah, dan Pengeluaran per Kapita terhadap data IPM Sulawesi Selatan tahun 2012 - 2018.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penyusunan tugas akhir ini adalah dapat menambah wawasan dalam bidang statistika khususnya regresi model data panel efek tetap dengan metode *first difference* sehingga dapat digunakan sebagai referensi untuk penulisan selanjutnya. Penelitian ini juga diharapkan mampu memberikan pengetahuan tentang pengaruh Angka Harapan Hidup, Rata-Rata Lama Sekolah, dan Pengeluaran per Kapita terhadap IPM di Provinsi Sulawesi Selatan tahun 2012 - 2018.

1.5 Batasan Masalah

Untuk membatasi masalah dalam penelitian ini agar sesuai dengan yang dimaksud dan tidak terjadi penyimpangan maka peneliti perlu memberikan batasan masalah yaitu penelitian hanya berfokus pada IPM Sulawesi Selatan tahun 2012 - 2018 di 24 Kabupaten/Kota. Objek penelitian ini adalah IPM, Angka Harapan Hidup, Rata-Rata Lama Sekolah, dan Pengeluaran per Kapita. Dalam melakukan pemilihan model regresi data panel digunakan dua uji yaitu Uji *Chow* dan Uji *Hausman*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Estimasi Parameter pada Regresi Linier Berganda

Untuk mengestimasi parameter digunakan suatu metode pendugaan parameter. Salah satu metode yang umum dipakai dalam menduga parameter yaitu Metode Kuadrat Terkecil. Sebelum mengestimasi parameter pada Regresi Linier Berganda perlu kita ketahui model umum regresi linier berganda.

2.1.1 Model Umum Regresi Linier Berganda

Menurut (Mona *et al*., 2015) analisis yang memiliki variabel bebas lebih dari satu disebut regresi linier berganda. Teknik regresi linier berganda digunakan untuk mengetahui ada tidaknya pengaruh signifikan dua atau lebih variabel bebas $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k)$ terhadap variabel tak bebas (Y). Model umum regresi linier berganda dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} X_j\beta_j + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,k. \tag{2. 1}$$

dengan: Y_i adalah variabel tak bebas/respon ke-i; β_0 dan β_j adalah parameter regresi; X_j adalah variabel-variabel bebas ke-j; dan ε_i merupakan residual ke-i dengan $\varepsilon_i \sim IIDN(0, \sigma^2)$

Persamaan (2.1) dapat juga dituliskan dalam bentuk matriks seperti berkut:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2. 2}$$

dengan: $\boldsymbol{Y}$ adalah vektor berukuran n x 1; $\boldsymbol{X}$ adalah matriks berukuran n x (k+1); $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor berukuran (k+1) x 1; dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor berukuran n x1, dengan asumsi nilai harapan residual yaitu $E(\varepsilon) = 0$.

2.1.2 Metode *Ordinary Least Square*

Menurut (Drapper & Smith, 1998) Metode *Ordinary Least Square* (OLS) adalah teknik pengepasan garis lurus terbaik pada data tertentu untuk ungkan variabel bebas X dan variabel tak bebas Y. Metode OLS yang igunakan dalam analisis regresi linier untuk mendapatkan penduga bagi r. Berdasarkan persamaan (2. 2) diperoleh residual:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta \tag{2. 3}$$

dan jumlah kuadrat residual

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta)'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta) \\ &= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \beta'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}\beta + \beta'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\beta \\ &= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{2}\beta'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \beta'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\beta \end{aligned} \tag{2. 4}$$

dengan adanya sifat transpos matriks yaitu $(\boldsymbol{X\beta})' = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'$ maka jika $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$ diputar akan menghasilkan nilai yang sama yaitu $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X\beta}$. Untuk mendapatkan $\boldsymbol{\beta}$ yang meminimumkan $\boldsymbol{S},$ maka persamaan (2. 4) diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}$ dan disama dengankan nol yaitu:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{S})}{\partial\boldsymbol{\beta}}\Big|_{\boldsymbol{\beta}=\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$$

$$-2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

$$2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{2. 5}$$

Selanjutnya persamaan (2. 5) dikalikan dengan $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}$ akan menghasilkan:

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{2. 6}$$

karena $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I},$ dimana $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas maka diperoleh

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{2. 7}$$

2.1.3 Metode *Generalized Least Square*

Asumsi-asumsi dalam model regresi linear antara lain tidak adanya autokorelasi dan homoskedastitas. Apabila asumsi-asumsi mengenai tidak adanya autokorelasi dan homoskedastitas tidak terpenuhi, maka metode OLS tidak lagi ...unakan untuk mengestimasi parameter pada model regresi linear. Metode ...*ze Least Square* (GLS) dapat digunakan untuk mengestimasi parameter ...odel regresi linear berbentuk seperti persamaan (2. 2) dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') =$ ... $\boldsymbol{\Omega}$ merupakan matriks yang berukuran $N \times N$.

Pelanggaran asumsi tidak adanya autokorelasi dan homoskedastitas akan diselesaikan dengan mentransformasi data pengamatan model regresi sehingga memenuhi asumsi-asumsi metode OLS. Matriks varians kovarians residual berbentuk $\boldsymbol{\sigma^2\Omega}$ dengan $\boldsymbol{\Omega}$ merupakan matriks nonsingular dan definit positif sehingga terdapat $\boldsymbol{P}$ simetrik nonsingular berukuran $N \times N$ (seperti mengambil akar kuadrat dari $\boldsymbol{\Omega}$) dengan $\boldsymbol{PP}' = \boldsymbol{\Omega}$ (Dwiningsih, 2012). Matriks varians kovarians adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_N\varepsilon_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \sigma^2 \begin{pmatrix} \sigma_1^2/\sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2/\sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2/\sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2\boldsymbol{\Omega} \qquad (2.\ 8)$$

pada kasus homoskedastitas $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{I}$

Jika diketahui matriks varians kovarians dari residual, maka kita dapat membuat model heteroskedastis menjadi homoskedastis (Yamano). Seperti yang didefinisikan sebelumnya, pada persamaan (2. 8) maka terdapat $\boldsymbol{P}$ sehingga $\boldsymbol{PP}' = \boldsymbol{\Omega}$. Didefinisikan variabel-variabel baru dengan mengalikan $\boldsymbol{P}$ dengan persamaan (2. 2) maka diperoleh:

$$\boldsymbol{PY} = \boldsymbol{PX\beta} + \boldsymbol{P\varepsilon} \qquad (2.\ 9)$$

Dari persamaan tersebut dapat dibentuk persamaan baru untuk residual yaitu:

$$\boldsymbol{P\varepsilon} = \boldsymbol{PY} - \boldsymbol{PX\beta}$$

dan jumlah kuadrat residual,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{P\varepsilon}'\boldsymbol{P\varepsilon} \\ &= (\boldsymbol{PY} - \boldsymbol{PX}\beta)'(\boldsymbol{PY} - \boldsymbol{PX}\beta) \\ &= \boldsymbol{PY}'\boldsymbol{PY} - \beta'\boldsymbol{PX}'\boldsymbol{PY} - \boldsymbol{PY}'\boldsymbol{PX}\beta + \beta'\boldsymbol{PX}'\boldsymbol{PX}\beta \\ &= \boldsymbol{PY}'\boldsymbol{PY} - 2\beta'\boldsymbol{PX}'\boldsymbol{PY} + \beta'\boldsymbol{PX}'\boldsymbol{PX}\beta \qquad (2.\ 10) \end{aligned}$$

...n jumlah kuadrat $\boldsymbol{P\varepsilon}$ pada persamaan (2. 10) diturunkan dan ...ngankan nol,

$$\frac{\partial(\boldsymbol{L})}{\partial\boldsymbol{\beta}}\Big|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{PY'PY} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{PX'PY} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{PX'PX}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$$

$$-2\boldsymbol{PX'PY} + 2\boldsymbol{PX'PX}\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

$$2\boldsymbol{PX'PX}\hat{\boldsymbol{\beta}} = 2\boldsymbol{PX'PY}$$

$$\boldsymbol{PX'PX}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{PX'PY}$$

$$(\boldsymbol{PX'PX})^{-1}(\boldsymbol{PX'PX})\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{PX'PX})^{-1}\boldsymbol{PX'PY} \qquad (2.\ 11)$$

hasil turunan pertama disamadengankan nol pada persamaan (2. 11) kemudian membentuk persamaan normal, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS} &= [(\boldsymbol{PX})'(\boldsymbol{PX})]^{-1}(\boldsymbol{PX})'(\boldsymbol{PY}) \\ &= (\boldsymbol{X'P'PX})^{-1}(\boldsymbol{X'P'PY}) \\ &= (\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X})^{-1}(\boldsymbol{X'\Omega^{-1}Y}) \qquad (2.\ 12)\end{aligned}$$

2.1.4 Sifat Estimator

Untuk mengetahui estimator yang digunakan adalah estimator terbaik dapat dilakukan dengan melihat sifat-sifat estimatornya yaitu estimator yang bersifat tak bias, variansi minimum, dan konsisten (Setyawan R *et al*., 2019).

1. Sifat Tak Bias Estimator GLS

Dari hasil estimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$ dengan menggunakan GLS, maka estimator $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}$ dapat dinyatakan sebagai persamaan (2. 12). Sehingga

$$\begin{aligned}E(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}) &= E[(\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'\Omega^{-1}Y}] \\ &= E[(\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'\Omega^{-1}}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})] \\ &= E[(\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X\beta} + (\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'\Omega^{-1}\varepsilon}] \\ &= E[\boldsymbol{I\beta} + (\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'\Omega^{-1}\varepsilon}] \\ &= E(\boldsymbol{\beta}) + E((\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'\Omega^{-1}\varepsilon}) \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X'\Omega^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'\Omega^{-1}}E(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \boldsymbol{\beta} + 0 \\ &= \boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

Karena terbukti $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}) = \boldsymbol{\beta}$ maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}$ merupakan estimator tak bias dari $\boldsymbol{\beta}$.

2. Sifat Varians Minimum Estimator GLS

Untuk menunjukkan jika semua β_i dalam vektor $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}$ adalah estimator yang efisien, maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}$ harus dibuktikan mempunyai variansi minimum.

Dengan:

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS} - \boldsymbol{\beta} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\beta} \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\beta} \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta} \\
&= \boldsymbol{I\beta} - \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}$$

maka,

$$\begin{aligned}
Var\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}\right) &= E\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS} - \boldsymbol{\beta}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS} - \boldsymbol{\beta}\right)'\right] \\
&= E[((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})'] \\
&= E[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}] \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}']\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^{2}\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= \boldsymbol{\sigma}^{2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= \boldsymbol{\sigma}^{2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}
\end{aligned}$$

misalkan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}$ adalah alternatif estimator tak bias yang lain. Akan ditunjukkan jika $Var\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}\right) \leq Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*})$.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*} = [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{Y}$$

dengan **c** adalah matriks konstanta

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*} &= [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{Y} \\
&= [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}](\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{cX\beta} + \boldsymbol{c\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{I\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{c\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{c\varepsilon}
\end{aligned}$$

karena diasumsikan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}$ tak bias maka $E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}) = \boldsymbol{\beta}$. Jadi, $\boldsymbol{cX\beta}$ seharusnya matriks nol karena $\boldsymbol{cX} = 0$.

$$\begin{aligned}
&= \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{c\varepsilon} - \boldsymbol{\beta} \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{c\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$= [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2. 13}$$

maka diperoleh hasil $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta}$ pada persamaan (2. 13)

$$\begin{aligned}
var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*) &= E[(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta})(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta})'] \\
&= E[[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]'] \\
&= [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]' \\
&= [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{\sigma}^{2}\boldsymbol{\Omega}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{c}]' \\
&= \boldsymbol{\sigma}^{2}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}]' + \\
&\quad ((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}' + \mathbf{c}\boldsymbol{\Omega}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}]' + \mathbf{c}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}' \\
&= \boldsymbol{\sigma}^{2}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} + \mathbf{c}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}' \\
&= Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{GLS}}) + \boldsymbol{\sigma}^{2}\mathbf{c}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}'
\end{aligned} \tag{2. 14}$$

Persamaan (2. 14) menunjukkan bahwa matriks variansi estimator alternative linear tak bias $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ merupakan penjumlahan matriksvariansi estimator GLS dengan $\boldsymbol{\sigma}^{2}\mathbf{c}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}'$. Secara matematis terbukti bahwa $Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{GLS}}) \leq Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*)$.

3. Sifat Konsisten Estimator GLS

Untuk menentukan estimator bersifat konsisten menggunakan teorema ketidaksamaan Chebyshev's yaitu:

$$P(|X - \mu\bar{x}| < k\sigma\bar{x}) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

diperoleh:

a. $\mu\bar{x} = E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}) = \boldsymbol{\beta}$

b. $\sigma_{\bar{x}}^2 = var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}$

c. $\sigma x = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}}}$

maka,

$$P\left(\left|\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{GLS}} - \boldsymbol{\beta}\right| < k\frac{\sigma}{\sqrt{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

misalkan:

$$\varepsilon = k\frac{\sigma}{\sqrt{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}}}$$

$$k = \frac{\varepsilon\sqrt{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}}}{\sigma}$$

$$k^2 = \frac{\varepsilon^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})}{\sigma^2}$$

sehingga,

$$P\left(\left|\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS} - \boldsymbol{\beta}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{\frac{\varepsilon^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})}{\sigma^2}}$$

$$P\left(\left|\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS} - \boldsymbol{\beta}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})}$$

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\left|\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS} - \boldsymbol{\beta}\right| < \varepsilon\right) \geq \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})}\right) = 1$$

dengan demikian $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GLS}$ merupakan estimator konsisten bagi $\boldsymbol{\beta}$.

2.2 Struktur Data Panel

Sebelum melakukan analisis data panel, data harus disusun dalam struktur data panel yang ditunjukkan pada tabel (2.1) (Purwaningsih *et al*., 2013).

Tabel 2. 1 Struktur Data Panel

Individu	Waktu	Variabel				
i	t	y_{it}	x_{1it}	x_{2it}	$\cdots$	x_{kit}
1	1	y_{11}	x_{111}	x_{211}	$\cdots$	x_{k11}
	2	y_{12}	x_{112}	x_{212}	$\cdots$	x_{k12}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	T	y_{1T}	x_{11T}	x_{21T}	$\cdots$	x_{k1T}
2	1	y_{21}	x_{121}	x_{221}	$\cdots$	x_{k21}
	2	y_{22}	x_{122}	x_{222}	$\cdots$	x_{k22}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	T	y_{2T}	x_{12T}	x_{22T}	$\cdots$	x_{k1T}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
N	1	Y_{N1}	x_{1N1}	x_{2N1}	$\cdots$	x_{kN1}
	2	Y_{N2}	x_{1N2}	x_{2N2}	$\cdots$	x_{kN2}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	T	y_{NT}	x_{1NT}	x_{2NT}	$\cdots$	x_{kNT}

rwaningsih *et al*., 2013

keterangan:

y_{it} : nilai variabel tidak bebas individu ke-*i* waktu ke-*t*

x_{jit} : nilai variabel bebas ke-*j* untuk individu ke-*i* waktu ke-*t*

N : banyak unit individu ; *i* = 1,2,…, N

T : banyak unit waktu ; *t* = 1,2,…, T

k : banyaknya variabel bebas ; *j* =1,2,…, *k*

2.3 Regresi Data Panel

Menurut (Hsiao, 2003) regresi data panel adalah regresi yang menggunakan data panel yaitu data pengamatan terhadap satu atau lebih variabel pada suatu unit secara terus menerus dalam beberapa periode waktu. Bentuk umum model regresi data panel adalah sebagai berikut:

$$y_{it} = \beta_0 + x_{1it}\beta_1 + x_{2it}\beta_2 + \cdots + x_{kit}\beta_k + \varepsilon_{it} \ , i = 1,2,\dots,N \quad t = 1,2,\dots,T \tag{2. 15}$$

atau dalam bentuk matriks,

$$\boldsymbol{Y}_{it}^* = \boldsymbol{X}_{it}^*\boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_{it}^* \tag{2. 16}$$

dengan,

$\boldsymbol{Y}_{it}^* = (y_{i1} \quad y_{i2} \quad \dots \quad y_{iT})'$

$$\boldsymbol{X}_{it}^* = (\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{x}_{1it} \quad \boldsymbol{x}_{2it} \quad \dots \quad \boldsymbol{x}_{kit}) = \begin{pmatrix} 1 & x_{1i1} & x_{2i1} & \cdots & x_{ki1} \\ 1 & x_{1i2} & x_{2i2} & \cdots & x_{ki2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{1iT} & x_{2iT} & \cdots & x_{kiT} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\beta}^* = (\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_k)'$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{it}^* = (\varepsilon_{i1} \quad \varepsilon_{i2} \quad \dots \quad \varepsilon_{iT})'$

Terdapat beberapa kemungkinan asumsi pada data panel, yaitu:

1. Intersep dan koefisien regresi tetap sepanjang waktu dan individu serta perbedaan intersep dan koefisien regresi dijelaskan oleh variabel residual, modelnya dituliskan pada persamaan (2. 15).
2. Koefisien regresi tetap, tetapi intersep berbeda antarindividu, modelnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_{it} = \beta_{0i} + x_{1it}\beta_1 + x_{2it}\beta_2 + \cdots + x_{kit}\beta_k + \varepsilon_{it} \ , \tag{2. 17}$$

$$i = 1,2, \dots, N\,; \;\; t = 1,2, \dots, T$$

3. Koefisien regresi tetap, tetapi intersep bervariasi setiap individu dan waktu, modelnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_{it} = \beta_{0i} + x_{1it}\beta_1 + x_{2it}\beta_2 + \cdots + x_{kit}\beta_k + \varepsilon_{it} \quad , \qquad (2.\,18)$$

$$i = 1,2, \dots, N\,; \;\; t = 1,2, \dots, T$$

4. Intersep dan koefisien regresi bervariasi setiap individu, modelnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_{it} = \beta_{0i} + x_{1it}\beta_{1i} + x_{2it}\beta_{2i} + \cdots + x_{kit}\beta_{ki} + \varepsilon_{it} \quad , \qquad (2.\,19)$$

$$i = 1,2, \dots, N\,; \;\; t = 1,2, \dots, T$$

5. Intersep dan koefisien regresi bervariasi setiap waktu dan individu, modelnya adalah:

$$y_{it} = \beta_{0it} + x_{1it}\beta_{1it} + x_{2it}\beta_{2it} + \cdots + x_{kit}\beta_{kit} + \varepsilon_{it} \quad , \qquad (2.\,20)$$

$$i = 1,2, \dots, N\,; \;\; t = 1,2, \dots, T$$

2.4 Uji Spesifikasi Model

Seperti yang telah diketahui dalam regresi data panel terdapat tiga model antara lain: MEU, MET, dan MEA untuk menentukan suatu data masuk ke dalam salah satu model tersebut, maka dilakukan uji spesifikasi mode sebagai berikut:

2.4.1 Uji *Chow*

Memilih antara MEU dan MET dengan menggunakan Uji *Chow* dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \cdots = \beta_{0N} = \beta_0$ (Regresi data panel MEU)

$H_1 :$ Minimal ada satu β_{0i} yang berbeda (Regresi data panel MET) $i = 1,2,3, \dots N$

Statistik Uji:

$$F_{hitung} = \frac{\dfrac{JK_{res(MEU)} - JK_{res(MET)}}{N-1}}{\dfrac{JK_{res(MET)}}{NT - N - k}} \qquad (2.\,21)$$

dengan : $JK_{res(MEU)}$ adalah jumlah kuadrat residual MEU; $JK_{res(MET)}$ adalah uadrat residual MET; N adalah jumlah unit *cross section*; T adalah jumlah u; dan k adalah jumlah variabel bebas.

Kriteria penolakan H_0 adalah $F_{hitung} > F_{tabel(0.05(N-1,NT-N-K))}$, yang artinya intersep untuk semua unit *cross section* tidak sama sehingga model persamaan regresinya menggunakan MET, jika sebaliknya maka H_0 diterima dan persamaan regresinya menggunakan MEU (Ghozi, 2018).

2.4.2 Uji *Hausman*

Uji *Hausman* dapat digunakan untuk memilih antara MET dan MEA. Rumusan hipotesisnya adalah sebagai berikut:

$H_0 : Corr(X_{ij}, \varepsilon_{ij}) = 0$ (efek *cross section* berhubungan dengan variabel independen lain model yang digunakan yaitu MEA)

$H_1 : Corr(X_{ij}, \varepsilon_{ij}) \neq 0$ (efek *cross section* tidak berhubungan dengan variabel independen lain model yang digunakan yaitu MET)

Statistik uji:

$$W = (\hat{\beta}_{MET} - \hat{\beta}_{MEA}) var(\hat{\beta}_{MET} - \hat{\beta}_{MEA})^{-1} (\hat{\beta}_{MET} - \hat{\beta}_{MEA}) \qquad (2.\ 22)$$

dengan : $\hat{\beta}_{MET}$ adalah koefisien Regresi data panel MET; dan $\hat{\beta}_{MEA}$ adalah koefisien regresi data panel MEA.

Statistik W menyebar dengan distribusi *Chi Square*, jika nilai $W > X^2_{(K;0,05)}$ (k = jumlah variabel) atau nilai $p - value < 0.05$, maka H_0 ditolak sehingga model yang terpilihn adalah MET (Ghozi, 2018).

2.5 Model Efek Tetap

Berdasarkan pernyataan Hsiao dalam (Latuconsina, 2017) MET menetapkan bahwa β_0 adalah sebagai kelompok yang spesifik/berbeda setiap individu pada model regresinya. Formulasi yang biasa dipakai dalam model mengasumsikan bahwa perbedaan antarindividu dapat dilihat dalam perbedaan intersepnya. MET disini mengasumsikan bahwa tidak ada efek waktu yang spesifik dan hanya memfokuskan pada efek individu yang spesifik dengan model sebagai berikut:

$$y_{it} = \beta_{0i} + x_{1it}\beta_1 + x_{2it}\beta_2 + \cdots + x_{kit}\beta_k + \varepsilon_{it} \quad , \qquad (2.\ 23)$$

$$i = 1,2, \dots, N \; ; \quad t = 1,2, \dots, T$$

Indeks i pada intersep (β_{0i}) menunjukkan bahwa intersep dari masing-masing individu berbeda, namun intersep untuk unit *time series* tetap (konstan).

2.6 Metode *First Difference*

Sebelum melakukan proses *first difference* dilakukan uji asumsi klasik untuk melihat apakah data yang digunakan telah memenuhi kriteria atau tidak.

2.6.1 Uji Asumsi Klasik

Menurut (Ghozali, 2011) uji asumsi klasik terhadap model regresi linier yang digunakan dilakukan agar dapat diketahui apakah model regresi baik atau tidak. Tujuan pengujian asumsi klasik adalah untuk memberikan kepastian bahwa persamaan regresi yang diperoleh memiliki ketepatan dalam estimasi, tidak bias, dan konsisten. Sebelum melakukan analisis regresi terlebih dahulu dilakukan pengujian asumsi. Asumsi-asumsi yang harus dipenuhi dalam analisis regresi antara lain: normalitas, multikolinearitas, dan heteroskedastitas.

1. Uji Normalitas

Menurut (Ghozali,2013) uji normalitas bertujuan untuk menguji apakah dalam model regresi variabel pengganggu atau residual memiliki distribusi normal atau tidak. Apabila asumsi ini dilanggar maka uji statistik menjadi tidak berlaku. Nilai residual dikatakan berdistribusi normal jika nilai residual tersebut sebagian besar mendekati nilai rata-rata.

Menurut (Jarque & Bera, 1987) banyak jenis uji statistik normalitas yang dapat digunakan diantaranya *Kolmogorov Smirnov*, *Lilliefors*, *Shapiro Wilk*, dan *Jarque Bera*. Pada penelitian ini akan digunakan uji normalitas residual dengan uji *lilliefors* karena persyaratannya bersesuaian dengan data yang akan digunakan yaitu; data berskala interval atau ratio (kuantitatif) dan dapat digunakan untuk jumlah pengamatan yang besar maupun kecil. Adapun hipotesis uji *Lilliefors* sebagai berikut:

: $\varepsilon_i = 0$ data residual berdistribusi normal

: $\varepsilon_i \neq 0$ data residual tidak berdistribusi normal

Persamaan uji *lilliefors* adalah sebagai berikut:

$$max|F(z_i) - S(z_i)| \tag{2. 24}$$

dengan: $F(z_i) = P(Z \leq z_i)$

$S(z_i) = \frac{f_k}{n}$

$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{sd}$

keterangan:

$F(z_i)$ = probabilitas komulatif normal

$S(z_i)$ = probabilitas komulatif empiris

f_k = frekuensi kumulatif

x_i = data ke-i

$\bar{x}$ = rata-rata

sd = standar deviasi

n = banyaknya data

Signifikansi uji, nilai terbesar $|F(z_i) - S(z_i)|$ dibandingkan dengan nilai tabel *Liliefors*. Jika nilai $|F(z_i) - S(z_i)|$ terbesar kurang dari nilai tabel *lilliefors*, maka H_0 diterima dan H_1 ditolak. Jika nilai $|F(z_i) - S(z_i)|$ terbesar lebih besar dari nilai tabel *lilliefors*, maka H_0 ditolak dan H_1 diterima (Haniah, 2017).

2. Uji Multikolinearitas

Menurut (Astuti *et al.*, 2017) Multikolinearitas dapat diartikan sebagai hubungan linear dari beberapa variabel bebas dari model regresi berganda. Salah satu cara mendeteksi kasus multikolinieritas adalah dengan melihat nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) pada model regresi. Adanya multikolinieritas dapat diketahui jika nilai VIF > 10. Dalam buku (Gujarati, 2006) besarnya VIF dapat didapatkan dengan rumus :

$$VIF = \frac{1}{tolerance} = \frac{1}{1 - r_j^2} \tag{2. 25}$$

dengan: r_j adalah korelasi antarvariabel bebas

3. Uji Heteroskedastitas

Uji heteroskedastitas bertujuan untuk melihat sebaran atau variansi titik-titik dari nilai residual. Model regresi yang baik juga salah satunya ialah nilai residual yang muncul dalam fungsi regresi populasi mempunyai varians yang sama atau homoskedastisitas. Pelanggaran ini disebut heteroskedastisitas yakni nilai variansi residual tidak sama. Menurut Rosadi dalam (Riyanti, 2018), uji yang digunakan untuk melihat apakah ada heteroskedastitas atau tidak yaitu Uji *Lagrange Multiplier* (LM). Menurut (Astuti *et al*., 2017) uji LM digunakan unutk menguji apakah terdapat heteroskedastitas pada model efek tetap antarkelompok individu *cross section*, dengan hipotesis :

H_0 : $\sigma_i^2 = 0$ (MET memiliki struktur yang homokedastik) ; ; $i = 1,2, \dots, n$

H_0 : $\sigma_i^2 \neq 0$ (MET memiliki struktur yang heteroskedastik) ; $i = 1,2, \dots, n$

Statistik uji:

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}[\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}]^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}^2} - 1\right]^2 \qquad (2.\ 26)$$

dengan: N adalah jumlah individu; T adalah jumlah periode waktu; dan ε adalah residual.

Kriteria uji, jika nilai $LM > X^2_{\alpha,N-1}$ atau p-*value* kurang dari taraf signifikansi maka tolak hipotesis awal (H_0) sehingga struktur *variance-covariance residual* bersifat heteroskedastitas.

4. Uji Autokorelasi

Menurut (Silalahi *et al*., 2014). Uji autokorelasi bertujuan untuk menguji apakah terdapat korelasi antara anggota serangkaian observasi yang diurutkan menurut waktu (seperti data *time series*) atau ruang (seperti data *cross section*). Dalam penelitian ini digunakan uji *Durbin Watson* (Uji DW). Dalam buku (Gujarati, 2006) nilai *DW* didapatkan dengan rumus:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2} \qquad (2.\ 27)$$

ji *DW* dapat dilihat dengan membandingkan nilai *DW* dengan nilai dL dan yang diperoleh dari tabel *DW*, berikut merupakan kriteria pengambilan n seperti pada tabel (2.2).

Tabel 2. 2 Kriteria Uji *Durbin Watson*

Kategori	Keterangan	Keputusan	Jika
1	Tidak ada autokorelasi positif	Menolak	$0 < DW < d_L$
2	Tidak ada autokorelasi positif	Tidak ada keputusan	$d_L \leq DW \leq d_U$
3	Tidak ada korelasi negatif	Menolak	$4 - d_L < DW < 4$
4	Tidak ada korelasi negatif	Tidak ada keputusan	$4 - d_U \leq DW \leq 4 - d_L$
5	Tidak ada autokorelasi, positif atau negatif	Jangan tolak	$d_U < DW < 4 - d_U$

Sumber : Gujarati, 2006

2.6.2. *First Difference*

Menurut (Muck, 2018) Metode *First Difference* adalah salah satu teknik estimasi untuk mengeliminasi efek tetap yang juga regressor invarian waktu. Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= \beta_{0i} + x_{1it}\beta_1 + x_{2it}\beta_2 + \cdots + x_{kit}\beta_k + \varepsilon_{it} \\
y_{i(t-1)} &= \beta_{0i} + x_{1i(t-1)}\beta_1 + x_{2i(t-1)}\beta_2 + \cdots + x_{ki(t-1)}\beta_k + \varepsilon_{i(t-1)} \\
y_{it} - y_{i(t-1)} &= (x_{1it} - x_{1i(t-1)})\beta_1 + (x_{2it} - x_{2i(t-1)})\beta_2 + \cdots + (x_{kit} \\
&\quad - x_{ki(t-1)})\beta_k + (\varepsilon_{it} - \varepsilon_{i(t-1)})
\end{aligned}
$$

dan hasil *first difference* kedua persamaan:

$$\Delta y_{it} = \Delta x_{1it}\beta_1 + \Delta x_{2it}\beta_2 + \cdots + \Delta x_{kit}\beta_k + \Delta\varepsilon_{it} \qquad (2.\ 28)$$

dengan,

$\Delta y_{it} = y_{it} - y_{i(t-1)}$

$\Delta x_{jit} = x_{jit} - x_{ji(t-1)}\ ,\ j = 1,2, \dots, k$

atau dalam bentuk matriks,

$$\Delta \boldsymbol{Y}_{it} = \Delta \boldsymbol{X}_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{it} \qquad (2.\ 29)$$

dengan,

$$\Delta \boldsymbol{Y_{it}} = (y_{i2} - y_{i1} \quad y_{i3} - y_{i2} \quad \dots \quad y_{iT} - y_{i(T-1)})'$$

$$= (\Delta y_{i1} \quad \Delta y_{i2} \quad \dots \quad \Delta y_{i(T-1)})'$$

$$= (y_{i1}^* \quad y_{i2}^* \quad \dots \quad y_{i(T-1)}^*)'$$

$$\Delta \boldsymbol{X_{it}} = \begin{pmatrix} x_{1i2} - x_{1i1} & x_{2i2} - x_{2i1} & \dots & x_{ki2} - x_{ki1} \\ x_{1i3} - x_{1i2} & x_{2i3} - x_{2i2} & \dots & x_{ki3} - x_{ki2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1iT} - x_{1i(T-1)} & x_{2iT} - x_{2i(T-1)} & \dots & x_{kiT} - x_{ki(T-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta x_{1i1} & \Delta x_{2i1} & \dots & \Delta x_{ki1} \\ \Delta x_{1i2} & \Delta x_{2i2} & \dots & \Delta x_{ki2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta x_{1i(T-1)} & \Delta x_{2i(T-1)} & \dots & \Delta x_{ki(T-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{1i1}^* & x_{2i1}^* & \dots & x_{ki1}^* \\ x_{1i2}^* & x_{2i2}^* & \dots & x_{ki2}^* \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1i(T-1)}^* & x_{2i(T-1)}^* & \dots & x_{ki(T-1)}^* \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon_{it}} = (\varepsilon_{i2} - \varepsilon_{i1} \quad \varepsilon_{i3} - \varepsilon_{i2} \quad \dots \quad \varepsilon_{iT} - \varepsilon_{i(T-1)})'$$

$$= (\Delta\varepsilon_{i1} \quad \Delta\varepsilon_{i2} \quad \dots \quad \Delta\varepsilon_{i(T-1)})'$$

$$= (\varepsilon_{i1}^* \quad \varepsilon_{i2}^* \quad \dots \quad \varepsilon_{i(T-1)}^*)'$$

First difference juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks transformasi $\boldsymbol{D}$ yang berukuran $(T-1) \times T$ yaitu,

$$\underset{(T-1)\times T}{\boldsymbol{D}} = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & & & 0 \\ 0 & & & & 1 & 1 \end{array} \tag{2. 30}$$

kemudian matriks $\boldsymbol{D}$ dikalikan dengan persamaan (2. 16),

$$\boldsymbol{D}\begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}\begin{pmatrix} 1 & x_{1i1} & x_{2i1} & \dots & x_{ki1} \\ 1 & x_{1i2} & x_{2i2} & \dots & x_{ki2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{1iT} & x_{2iT} & \dots & x_{kiT} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \boldsymbol{D}\begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} \end{pmatrix}$$

alian tersebut selanjutnya diperoleh,

$$\begin{pmatrix} y_{i2} - y_{i1} \\ y_{i3} - y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} - y_{i(T-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{1i2} - x_{1i1} & x_{2i2} - x_{2i1} & \cdots & x_{ki2} - x_{ki1} \\ 0 & x_{1i3} - x_{1i2} & x_{2i3} - x_{2i2} & \cdots & x_{ki3} - x_{ki2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_{1iT} - x_{1i(T-1)} & x_{2iT} - x_{2i(T-1)} & \cdots & x_{kiT} - x_{ki(T-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i2} - \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i3} - \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} - \varepsilon_{i(T-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{i1} \\ \Delta y_{i2} \\ \vdots \\ \Delta y_{i(T-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_{1i1} & \Delta x_{2i1} & \cdots & \Delta x_{ki1} \\ \Delta x_{1i2} & \Delta x_{2i2} & \cdots & \Delta x_{ki2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta x_{1i(T-1)} & \Delta x_{2i(T-1)} & \cdots & \Delta x_{ki(T-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{i1} \\ \Delta \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \Delta \varepsilon_{i(T-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^*_{i1} \\ y^*_{i2} \\ \vdots \\ y^*_{i(T-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^*_{1i1} & x^*_{2i1} & \cdots & x^*_{ki1} \\ x^*_{1i2} & x^*_{2i2} & \cdots & x^*_{ki2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x^*_{1i(T-1)} & x^*_{2i(T-1)} & \cdots & x^*_{ki(T-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^*_{i1} \\ \varepsilon^*_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon^*_{i(T-1)} \end{pmatrix}$$

atau, dalam bentuk matriks modelnya adalah:

$$\boldsymbol{DY}_i = \boldsymbol{DX}_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{D\varepsilon}_i \tag{2. 31}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa model persamaan (2. 29) sama dengan persamaan (2. 31). Dengan demikian, setelah dilakukan *first difference* semua variabel invarian waktu (β_0) hilang pada model dan residual bukan lagi ε_{it} melainkan $\Delta\varepsilon_{it}$ dimana.

$$\Delta\varepsilon_{it} = \varepsilon_{it} - \varepsilon_{it-1}$$

$$\Delta\varepsilon_{it-1} = \varepsilon_{it-1} - \varepsilon_{it-2}$$

kedua residual memiliki varians yang sama,

$$Var(\Delta\varepsilon_{it}) = Var(\Delta\varepsilon_{it-1}) = 2\sigma^2$$

sedangkan kovariannya,

$$Cov(\Delta\varepsilon_{it}, \Delta\varepsilon_{it-1}) = Cov(\varepsilon_{it} - \varepsilon_{it-1}, \varepsilon_{it-1} - \varepsilon_{it-2}) = -\sigma^2$$

matriks varians kovarians baru residual *first difference* dapat dituliskan:

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2\boldsymbol{DD}' = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{(T-1)\times(T-1)} \tag{2. 32}$$

rosedur *first difference* mengakibatkan residual berautokorelasi karena $, \Delta\varepsilon_{it-1}) \neq 0$. Maka metode yang efisien untuk mengestimasi model *first* e adalah GLS.

Contoh untuk mendapatkan matriks transformasi $\boldsymbol{D}$ yaitu:

Misalkan terdapat matriks $\boldsymbol{Z}$ yang akan di *first difference*,

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{pmatrix}$$

hasil *first difference* $\boldsymbol{Z}$ adalah,

$$\Delta\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_2 - Z_1 \\ Z_3 - Z_2 \\ Z_4 - Z_3 \\ Z_5 - Z_4 \end{pmatrix}$$

dapat juga dilakukan *first difference* dengan bantuan matriks transformasi $\boldsymbol{D}$ yaitu,

$$\boldsymbol{D} = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

karena $\boldsymbol{Z}$ berdimensi 5×1 maka $\boldsymbol{D}$ harus memiliki kolom sebanyak 5 agar dapat dikalikan dengan $\boldsymbol{Z}$, kemudian dilihat pada baris pertama $\Delta\boldsymbol{Z}$ diperoleh *first difference*-nya yaitu $Z_2 - Z_1$ maka elemen matriks pada baris pertama $\boldsymbol{D}$ yaitu $D_{11} = -1$ dan $D_{12} = 1$ dan yang lain 0 (pada baris pertama), kemudian pada baris kedua $Z_3 - Z_2$ maka elemen matriks pada baris kedua yaitu $D_{22} = -1$ dan $D_{23} = 1$ dan yang lain 0 (pada baris kedua), begitu seterusnya sampai baris terakhir maka diperoleh $\boldsymbol{D}$ yang membuat *first difference* $\boldsymbol{Z}$. Dapat dilihat dari $\boldsymbol{Z}$ yang berdimensi 5×1 memiliki $\boldsymbol{D}$ berdimensi 4×5 maka dapat disimpulkan bahwa suatu matriks yang memiliki dimensi $T \times 1$ akan memiliki $\boldsymbol{D}$ yang berdimensi $(T - 1) \times T$.

2.7 Uji Signifikansi Parameter

Uji signifikansi parameter digunakan untuk mengetahui apakah ada hubungan parameter di dalam model regresi. Uji signifikansi parameter yang dipakai yatu koefisien determinasi, uji F, dan uji t.

2.7.1 Uji F

Uji F atau uji serentak digunakan untuk mengetahui pengaruh variabel tak bebas terhadap variabel bebas secara bersama-sama. Hipotesis yang digunakan sebagai berikut :

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$

H_1 : Paling sedikit ada satu $\beta_j \neq 0$

Statistik uji:

$$F = \frac{KT_{reg}}{KT_{res}} \tag{2. 33}$$

Tabel 2. 3 Tabel Analisis Variansi

Sumber Keragaman	Derajat Bebas (db)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)
Regresi	k	JK_{reg}	JK_{reg}/db_{reg}
Residual	$NT - N - k$	JK_{res}	JK_{res}/db_{res}
Total	$NT - N$	JK_{tot}	

Sumber: Baltagi, 2005

Keterangan :

$JK_{reg} \quad = \sum_{i=1}^{N} (\hat{Y}_{it} - \bar{Y})^2$

$JK_{res} \quad = \sum_{i=1}^{N} (Y_{it} - \hat{Y}_{it})^2$

$JK_{tot} \quad = \sum_{i=1}^{N} (Y_{it} - \bar{Y})^2$

Kriteria uji yang digunakan adalah jika $F_{hitung} > F_{tabel(k;NT-N-k;\alpha)}$ atau $p_{value} < \alpha$ maka tolak H_0 (Baltagi, 2005).

2.7.2 Uji t

Uji ini dilakukan untuk mengetahui signifikansi variabel bebas secara individu terhadap variabel terikatnya. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut:

$H_0 : \beta_j = 0$ untuk $j = 1,2, \dots, k$ (tidak ada hubungan linier antara variabel bebas dan variabel tak bebas)

$\beta_j \neq 0$ untuk $j = 1,2, \dots, k$ (ada hubungan linier antara variabel bebas dan ak bebas) dengan statistik uji:

$$t_{hitung} = \frac{\beta_j}{se(\beta_j)} \tag{2. 34}$$

Kriteria uji yang digunakan adalah jika $-t_{tabel(\frac{\alpha}{2},NT-k)} < t_{hitung} < t_{tabel(\frac{\alpha}{2},NT-k)}$, maka terima H_0. NT melambangkan jumlah observasi yang diperoleh dari jumlah individu dikalikan jumlah periode, dan huruf k melambangkan jumlah variabel (termasuk *intercept*). Jika tolak H_0 maka terdapat pengaruh secara individu variabel bebas terhadap variabel terikatnya (Silalahi *et al*., 2014).

2.7.3 Koefisien Determinasi R^2

Koefisien determinasi (R^2) bertujuan untuk mengukur seberapa besar variasi variabel tak bebas (Y) dapat diterangkan oleh variabel bebas (X). Dengan kata lain seberapa jauh kemampuan model dalam menerangkan variasi variabel terikat. Formula R^2 adalah sebagai berikut:

$$R^2 = \frac{JK_{reg}}{JK_{tot}} = 1 - \frac{JK_{res}}{JK_{tot}} \tag{2. 35}$$

Jika garis regresi tepat pada semua data Y, maka JK_{reg} sama dengan JK_{tot} sehingga $R^2 = 1$, sedangkan jika garis regresi tepat pada nilai rata – rata Y maka $JK_{reg} = 0$ sehingga $R^2 = 0$. Nilai R^2 berkisar antara nol dan satu. Nilai R^2 yang kecil berarti kemampuan variabel-variabel bebasnya dalam menjelaskan variasi variabel terikat sangat terbatas. Nilai yang mendekati satu berarti variabel-variabel bebasnya memberikan hampir semua informasi yang dibutuhkan untuk memprediksi variasi variabel terikat (Silalahi *et al*., 2014).

2.8 Indikator IPM

Indeks Pembangunan Manusia merupakan indikator komposit tunggal yang walaupun tidak dapat mengukur semua dimensi dari pembangunan manusia, tetapi mengukur tiga dimensi pokok pembangunan manusia yang dinilai mampu mencerminkan kemampuan dasar (*basic capabilities*) penduduk. Ketiga
uan dasar itu adalah umur panjang dan sehat, berpengetahuan dan
mpilan, serta akses terhadap sumber daya yang dibutuhkan untuk
standar hidup layak. *United Nations Development Programme* (UNDP)

mendefinisikan pembangunan manusia sebagai suatu proses untuk memperluas plihan-pilihan bagi penduduk dalam hal pendapatan, kesehatan, pendidikan, lingkungan fisik, dan sebagainya. Empat hal pokok yang yang perlu diperhatikan dalam pembangunan manusia adalah produktivitas, pemerataan, kesinambungan, pemberdayaan (UNDP, 1995:12).

Titik berat pembangunan nasional Indonesia sesungguhnya sudah menganut konsep tersebut, yakni konsep pembangunan manusia seutuhnya yang menghendaki peningkatan kualitas hidup penduduk baik secara fisik, mental maupun spiritual. Berikut beberapa indikator yang mewakili ketiga dimensi dari IPM (Setiawan & Hakim, 2013). IPM dikelompokkan dalam beberapa kategori, yaitu :

a. IPM < 60 : IPM rendah
b. 60 ≤ IPM < 70 : IPM sedang
c. 70 ≤ IPM < 80 : IPM tinggi
d. IPM ≥ 80 : IPM sangat tinggi

2.9 Angka Harapan Hidup

Angka Harapan Hidup saat Lahir (AHH) atau *Life Expectancy* (e_0) didefinisikan sebagai rata-rata perkiraan banyak tahun yang dapat ditempuh oleh seseorang sejak lahir. AHH mencerminkan derajat kesehatan suatu masyarakat. AHH dihitung dari hasil Proyeksi Sensus Penduduk 2010. Dasar penghitungan AHH adalah menggunakan Angka Kematian Bayi atau *Infant Mortality Rate* (IMR) dengan pola model *West Coaledemeny Trussell equations* dan proyeksi IMR (Wahyuni, 2019).

2.10 Rata – Rata Lama Sekolah

Rata-rata Lama Sekolah (RLS) atau *Mean Years of Schooling* (MYS) didefinisikan sebagai jumlah tahun yang digunakan oleh penduduk dalam menjalani pendidikan formal. Untuk nilai RLS, diasumsikan bahwa dalam kondisi normal lama sekolah suatu wilayah tidak akan turun.

LS digunakan pada IPM metode lama dan metode baru untuk mengukur pendidikan. Tetapi terdapat perbedaan mendasar dalam definisi RLS ini. pada IPM metode lama, RLS dihitung untuk penduduk usia 15 tahun ke atas. Sedangkan pada IPM metode baru, cakupan penduduk yang dihitung RLS adalah penduduk berusia 25 tahun ke atas.

RLS dihitung untuk usia 25 tahun ke atas dengan asumsi pada umur 25 tahun proses pendidikan sudah berakhir. Selain itu, penghitungan RLS pada usia 25 tahun ke atas juga mengikuti standar internasional yang digunakan oleh UNDP (Wahyuni, 2019).

2.11 Pengeluaran Per Kapita Disesuaikan

Pengeluaran per kapita disesuaikan ditentukan dari nilai pengeluaran per kapita dan paritas daya beli. Rata-rata pengeluaran per kapita setahun diperoleh dari Susenas Modul, dihitung dari level provinsi hingga level kab/kota. Rata-rata pengeluaran per kapita ini dibuat konstan/riil dengan tahun dasar 2012=100. Penghitungan paritas daya beli pada IPM metode baru ini menggunakan 96 komoditas dimana 66 komoditas merupakan makanan dan sisanya merupakan komoditas nonmakanan.

Pada IPM metode lama, untuk menghitung paritas daya beli hanya menggunakan 27 komoditas. Dimana *share* 27 komoditas tersebut terus menurun dari 37,52 % pada tahun 1996 menjadi 24,66 % pada tahun 2012. Sedangkan pada IPM metode baru, penghitungan paritas daya beli dipilih 96 komoditas yang memberikan *share* sebesar 73,63 persen (Wahyuni, 2019).