

**SKRIPSI**

**PENGARUH FAKTOR PEREDAM PADA MODEL  
*FLEXURAL-SHEAR* BANGUNAN BERTINGKAT  
SAAT GEMPA BUMI**

**Disusun dan diajukan oleh**

**NUR FAATHIR SUPARDI**

**H011171316**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2021**

**PENGARUH FAKTOR PEREDAM PADA MODEL  
*FLEXURAL-SHEAR* BANGUNAN BERTINGKAT  
SAAT GEMPA BUMI**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada  
Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan  
Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

**NUR FAATHIR SUPARDI**

**H011171316**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

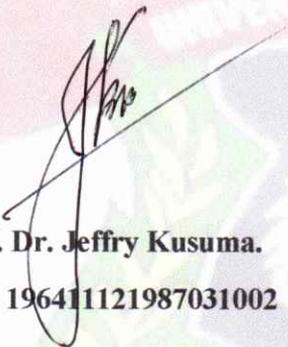
**JULI 2021**

**PENGARUH FAKTOR PEREDAM PADA MODEL  
FLEXURAL-SHEAR BANGUNAN BERTINGKAT SAAT  
GEMPA BUMI**

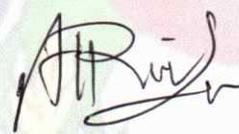
**Disetujui oleh:**

**Pembimbing Utama**

**Pembimbing Pertama**



**Prof. Dr. Jeffry Kusuma.**  
**NIP. 196411121987031002**



**Dr. Agustinus Ribal, S. Si., M. Sc.**  
**NIP. 197508161999031001**

**Pada 14 Juli 2021**

HALAMAN PENGESAHAN

**PENGARUH FAKTOR PEREDAM PADA MODEL  
FLEXURAL-SHEAR BANGUNAN BERTINGKAT SAAT  
GEMPA BUMI**

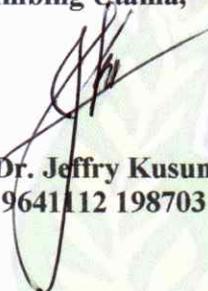
**Disusun dan diajukan oleh**

**NUR FAATHIR SUPARDI**

**H011171316**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin pada tanggal 14 Juli 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

**Pembimbing Utama,**

  
**Prof. Dr. Jeffry Kusuma.**  
NIP. 19641112 198703 1 002

**Pembimbing Pertama,**

  
**Dr. Agustinus Ribal, S. Si., M. Sc.**  
NIP. 19750816 199903 1 001

**Ketua Program Studi,**

  
**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**  
NIP. 19700807 200003 1 002



## LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Nur Faathir Supardi  
NIM : H011171316  
Program Studi : Matematika  
Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul  
“Pengaruh Faktor Peredam pada Model *Flexural-Shear* Bangunan Bertingkat Saat  
Gempa Bumi”

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 14 Juli 2021

Yang Menyatakan



Nur Faathir Supardi

## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

*Alhamdulillahirabbil'alamin*, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT., karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Pengaruh Faktor Peredam pada Model *Flexural-Shear* Bangunan Bertingkat Saat Gempa Bumi**”. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Shalawat dan taslim tak lupa dihaturkan kepada Rasulullah SAW, manusia terakhir yang membawa risalah ilahi yang menjadikannya suri tauladan umat manusia agar mencapai kebahagiaan dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini dengan segala keterbatasan kemampuan dan pengetahuan dapat terlewati berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, untaian kata demi kata penulis susun untuk menggambarkan rasa terimakasih kepada segala pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada kedua orang tua penulis **Drs. Supardi Muhadi** dan **Hj. Hasnah, S. Pd** yang selalu mendukung, memotivasi, dan mendoakan demi perjalanan hidup penulis. Serta kepada kakak-kakak penulis, **Wirawan Setialaksana, S. Pd., M. Sc** dan **Rafsanjani Supardi, S. Pd., M. Pd** yang selalu memotivasi dan memberikan saran berupa ide dalam perjalanan perkuliahan. Penulis juga menghaturkan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, M.A.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, Bapak **Dr. Eng. Amiruddin.**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika dan Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.**, selaku Sekretaris Departemen.
3. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma.**, selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S. Si., M. Sc.**, selaku pembimbing pertama untuk segala ilmu, nasehat, dan kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya untuk mendampingi penulis hingga skripsi dapat terselesaikan.

4. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S. Si., M. Si.**, selaku anggota tim penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Serta Ibu **Naimah Aris, S. Si., M. Math.**, selaku anggota tim penguji yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak, Ibu dosen dan staff administrasi Program Studi Matematika yang telah memberikan banyak ilmu, banyak memberikan dukungan dan membantu mengurus kelancaran studi.
6. Teman-teman selama perkuliahan Matematika 2017 dan 17iskrit Himatika FMIPA Universitas Hasanuddin untuk segala kebersamaan, kerja sama, kenangan suka dan duka. Serta dukungan yang diberikan saat penulis mengalami hambatan dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Keluarga besar Unit Kegiatan Mahasiswa Keilmuan dan Penalaran Ilmiah Universitas Hasanuddin yang telah memberikan banyak pengalaman bagi penulis baik dalam kepenulisan, pengembangan keilmuan, mengasa penalaran, dan *softskill* lainnya. Khususnya teman-teman kabinet berkarya.
8. Teman-teman Komunitas Sahabat Indonesia Berbagi (SIGi) Makassar, Indonesia Millennial Connect (IMC) Regional Makassar, dan Sokola Kaki Langit (SKL) Angkatan 35 karena telah bersedia menampung penulis untuk mengembangkan diri khususnya di bidang sosial pendidikan.
9. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu per satu.

Dalam penyusunan skripsi ini dilakukan secara teliti dan mendetail, namun penulis sadar bahwa masih terdapat beberapa bagian dalam skripsi ini yang membutuhkan saran dan kritik membangun. Penulisan skripsi ini juga diharapkan bisa menjadi stimulus bagi teman-teman mahasiswa untuk meneliti berbagai fenomena alam dengan ilmu matematika. Dan semoga semua yang telah dilakukan bernilai ibadah di sisi Allah SWT., *Aamiin Ya Robbal Alamin.*

Makassar, 14 Juli 2021



Penulis

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR  
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK**

---

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Faathir Supardi  
NIM : H011171316  
Program Studi : Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

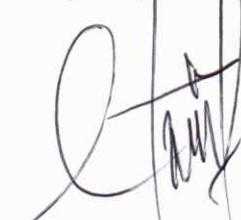
**“Pengaruh Faktor Peredam pada Model *Flexural-Shear* Bangunan Bertingkat Saat Gempa Bumi”**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal tersebut, maka pihak Universitas Hasanuddin berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 14 Juli 2021

Yang menyatakan,



Nur Faathir Supardi

## ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk membentuk model matematika *flexural-shear* pada bangunan bertingkat dengan penambahan faktor peredam sekaligus memberikan solusi analitik dan simulasi dari model tersebut. Penelitian ini menggunakan proses pemodelan secara matematis yang membutuhkan data atau informasi mengenai sifat-sifat elastis pada komponen bangunan, distribusi massa, dan distribusi kekakuan antar lantai. Model tersebut diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel yang menghasilkan sepasang persamaan diferensial biasa, salah satunya merupakan persamaan diferensial tidak linier berorde empat dan satu lainnya merupakan persamaan diferensial linier berorde dua. Kedua solusi persamaan tersebut akan menghasilkan 3 jenis kasus yang memberikan jenis redaman berbeda-beda. Selanjutnya perilaku solusi akan dianalisis pada setiap kasus dengan melakukan simulasi menggunakan software MATLAB R2013a. Hasil simulasi menunjukkan bahwa peredam dengan laju redaman kecil sudah sangat berpengaruh terhadap pergerakan bangunan. Selain itu, peredam dengan laju redaman yang besar membutuhkan waktu yang lebih lama untuk meredam bangunan dibandingkan laju redaman sedang. Namun jika dibandingkan dengan nilai simpangan maksimumnya, maka laju redaman yang besar memiliki nilai lebih kecil dibandingkan laju redaman sedang.

Kata Kunci: *Faktor peredam, model flexural-shear, metode pemisahan variabel*

## ABSTRACT

This study aims to form a mathematical model of flexural shear in a multi-story building with the addition of a damping factor and to provide analytical and simulation solutions from the model. The current study uses a mathematical modeling process that requires data or information about the elastic properties of building components, mass distribution, and stiffness distribution between floors. The model is solved using the separation of variables method which produces a pair of ordinary differential equations, one of which is a fourth-order nonlinear differential equation and the other is a second-order linear differential equation. The two solutions of these equations will produce 3 types of cases that provide different types of attenuation. Furthermore, the behavior of the solution will be analyzed in each case by performing a simulation using the MATLAB R2013a software. The simulations show that damper with a small damping rate has a very significant effect on the movement of the building. In addition, a damper with a large damping rate takes longer to dampen the building than a medium damping rate. However, when compared to the maximum deviation value, a large damping value has a smaller value than the medium attenuation rate.

Keywords: *Damping factor, flexural-shear model, separation of variables method.*

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
PERSETUJUAN PEMBIMBING.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN .....	iv
KATA PENGANTAR .....	v
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR .....	vii
ABSTRAK .....	viii
ABSTRACT .....	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR GAMBAR .....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	3
1.3. Batasan Masalah .....	3
1.4. Tujuan Penelitian .....	4
1.5. Manfaat Penelitian .....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1. State of The Art.....	5
2.2. Gelombang Seismik dan Elastisitas Bangunan.....	6
2.2.1. Beton .....	10
2.2.2. Balok Beton Tulangan Geser ( <i>Shear Beam</i> ) .....	11
2.2.3. Balok Beton Tulangan Lentur ( <i>Flexural Beam</i> ) .....	12
2.3. Peredam Lentur Bangunan.....	13

2.4.	Persamaan Diferensial Linier.....	14
2.4.1.	Solusi Bebas Linier .....	15
2.4.2.	Solusi Umum dari Persamaan Diferensial Linier Bentuk Homogen.....	16
2.5.	Persamaan Bessel dan Modifikasinya.....	20
2.6.	Persamaan Diferensial Parsial dan Persoalan Nilai Awal dan Nilai Batas.....	30
2.6.1.	Persamaan Diferensial Parsial.....	30
2.6.2.	Persoalan Nilai Awal dan Nilai Batas.....	32
2.7.	Metode Pemisahan Variabel .....	34
2.8.	Model Matematika <i>Flexural-Shear</i> Bangunan Bertingkat .....	40
BAB III METODE PENELITIAN.....		45
3.1.	Tahap Pendahuluan.....	45
3.2.	Tahap Pemodelan.....	45
3.3.	Tahap Penyelesaian Model .....	47
3.4.	Tahap Interpretasi Model.....	48
3.5.	Kesimpulan .....	48
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....		49
4.1.	Model Matematika <i>Flexural-Shear</i> Bangunan Bertingkat dengan Penambahan Faktor Peredam.....	49
4.2.	Solusi Model Matematika <i>Flexural-Shear</i> Bangunan Bertingkat dengan Penambahan Faktor Peredam.....	61
4.2.1.	Persamaan Diferensial Tidak Linier Bentuk Homogen Orde Empat.....	64
4.2.2.	Persamaan Diferensial Linier Bentuk Homogen Orde Dua.....	80
4.3.	Simulasi dan Interpretasi Hasil Model Matematika <i>Flexural-Shear</i> Bangunan Bertingkat dengan Penambahan Faktor Peredam.....	86
4.3.1.	Simulasi Tanpa Peredam.....	88
4.3.2.	Simulasi Kasus $\zeta^2 < 4\omega^2$ .....	95
4.3.3.	Simulasi Kasus $\zeta^2 = 4\omega^2$ .....	102

4.3.4. Simulasi Kasus $\zeta^2 > 4\omega^2$ .....	109
BAB V PENUTUP.....	117
5.1. Kesimpulan .....	117
5.2. Saran .....	118
DAFTAR PUSTAKA .....	119
LAMPIRAN.....	123

## DAFTAR TABEL

Tabel 4.1. Nilai parameter model flexural-shear bangunan bertingkat saat gempa bumi.....	87
Tabel 4.2. Perbandingan simpangan maksimum gelombang elastis bangunan bertingkat dalam satuan meter.....	116
Tabel 4.3. Perbandingan lama waktu bangunan berosilasi harmonis dalam satuan detik.....	116

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Grafik hubungan tegangan dan regangan.....	8
Gambar 2.2. Keadaan mula-mula bangunan bertingkat.....	8
Gambar 2.3. Pergeseran bangunan yang mengakibatkan bangunan berelastis.....	9
Gambar 2.4. Keruntuhan bangunan akibat tegangan mencapai titik E. ....	9
Gambar 2.5. Jenis-jenis retak pada balok.....	11
Gambar 2.6. (a) Deformasi pada balok beton tulangan geser, (b) Mekanisme keruntuhan soft story effect. ....	12
Gambar 2.7. Deformasi balok beton tulangan Euler-Bernoulli .....	12
Gambar 2.8. Pengaruh pemberian peredam sistem TMD.....	14
Gambar 2.9. Grafik Fungsi Keadaan Awal Senar Biola dengan Panjang L .....	33
Gambar 2.10. Model geser lentur yang digabungkan secara kontinu.....	41
Gambar 2.11. Potongan penampang balok beton tulangan, momen di kiri, geser dan beban di kanan dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ). ....	41
Gambar 3.1. Diagram Tahapan Penelitian .....	48
Gambar 4.1. Model flexural-shear yang digabungkan secara kontinu dengan penambahan peredam. ....	49
Gambar 4.2. Pergerakan balok beton tulangan dengan penambahan peredam saat terjadi gempa bumi. ....	50
Gambar 4.3. Potongan penampang balok beton tulangan dengan penambahan peredam, momen di kiri, geser dan beban di kanan.....	50
Gambar 4.4. Diagram alir untuk tahap analisis potongan penampang pada balok beton tulangan.....	51
Gambar 4.5. Lendutan pada balok beton tulangan lentur saat diberikan beban lateral berupa gelombang seismik.....	53
Gambar 4.6. Kurva lengkung.....	54
Gambar 4.7. Pergeseran sisi pada balok beton tulangan geser saat diberikan beban lateral berupa gelombang seismik.....	58
Gambar 4.8. Diagram alir untuk memperoleh solusi analitik model flexural-shear bangunan bertingkat dengan penambahan faktor peredam.....	62
Gambar 4.9. Elastisitas bangunan tanpa peredam saat gempa bumi dengan frekuensi gelombang seismik 0.013 Hz untuk waktu (a) 24 detik (b) 384 detik	

	(c) 744 detik (d) 1104 detik (e) 1464 detik (f) 1824 detik (g) 2184 detik (h) 2544 detik (i) 2904 detik (j) 3264 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	90
Gambar 4.10.	Elastisitas bangunan tanpa peredam saat gempa bumi dengan frekuensi gelombang seismik 0.043 Hz untuk waktu (a) 24 detik (b) 384 detik (c) 744 detik (d) 1104 detik (e) 1464 detik (f) 1824 detik (g) 2184 detik (h) 2544 detik (i) 2904 detik (j) 3264 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	92
Gambar 4.11.	Elastisitas bangunan tanpa peredam saat gempa bumi dengan frekuensi gelombang seismik 0.025 Hz untuk waktu (a) 24 detik (b) 384 detik (c) 744 detik (d) 1104 detik (e) 1464 detik (f) 1824 detik (g) 2184 detik (h) 2544 detik (i) 2904 detik (j) 3264 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	94
Gambar 4.12.	Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.013 Hz & laju redaman 0.0024 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 384 detik (c) 744 detik (d) 1104 detik (e) 1464 detik (f) 1824 detik (g) 2184 detik (h) 2544 detik (i) 2904 detik (j) 3264 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	96
Gambar 4.13.	Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.043 Hz & laju redaman 0.02 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 114 detik (c) 204 detik (d) 294 detik (e) 384 detik (f) 474 detik (g) 564 detik (h) 654 detik (i) 744 detik (j) 834 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	99
Gambar 4.14.	Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.025 Hz & laju redaman 0.0224 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 114 detik (c) 204 detik (d) 294 detik (e) 384 detik (f) 474 detik (g) 564 detik (h) 654 detik (i) 744 detik (j) 834 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	101
Gambar 4.15.	Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.013 Hz & laju redaman 0.026 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 114 detik (c) 204 detik (d) 294 detik (e) 384 detik (f) 474 detik (g) 564 detik (h)	

654 detik (i) 744 detik (j) 834 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	103
Gambar 4.16.Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.0043 Hz & laju redaman 0.086 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 54 detik (c) 84 detik (d) 114 detik (e) 144 detik (f) 174 detik (g) 204 detik (h) 234 detik (i) 264 detik (j) 294 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	106
Gambar 4.17.Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.025 Hz & laju redaman 0.05 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 84 detik (c) 144 detik (d) 204 detik (e) 264 detik (f) 324 detik (g) 384 detik (h) 444 detik (i) 504 detik (j) 564 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	108
Gambar 4.18.Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.013 Hz & laju redaman 0.0357 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 174 detik (c) 324 detik (d) 474 detik (e) 624 detik (f) 774 detik (g) 924 detik (h) 1074 detik (i) 1224 detik (j) 1374 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	110
Gambar 4.19.Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.043 Hz & laju redaman 0.12 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 84 detik (c) 144 detik (d) 204 detik (e) 264 detik (f) 324 detik (g) 384 detik (h) 444 detik (i) 504 detik (j) 564 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	113
Gambar 4.20.Elastisitas bangunan dengan frekuensi gelombang seismik 0.025 Hz & laju redaman 0.0671 per detik untuk waktu (a) 24 detik (b) 114 detik (c) 204 detik (d) 294 detik (e) 384 detik (f) 474 detik (g) 564 detik (h) 654 detik (i) 744 detik (j) 834 detik dengan $u$ adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).....	115

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.013 Hz tanpa peredam. ....	123
Lampiran 2. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.043 Hz tanpa peredam. ....	125
Lampiran 3. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.025 Hz tanpa peredam. ....	127
Lampiran 4. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.013 Hz dan laju redaman 0.0024 per detik. ....	129
Lampiran 5. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.043 Hz dan laju redaman 0.02 per detik. ....	131
Lampiran 6. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.025 Hz dan laju redaman 0.0224 per detik. ....	133
Lampiran 7. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.013 Hz dan laju redaman 0.026 per detik. ....	135
Lampiran 8. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.043 Hz dan laju redaman 0.086 per detik. ....	137
Lampiran 9. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.025 Hz dan laju redaman 0.05 per detik. ....	139
Lampiran 10. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.013 Hz dan laju redaman 0.0357 per detik. ....	141
Lampiran 11. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.043 Hz dan laju redaman 0.12 per detik. ....	143
Lampiran 12. Susunan program untuk menyelesaikan simulasi untuk frekuensi gelombang seismik 0.025 Hz dan laju redaman 0.0671 per detik. ....	145
Lampiran 13. Fungsi untuk memperoleh nilai $\lambda_1$ .....	147
Lampiran 14. Fungsi untuk menghitung nilai fungsi $g(x)$ dan $h(x)$ .....	148
Lampiran 15. Fungsi untuk memperoleh nilai elemen matriks $M$ .....	149
Lampiran 16. Fungsi untuk memperoleh nilai elemen matriks $B$ .....	151
Lampiran 17. Fungsi $\phi(z)$ .....	152
Lampiran 18. Fungsi $q(t)$ .....	153

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Bencana alam merupakan suatu fenomena yang kejadiannya sulit untuk diprediksi. Akibatnya lokasi sekitar kejadian menjadi rusak dan hancur sehingga menelan korban jiwa serta kerugian harta benda. Menurut UU nomor 24 tahun 2007, bencana alam adalah bencana yang diakibatkan oleh peristiwa atau serangkaian peristiwa yang disebabkan oleh alam antara lain berupa gempa bumi, tsunami, gunung meletus, banjir, kekeringan, angin topan, dan tanah longsor. Dampak yang dihasilkan dari bencana tersebut dapat menjangkau aspek fisik, psikologis, finansial, dan lain sebagainya. Salah satu bencana alam yang memberikan dampak besar baik kepada manusia maupun lingkungan hidup adalah gempa bumi .

Gempa bumi adalah peristiwa bergetarnya bumi karena pergeseran lapisan batuan pada kulit bumi akibat pelepasan energi secara spontan sehingga menciptakan gelombang seismik (Utomo dan Purba, 2019). Energi ini berasal dari gerakan dua atau lebih lempeng yang saling bertemu menghasilkan *stress* pada tiap lempeng sehingga energi akan berkumpul di titik pertemuan tersebut. Pengumpulan energi ini akan terjadi terus menerus hingga pada suatu saat tidak mampu lagi menahan *stress* tersebut yang mengakibatkan patah secara mendadak dan melepaskan energi dalam bentuk getaran. Berdasarkan pergerakan lempeng tektonik dan gunung berapi, gempa bumi digolongkan menjadi bencana geologi dan vulkanologi. Gempa bumi sering kali diikuti oleh bencana alam lanjutan seperti tanah longsor dan tsunami.

Ketika gelombang seismik ini mencapai permukaan, akan terjadi getaran yang menghasilkan besar guncangan yang beragam, mulai dari guncangan yang kecil hingga besar. Guncangan yang besar mampu menimbulkan kerusakan bangunan dan korban jiwa (Sunarjo, Gunawan dan Pribadi, 2012). Banyaknya korban jiwa akibat dari bencana gempa bumi secara umum disebabkan oleh kegagalan pembuatan bangunan. Sehingga ketika gelombang seismik sampai pada permukaan dan mengguncang bangunan yang ada di permukaan, bangunan yang tidak memenuhi standar akan hancur dan menimpa segala hal di sekitarnya.

Hal ini dikarenakan bangunan tersebut memiliki frekuensi alami yang dekat atau sama dengan frekuensi alami dari tanah. Sehingga dapat dikatakan tanah dan bangunan tersebut berada pada resonansi yang sama (Hanum dan Subhan, 2020).

Untuk menyikapi peristiwa tersebut, Badan Standardisasi Nasional (BSN) merevisi dan menetapkan Standar Nasional Indonesia (SNI) pada tahun 2019. Terkait antisipasi bahaya gempa salah satunya diatur dalam SNI 1726:2019 tentang tata cara perencanaan ketahanan gempa untuk struktur bangunan gedung dan bukan gedung. Standarisasi tersebut merupakan wujud keikutsertaan Negara Indonesia dalam Tujuan Pembangunan Berkelanjutan/ *Sustainable Development Goals* (TPB/SDGs) pada poin ke-sembilan. Salah satu target pada poin ke-sembilan yang berkaitan ialah membangun infrastruktur yang berkualitas, dapat diandalkan, berkelanjutan dan tahan lama, termasuk infrastruktur regional dan antar batas, untuk mendukung pembangunan ekonomi dan kesejahteraan manusia, dengan berfokus pada akses yang terjangkau dan sama rata bagi semua (Bappenas, 2017). Untuk mewujudkan target tersebut, tentu diperlukan penelitian terkait bangunan tahan gempa baik secara teoritis maupun secara teknis. Dari hasil penelitian nantinya diharapkan dapat menjadi pedoman dalam pembangunan sehingga menciptakan bangunan yang tangguh, ramah lingkungan, dan tentu membutuhkan biaya yang optimal.

Kekuatan bangunan untuk menahan keruntuhan bangunan yang terjadi akibat deformasi pada material bangunan tergantung pada tingkat elastisitasnya. Beberapa penelitian telah dikembangkan untuk memodelkan elastisitas pada bangunan saat terjadi gempa bumi. Untuk mengestimasi peristiwa yang terjadi pada bangunan bertingkat, elastisitas pada bangunan dimodelkan menggunakan persamaan diferensial. Hal ini dilakukan agar dapat ditemukan solusinya secara matematis dan menjadi pertimbangan dalam proses pembangunan bangunan bertingkat. Di sisi lain, dengan adanya solusi tersebut dapat mengurangi peluang terjadinya kerugian yang besar.

Pada penelitian yang ditulis oleh Xiao Lai dari *Dalian University of Technology* (2021) menyelidiki kelenturan bangunan bertingkat dengan model matematika *flexural-shear* (FSM) yang dimodifikasi dari penelitian sebelumnya. Model matematika *flexural-shear* adalah penggambaran elastisitas balok beton

geser (*shear beam*) dan balok beton lentur (*flexural beam*) yang dihubungkan secara paralel melalui sambungan kaku secara aksial saat beban atau gaya lateral berupa gelombang seismik. Pada penelitiannya, Xiao Lai memberikan desain awal berupa kekakuan lateral, distribusi massa, dan kekakuan ganda yang tidak seragam. Desain awal tersebut biasanya ada pada bangunan-bangunan bertingkat yang ditujukan untuk memberikan estimasi yang efisien pada perilaku pergeseran bangunan saat gempa bumi terjadi.

Selanjutnya, penulis tertarik untuk melakukan penelitian berupa model matematika *flexural-shear* bangunan bertingkat dengan penambahan alat peredam lentur bangunan terhadap waktu dan kemudian dianalisis pengaruh pemberian alat tersebut. Hal ini dikarenakan pada penelitian Xiao Lai, sifat kaku pada balok beton geser (*shear beam*) hanya meredam pergerakan balok beton lentur (*flexural beam*) terhadap perubahan ketinggiannya. Namun, redaman pergerakan dari keseluruhan balok terhadap waktu tidak diberikan pada penelitiannya. Berikutnya, hasil dari penelitiannya dituangkan dalam bentuk tulisan skripsi dengan rencana judul “*Pengaruh Faktor Peredam pada Model Flexural-Shear Bangunan Bertingkat Saat Gempa Bumi*”.

## **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, diperoleh rumusan masalah yang akan dikaji pada penelitian ini.

1. Bagaimana pembentukan model matematika *flexural-shear* pada bangunan bertingkat dengan penambahan faktor peredam ?
2. Bagaimana menentukan solusi analitik dan simulasi dari model matematika *flexural-shear* pada bangunan bertingkat dengan penambahan faktor peredam ?

## **1.3. Batasan Masalah**

Pembahasan dalam skripsi ini akan dibatasi pada pemodelan *flexural-shear* pada bangunan bertingkat ketinggian 400 meter dalam satu dimensi dengan penambahan peredam lentur bangunan terhadap perubahan waktu.

#### **1.4. Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Menjelaskan pembentukan model matematika *flexural-shear* pada bangunan bertingkat dengan penambahan faktor peredam.
2. Memberikan solusi analitik dan simulasi dari model matematika *flexural-shear* pada bangunan bertingkat dengan penambahan faktor peredam.

#### **1.5. Manfaat Penelitian**

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan informasi untuk memahami pengaruh faktor peredam pada model *flexural-shear* bangunan bertingkat saat terjadi gempa bumi. Selain itu, penulisan ini dapat dijadikan sebagai bahan pertimbangan kepada insinyur dalam pembangunan infrastruktur bangunan bertingkat pada daerah rawan terjadi gempa bumi.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1. State of The Art

*State of the art* dari penelitian yang akan dilaksanakan merupakan merupakan hasil penelitian tentang elastisitas bangunan saat terjadi gempa bumi dengan pendekatan yang berbeda-beda. Pendekatan yang dilakukan umumnya melalui pendekatan numerik.

Model matematika *flexural-shear* pertama kali dikembangkan oleh Khan dan Sbarounis pada tahun 1964 dengan balok beton geser (*shear beam*) dan balok beton lentur (*flexural beam*) dihubungkan secara paralel melalui sambungan kaku secara aksial. Metode dalam penelitiannya cocok digunakan untuk komputasi manual maupun komputer dengan kapasitas memori kurang dari 20.000 digit. Miranda dkk. (2005) telah mengusulkan model *flexural-shear* seragam (FSM-U) untuk menjelaskan efek kopling antara dua balok dan memberikan solusi dalam bentuk tertutup untuk bentuk moda, rasio periode, dan faktor partisipasi modanya. Selain itu, diperlihatkan pula efek pengurangan kekakuan lateral pada karakteristik dinamik struktur kecil pada bangunan yang mengalami defleksi lateral.

Untuk model *flexural-shear* yang tidak seragam (FSM-S1) dalam bentuk sederhana juga telah diusulkan. Pada model tersebut, distribusi kuadrat untuk kekakuan lentur dan geser diasumsikan dalam bentuk fungsi. Selanjutnya, Alonso-Rodríguez dan Miranda (2016) mengasumsikan distribusi kuartik dan kuadrat untuk kekakuan lentur dan geser dan mengembangkan solusi analitik getaran bebasnya menggunakan fungsi Legendre. Sebelumnya, mereka telah menjelaskan dasar fisik dari asumsi distribusi kekakuan lenturnya pada tahun (2014). Kemudian dikembangkan dalam bentuk lebih umum model *flexural-shear* yang tidak seragam (FSM-S2). Model ini tidak mempertimbangkan distribusi massa lantai tidak seragam yang pada umumnya ada di bangunan-bangunan bertingkat. Guiqiang Guo dkk (2019) dalam penelitiannya mengusulkan konsep *self similar interstory drift spectrum* berdasarkan analisis dimensi balok beton geser-lentur dengan kekakuan lateral yang tidak seragam, dan mengkaji efek dari pengurangan kekakuan lateral terhadap respon seismik

dan distribusinya. Dalam penelitian Guiqiang Guo juga ditarik kesimpulan bahwa model regresi yang telah ditetapkan cukup sesuai dengan rata-rata spektrum penyimpangan *interstory* yang serupa. Spektrum percepatan lantai dan respon seismik yang dinormalisasi juga dapat diprediksi dengan baik oleh *fitting curve*.

Selanjutnya, Xiao Lai dkk (2021) meneliti dengan perhatian utama mengenai desain seismik awal dari bangunan bertingkat. Mereka memodifikasi model *flexural-shear* (FSM-MS) yang ditargetkan untuk memperhitungkan distribusi massa dan kekakuan ganda yang tidak seragam, dan untuk memberikan perkiraan yang efisien dari permintaan ISD maksimumnya.

## 2.2. Gelombang Seismik dan Elastisitas Bangunan

Gelombang seismik adalah gelombang elastik gempa bumi yang merambat ke dalam dan permukaan bumi. Analogi sederhana dapat dicontohkan sebutir batu yang dilemparkan pada suatu kolam air. Gelombang yang menjalar akibat dari sebutir batu terpancar keluar dari pusat hingga mencapai jarak terjauh pada kolam. Air akan mengalami gangguan akan tetapi partikel air tersebut tidak bergeser dalam arah pergerakan gelombang. Gelombang ini merambat dalam lapisan bumi sesuai dengan prinsip perambatan gelombang cahaya yaitu pembiasan dengan koefisien bias, pemantulan dengan koefisien pantul, hukum-hukum Fermat, Huygens, Snellius, dan lain-lain (Sunarjo, Gunawan dan Pribadi, 2012).

Perambatan gelombang ini bergantung pada sifat elastisitas batuan. Gelombang seismik ada yang merambat melalui interior bumi yang disebut *body wave* dan ada juga yang merambat melalui permukaan bumi yang disebut *surface wave*. *Body wave* dibedakan menjadi dua berdasarkan arah getarnya. Gelombang P (*Longitudinal*) merupakan gelombang yang arah getarnya searah dengan arah perambatan gelombangnya sedangkan gelombang yang arah getarnya tegak lurus dengan arah rambatannya disebut gelombang S (*transversal*). *Surface wave* terdiri atas *Rayleigh wave* (*ground roll*) dan *Love wave*. Media transmisi gelombang seismik berupa material batuan yang bersifat elastis. Tingkat elastisitas suatu medium bumi ditentukan bagaimana media tersebut menjalankan gelombang seismik. Selain itu, gelombang seismik termasuk dalam

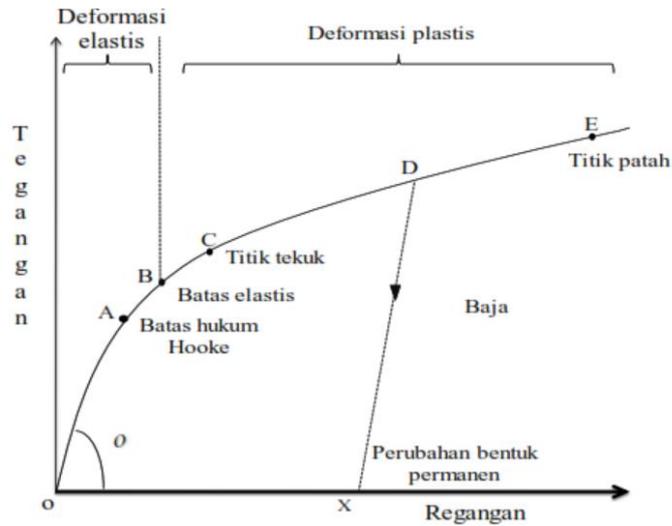
gelombang mekanik yang setiap medium dilewatinya akan menyebabkan partikel mengalami vibrasi. Gejala vibrasi selanjutnya akan menyebabkan efek deformasi pada medium batuan yang bergantung pada tingkat elastisitasnya. Tingkat elastisitas batuan ini akan mempengaruhi kecepatan gelombang seismik pada suatu medium. Sejalan dengan itu, peristiwa ini juga terjadi pada bangunan yang berada pada permukaan tanah (Nurdiyanto *et al.*, 2011; Sunarjo, Gunawan dan Pribadi, 2012).

Gelombang seismik yang sampai pada permukaan (*surface wave*) dapat bersifat merusak tahanan untuk bangunan yang berada di atasnya. Kerusakan ini sangat dipengaruhi oleh besarnya gempa bumi dan sangat tergantung dengan kekuatan sumber gempa bumi, kedalaman gempa dari permukaan tanah dan mutu bangunan khususnya tingkat elastisitas bangunan yang dilewati oleh gelombang seismik ini. Jika mutu bangunannya sangat rapuh akan mudah runtuh yang mengakibatkan banyaknya korban jiwa. Hal ini dikarenakan terjadi deformasi bangunan baik pada balok beton maupun dindingnya. Deformasi ini ditentukan dari modulus elastisitas dari suatu bangunan. Modulus elastisitas yang terjadi pada bangunan dapat dilihat dari ketahanan material bangunan menolak pergeseran sehingga merubah ukuran namun tidak merubah volumenya. Modulus elastisitas ini biasanya disebut modulus shear atau geser. Semakin tinggi nilai modulus elastisitas bahan, maka semakin kecil perubahan bentuk yang terjadi saat diberikan gaya (Awaludin, 2011; Putra, 2016).

Nilai modulus elastisitas tergantung besar tegangan (*stress*) dan regangan (*strain*) terhadap medium tersebut. Berdasarkan Hukum Hooke yang menyatakan bahwa besaran tegangan berbanding lurus terhadap besaran regangannya dan berbanding terbalik terhadap elastisitasnya. Sehingga dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

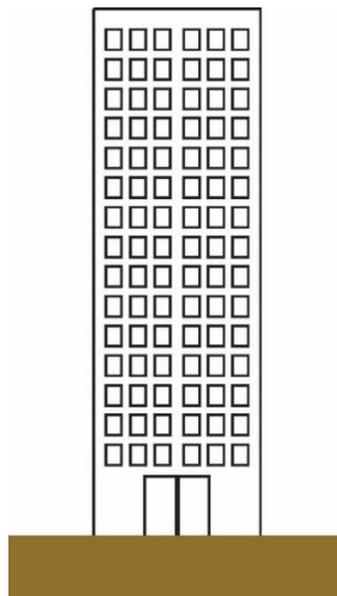
$$E = \frac{\sigma}{e} \quad (2.1)$$

dengan  $\sigma$  adalah tegangan yang diberikan pada suatu medium ( $N/m^2$ ),  $e$  adalah regangan yang terjadi pada suatu medium, dan  $E$  adalah modulus elastisitas pada suatu medium ( $N/m^2$ ) atau Pascal ( $Pa$ ).



Gambar 2.1. Grafik hubungan tegangan dan regangan.

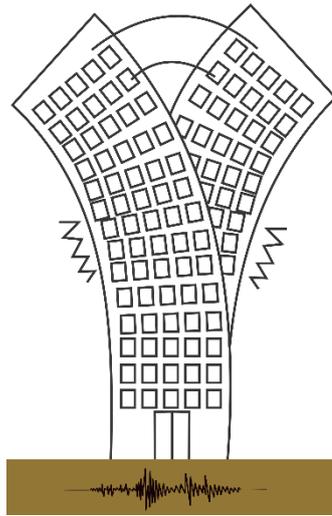
Setiap material memiliki batas elastisitas. Jika gaya yang diberikan pada benda lebih kecil dari pada batas elastisitasnya, maka benda akan kembali ke bentuk semula saat gaya dihilangkan. Namun, jika gaya yang diberikan melewati batas elastisitasnya maka benda tidak akan kembali ke bentuk semula dan berubah bentuk secara permanen. Pada mula-mula bangunan dalam keadaan stabil.



Gambar 2.2.. Keadaan mula-mula bangunan bertingkat

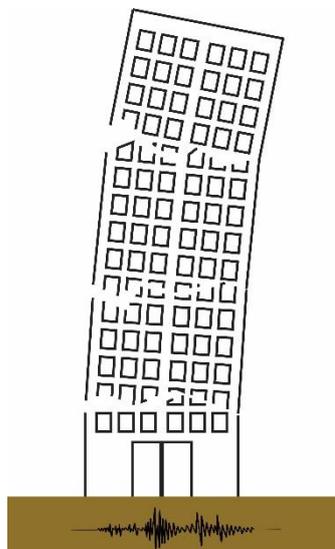
Jika gelombang seismik sampai pada permukaan tanah, maka bangunan yang mula-mula dalam keadaan stabil akan bergeser akibat gaya lateral yang dihasilkan oleh gelombang seismik tersebut. Pergeseran mula-mula terjadi pada

dasar bangunan kemudian bagian lain dari struktur juga ikut bergeser. Pergeseran ini akan membuat bangunan berelastis.



Gambar 2.3. Pergeseran bangunan yang mengakibatkan bangunan berelastis.

Selanjutnya, dari grafik hubungan tegangan dan regangan yang ada pada **Gambar.2 .1** dapat dilihat dari titik *O* ke titik *A* merupakan deformasi material yang bersifat elastis, titik *B* merupakan deformasi material yang bersifat plastis, titik *C* merupakan titik tekuk, dan titik *D* merupakan deformasi material yang bersifat permanen (Sulaeman, 2018). Jika tegangan yang diberikan mencapai titik *E*, maka material atau struktur bangunan akan patah atau runtuh.



Gambar 2.4. Keruntuhan bangunan akibat tegangan mencapai titik *E*.

Sehingga kondisi ini perlu menjadi pertimbangan dalam mendesain bangunan agar efek dari gelombang seismik berupa getaran percepatan rambatan yang

masuk ke dalam sistem pergeseran bangunan tidak mengakibatkan bangunan hancur (Melinda, Munirwansyah dan Sungkar, 2020).

### **2.2.1. Beton**

Beton adalah suatu material yang terdiri dari campuran semen, agregat halus, agregat kasar, dan air serta bahan tambahan bila diperlukan. Mutu dari beton dipengaruhi oleh beberapa faktor antara lain air, perbandingan dan mutu bahan, susunan dan ukuran agregat, serta kondisi pada saat mengerjakan dan pengerasan. Semakin tinggi mutu dari suatu beton maka semakin kuat dalam menahan beban berupa gaya lateral atau geser yang berasal dari luar yang akan menyebabkan timbulnya gaya dalam struktur bangunan (Widodo, 2007; Putra, 2016; Hawileh *et al.*, 2017).

Balok beton bertulang merupakan kombinasi antara beton dan baja tulangan. Balok ini memiliki peranan yang cukup besar dalam memikul beban, baik beban eksternal maupun beban internal dari struktur bangunan tersebut. Beban eksternal ini dapat berupa gelombang seismik, anging, dan lain sebagainya yang akan menyebabkan terjadinya lentur dan deformasi pada elemen struktur. Jika beban yang diterima oleh balok beton bertulang melebihi batas kelenturannya, maka balok ini akan mengalami retak hingga patah atau runtuh. Oleh sebab itu, balok beton bertulang harus didesain secara matang sehingga dapat meminimalisir terjadinya retak ketika beban eksternal dan internal diberikan.

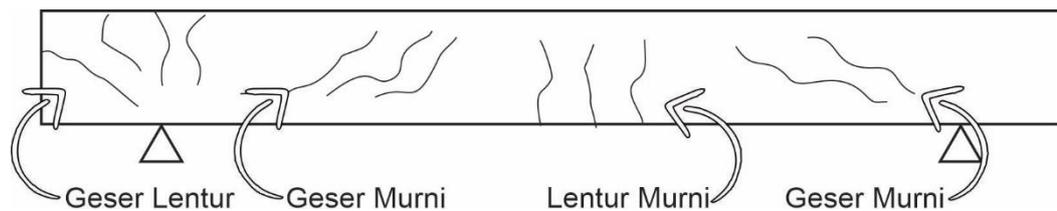
Di sisi lain juga dipertimbangkan tingkat keamanan dan kekuatan cadangan untuk menahan beban dan tegangan yang terjadi sehingga tidak mengalami runtuh. Berdasarkan sifat lentur dan deformasinya saat diberikan beban atau gaya, balok beton tulangan sangat beragam. Namun dalam penelitian ini ditinjau balok beton tulangan lentur (Balok Euler-Bernoulli) dan balok beton tulangan geser yang dikombinasikan dengan harapan dapat menanggung beban eksternal dan internal saat terjadi bencana gempa bumi (Miranda, M.ASCE dan Taghavi, 2005; Dady, Sumajouw dan Windah, 2015; Yoresta, 2015; Prayuda, Saleh dan Istiawan, 2018).

### 2.2.2. Balok Beton Tulangan Geser (*Shear Beam*)

Balok tulangan geser berfungsi untuk menahan gaya geser yang pada umumnya terjadi bersamaan dengan gaya-gaya lain. Perilaku balok ini pada keadaan runtuh sangat berbeda dengan keruntuhan karena lentur. Perilaku keruntuhan geser ini bersifat getas sehingga saat mengalami keruntuhan, balok ini tidak memberikan peringatan terlebih dahulu. Oleh karena itu perlu dirancang penampang yang cukup kuat untuk memikul gaya gesernya.

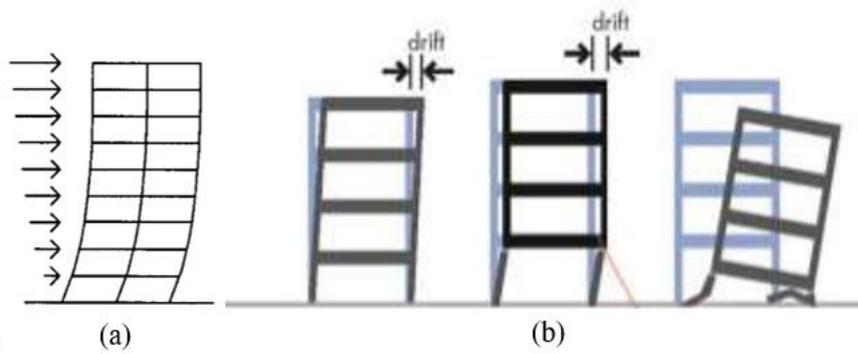
Tulangan geser diperlukan untuk meminimalisir keretakan yang terjadi akibat pembebanan karena pada dasarnya ada tiga jenis retak pada struktur, yaitu:

1. Retak lentur murni (*flexural crack*), retak yang terjadi di daerah yang mempunyai momen lentur besar. Arah retak hampir tegak lurus sumbu balok.
2. Retak geser lentur (*flexural-shear crack*), retak yang terjadi pada bagian balok yang sebelumnya telah terjadi keretakan lentur.
3. Retak geser murni (*shear crack*), retak yang terjadi pada daerah gaya geser maksimum bekerja dan tegangan normal sangat kecil.



Gambar 2.5. Jenis-jenis retak pada balok.

Balok beton tulangan geser mempunyai besaran kekakuan geser yang diharapkan dapat meminimalisir lendutan dan deformasi yang terjadi. Namun dalam kondisi riil, balok ini cenderung getas saat diberikan beban lateral berupa gelombang seismik. (Zachari dan Turuallo, 2020)

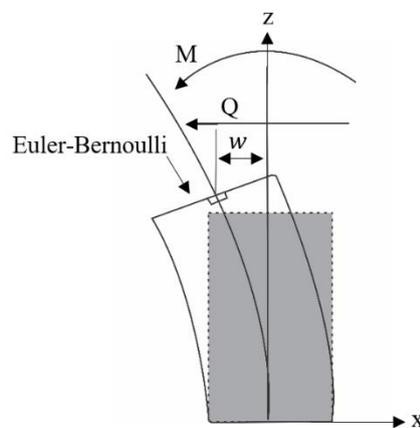


Gambar 2.6. (a) Deformasi pada balok beton tulangan geser, (b) Mekanisme keruntuhan *soft story effect*.

### 2.2.3. Balok Beton Tulangan Lentur (*Flexural Beam*)

Terdapat balok yang memiliki struktur lentur yang rumit. Hal ini dikarenakan banyaknya beban luar berupa gaya yang diterima dan bekerja pada balok tersebut. Beban-beban luar pada balok ini akan menyebabkan lentur dan deformasi pada elemen struktur. Namun, konstruksi balok menggunakan beton bertulang lentur dimaksudkan untuk dapat menahan gaya lentur dan mempunyai kekakuan lentur sehingga dapat bekerja dengan baik pada balok struktur (Dady, Sumajouw dan Windah, 2015; Prayuda, Saleh dan Istiawan, 2018).

Telah banyak balok beton tulangan yang dianalisis, salah satunya balok tulangan lentur Euler-Bernoulli. Teori balok Euler-Bernoulli mengabaikan adanya pengaruh deformasi geser pada penampang balok, yaitu dengan mengasumsikan bahwa bidang penampang tetap tegak lurus terhadap garis netral penampang balok selama terjadi lenturan.



Gambar 2.7. Deformasi balok beton tulangan Euler-Bernoulli

Dalam kondisi riil, balok ini cenderung lentur saat diberikan beban lateral berupa gelombang seismik yang dapat memberikan efek negatif terhadap beban hidup yang terdapat dalam bangunan bertingkat.

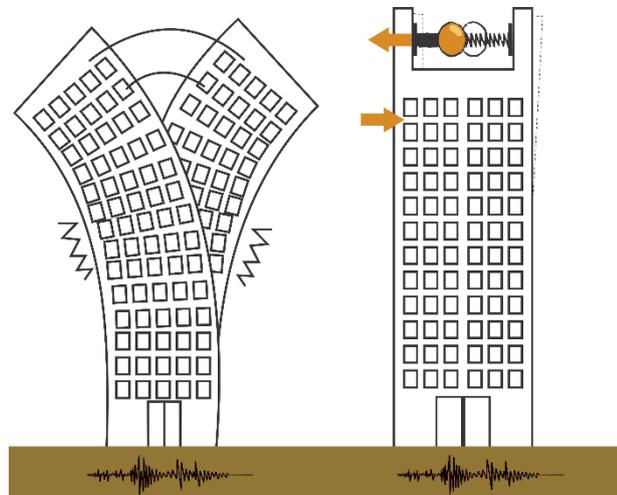
### **2.3. Peredam Lentur Bangunan**

Bangunan bertingkat banyak dibangun dan digunakan saat ini. Ditemukan bangunan tersebut terguncang saat gelombang seismik merambat ke dalam struktur bangunan dalam waktu lama. Akibat dari guncangan ini akan menimbulkan trauma bagi beberapa individu serta mabuk selama respon getaran tersebut. Di sisi lain juga perlu untuk meningkatkan ketahanan seismik demi keberlanjutan fungsional bangunan bertingkat. Oleh karena itu diperlukan peredam lentur bangunan sebagai kontrol getaran seismik pada struktur bangunan.

Kontrol getaran seismik pada struktur telah menjadi topik yang dianggap sangat penting belakangan ini. Hal ini bertujuan tidak hanya untuk peningkatan ketahanan bangunan terhadap gempa, tetapi juga untuk peningkatan kenyamanan pengguna. Beberapa sistem kontrol telah digunakan pada bangunan yang berada pada daerah rawan gempa bumi. Diantaranya ialah peredam menggunakan cairan, penyerap energi gelombang melalui sambungan logam dibuat untuk ditekuk, *fluid viscous damper*, peredam viskoelastik, peredam gesekan, peredam leleh logam, dan lain sebagainya. Sistem kontrol getaran seismik dapat diklasifikasikan ke dalam kategori pasif dan aktif (Reitherman, 2012; Xiang dan Nishitani, 2014).

Sistem kontrol pasif telah digunakan dan dikembangkan secara luas dalam praktik karena mekanismenya yang relatif sederhana serta dapat mengurangi respon struktur bangunan terhadap gempa relatif lebih mudah dengan biaya rendah. *Tuned Mass Damper* (TMD) adalah salah satu perangkat kontrol struktural yang paling sederhana dan paling andal dalam mengurangi getaran resonansi struktur primer. Untuk sistem pengontrol pada sebuah bangunan bertingkat tinggi, biasanya dipasang perangkat TMD di lantai atas untuk mengontrol mode getaran fundamentalnya. Sistem ini biasanya disebut dengan *Single Tuned Mass Damper* (STMD). Beberapa peneliti telah mencoba memodifikasi beberapa sistem TMD untuk memberikan pengontrol yang

optimum, baik dalam perawatan, kenyamanan, serta biaya yang digunakan. Selain meninjau lokasi daerah pembangunan terhadap kemungkinan guncangan yang akan terjadi akibat patahan pada lapisan bumi, juga dilihat pengaruh massa peredam yang diterapkan pada struktur bangunan. Beberapa penelitian menyimpulkan bahwa TMD dengan rasio massa yang besar secara menguntungkan memiliki efek kontrol yang lebih baik serta ketahanan yang lebih tinggi terhadap perubahan sifat struktural. Selain itu, konstanta redaman pada TMD juga memiliki kaitan erat dengan kerapatan linear pada struktur bangunan bertingkat. Konstanta redaman ini akan disesuaikan dengan nilai kerapatan linier pada struktur bangunan bertingkat. Berikut visualisasi efek pemberian peredam lentur bangunan yang diletakkan di lantai atas bangunan bertingkat tinggi.



Gambar 2.8. Pengaruh pemberian peredam sistem TMD.

(Xiang dan Nishitani, 2014; Keshtegar dan Etedali, 2018)

#### 2.4. Persamaan Diferensial Linier

Bentuk umum dari suatu persamaan diferensial linier yang berorde  $n$  adalah sebagai berikut

$$P_0 y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1} y' + P_n y = F(x), \quad (2.2)$$

dengan  $P_i$  untuk  $i = 0, 1, \dots, n$  merupakan konstanta dan  $F(x)$  merupakan fungsi yang bergantung terhadap variabel  $x$  yang kontinu pada interval terbuka  $I$ . Diasumsikan  $P_0 \neq 0$  pada tiap  $I$ , sehingga Persamaan (2.2) dapat dibagi  $P_0$ .

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = f(x), \quad (2.3)$$

dengan  $p_j = P_j/P_0$  dan  $f(x) = F(x)/P_0$ . Selanjutnya akan ditinjau persamaan diferensial linier bentuk homogen ( $f(x) = 0$ ), sehingga Persamaan (2.3) dapat ditulis kembali sebagai berikut,

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = 0, \quad (2.4)$$

Selanjutnya diberikan teorema untuk solusi dari persamaan diferensial linier bentuk homogen atau yang dituliskan pada Persamaan (2.4).

**Teorema 2.1.** Prinsip superposisi untuk solusi persamaan diferensial linier bentuk homogen

Misalkan  $y_1, y_2, \dots, y_n$  adalah  $n$  solusi dari persamaan diferensial linier bentuk homogen pada interval  $I$ . Jika  $c_1, c_2, \dots, c_n$  adalah konstan, maka kombinasi linier

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

juga merupakan solusi pada  $I$ .

#### 2.4.1. Solusi Bebas Linier

Untuk mengantisipasi bahwa solusi umum dari persamaan diferensial linier orde- $n$  bentuk homogen yang dituliskan pada Persamaan (2.4) terdapat solusi partikular yang saling bergantung linier, maka diberikan teorema sebagai berikut

**Teorema 2.2.** Solusi Wronskians

Misalkan  $y_1, y_2, \dots, y_n$  adalah  $n$  solusi dari persamaan diferensial linier bentuk homogen

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = 0,$$

pada sebuah interval buka  $I$ , untuk setiap  $p_i$  adalah konstanta. Misalkan

$$W = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \vdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

(a) Jika  $y_1, y_2, \dots, y_n$  bergantung linier, maka  $W \equiv 0$  pada  $I$ .

(b) Jika  $y_1, y_2, \dots, y_n$  bebas linier, maka  $W \neq 0$  pada tiap titik dari  $I$ .

Oleh karena itu terdapat dua kemungkinan:  $W \equiv 0$  pada  $I$  atau  $W \neq 0$  pada  $I$ .

### 2.4.2. Solusi Umum dari Persamaan Diferensial Linier Bentuk Homogen

Dari **Teorema 2.2** dapat menunjukkan bahwa dengan adanya himpunan  $n$  solusi bebas linier dari persamaan diferensial linier bentuk homogen, yang solusi dari persamaannya dapat diekspresikan sebagai kombinasi linier dari  $n$  solusi partikularnya. Hal ini dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa nilai determinan matriks Wronskian dari  $n$  solusi bebas linier adalah tidak nol. Sehingga solusi umumnya dapat dituliskan sebagai berikut

**Teorema 2.3.** Solusi umum dari persamaan diferensial linier bentuk homogen Misalkan,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  adalah  $n$  solusi bebas linier dari persamaan diferensial linier bentuk homogen

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

pada interval terbuka  $I$  untuk  $p_i$  adalah konstanta. Jika  $Y$  adalah solusi dari persamaan diatas, maka terdapat  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sedemikian sehingga

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

untuk semua  $x$  di  $I$ .

Solusi persamaan diferensial linier dengan koefisien variabel biasanya memerlukan metode numerik atau metode deret tak terbatas. Akan tetapi sekarang dapat ditunjukkan dengan memberikan solusinya secara langsung. Pertama, dicari solusi tunggal dari Persamaan (2.4) dan dimulai dengan mengobservasi

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{rx}) = r^k e^{rx}, \quad (2.5)$$

jadi setiap turunan dari  $e^{rx}$  adalah kelipatan konstan dari  $e^{rx}$ . Oleh karena itu, jika  $y = e^{rx}$  disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.4), maka setiap sukunya akan menjadi kelipatan konstan dari  $e^{rx}$ , dengan koefisien konstan bergantung pada  $r$  dan koefisien  $p_k$ . Ini menunjukkan bahwa dicari nilai  $r$  sehingga jumlahan semua kelipatan  $e^{rx}$  bernilai nol. Hal ini akan mengakibatkan  $y = e^{rx}$  akan menjadi solusi dari Persamaan (2.4). Sehingga diperoleh

$$r^n e^{rx} + p_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + p_{n-1} r e^{rx} + p_n e^{rx} = 0,$$

Atau

$$e^{rx}(r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_{n-1} r + p_n) = 0. \quad (2.6)$$

Karena  $e^{rx}$  tidak pernah nol,  $y = e^{rx}$  akan menjadi solusi dari persamaan (2.4) ketika  $r$  merupakan akar dari persamaan

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_{n-1} r + p_n = 0. \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) merupakan persamaan karakteristik dari Persamaan (2.4).

#### 2.4.2.1. Solusi Persamaan Diferensial Linier Bentuk Homogen dengan Akar Riil Berbeda

Untuk setiap akar persamaan karakteristik yang berbeda, maka diberikan teorema sebagai berikut.

**Teorema 2.4.** Akar riil berbeda

Jika  $r_1, r_2, \dots, r_n$  adalah akar-akar riil dan berbeda dari persamaan karakteristik pada Persamaan (2.4), maka

$$Y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

adalah solusi umum pada (2.4). Jadi fungsi bebas linier  $n$   $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}\}$  merupakan dasar untuk ruang solusi berdimensi- $n$  dari Persamaan (2.4).

**Contoh 2.1:**

Diberikan persamaan diferensial linier sebagai berikut

$$y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0;$$

dengan syarat awal

$$y(0) = 7, y'(0) = 0, \text{ dan } y''(0) = 70.$$

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial linier di atas adalah

$$r(r^2 + 3r - 10) = r(r + 5)(r - 2) = 0$$

dan persamaan karakteristiknya memberikan 3 akar riil  $r = 0, r = -5$ , dan  $r =$

2. Berdasarkan **Teorema 2.4** diperoleh solusi umum sebagai berikut

$$Y(x) = c_1 + c_2e^{-5x} + c_3e^{2x}. \quad (2.8)$$

Berdasarkan syarat awal yang ada, sehingga diperoleh nilai konstanta  $c_1 = 0, c_2 = 2$ , dan  $c_3 = 5$ . Berikutnya Persamaan (2.8) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$Y(x) = 2e^{-5x} + 5e^{2x}.$$

**2.4.2.2. Solusi Persamaan Diferensial Linier Bentuk Homogen dengan Akar Riil Berulang**

Untuk setiap akar persamaan karakteristik yang berulang, maka diberikan teorema sebagai berikut.

**Teorema 2.5.** Akar riil berulang

Jika persamaan karakteristik pada Persamaan (2.6) memiliki akar berulang  $r$  sebanyak  $k$ , maka solusi umum dari persamaan diferensial linier (2.4) sesuai dengan  $r$  adalah bentuk

$$(c_1 + c_2x + \dots + c_kx^{k-1})e^{rx}.$$

**Contoh 2.2:**

Diberikan persamaan diferensial linier sebagai berikut

$$9y^{(5)} - 6y^{(4)} + y^{(3)} = 0.$$

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial linier di atas adalah

$$9r^5 - 6r^4 + r^3 = r^3(9r^2 - 6r + 1) = r^3(3r - 1)^2 = 0.$$

yang memiliki tiga kali akar  $r = 0$  dan dua kali akar  $r = 1/3$ . Untuk akar  $r = 0$  memiliki solusi

$$(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{(0)x} = c_1 + c_2x + c_3x^2.$$

sedangkan untuk akar  $r = 1/3$  memiliki solusi

$$(c_4 + c_5x)e^{(1/3)x} = c_4e^{(1/3)x} + c_5xe^{(1/3)x}.$$

Oleh karena itu, solusi dari persamaan diferensial linier nya

$$Y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{(1/3)x} + c_5xe^{(1/3)x}.$$

#### 2.4.2.3. Solusi Persamaan Diferensial Linier Bentuk Homogen dengan Akar Kompleks

Untuk setiap akar persamaan karakteristik yang berbentuk kompleks, maka diberikan teorema sebagai berikut.

##### **Teorema 2.6.** Akar kompleks

Jika persamaan karakteristik pada Persamaan (2.6) memiliki pasangan akar konjugat kompleks yang tidak berulang  $a \pm bi$  (untuk  $b \neq 0$ ), maka bagian yang sesuai dari sebuah solusi umum Persamaan (2.11) memiliki bentuk

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx).$$

Oleh karena itu solusi bebas linier  $e^{ax} \cos bx$  dan  $e^{ax} \sin bx$  membangun sebuah subruang berdimensi 2 dari ruang solusi dari persamaan diferensialnya.

##### **Contoh 2.3:**

Diberikan persamaan diferensial linier sebagai berikut

$$y'' + b^2y = 0 \quad (b > 0)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial linier di atas adalah

$$r^2 + b^2 = 0.$$

yang memiliki akar  $r = \pm bi$ , sehingga dari **Teorema 2.6** diberikan solusi umum sebagai berikut

$$Y(x) = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx.$$

(Edwards, Penney dan Calvis, 2018)

## 2.5. Persamaan Bessel dan Modifikasinya

Berbagai metode analisis telah digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa sehingga diperoleh solusi yang tepat. Namun, dalam aplikasi matematika, sains, dan terapan pada teknik ada banyak persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan secara tepat dalam fungsi dasar terutama pada persamaan diferensial yang memiliki koefisien berupa variabel. Fungsi dasar yang dimaksudkan seperti fungsi eksponensial, logaritmik, dan trigonometri. Untuk masalah ini, terdapat suatu metode yang mungkin untuk menemukan solusi dari persamaan diferensialnya. Metode ini dikemukakan oleh Frobenius yang memberikan solusi dari persamaan diferensial berupa solusi deret, atau biasa disebut sebagai solusi deret Frobenius. Namun sebelum menggunakan solusi deret ini, perlu untuk dipahami definisi dan teorema sebagai berikut

### Definisi 2.1. Titik singular

Perhatikan persamaan diferensial tidak linier bentuk homogen orde  $n$  berikut

$$y^{(n)} + q_{n-1}(x)y^{(n-1)} + q_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + q_0(x)y = 0,$$

dengan  $q_k(x)$  untuk  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  merupakan fungsi yang bergantung terhadap variabel  $x$  yang kontinu pada interval terbuka  $I$ .

- a) Titik  $x_0$  dikatakan titik singular pada persamaan diferensial yang diberikan jika bukan merupakan titik ordiner, yaitu tidak semua koefisien  $q_0(x)$ ,  $q_1(x)$ , ...,  $q_{n-1}(x)$  analitik pada  $x = x_0$ .

- b) Titik  $x_0$  dikatakan titik singular biasa pada persamaan diferensial yang diberikan jika bukan merupakan titik ordiner, yaitu tidak semua koefisien  $q_k(x)$  analitik, namun semua  $(x - x_0)^{n-k}q_k(x)$  analitik untuk  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .
- c) Titik  $x_0$  dikatakan titik singular tidak biasa pada persamaan diferensial yang diberikan jika bukan titik biasa maupun titik singular.

**Teorema 2.7.** Teorema Fuchs

Untuk persamaan diferensial tidak linier bentuk homogen orde dua

$$y'' + P(x)y'(x) + Q(x)y = 0,$$

jika  $x = 0$  adalah titik regular singular, maka

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n, \quad |x| < r.$$

Misalkan persamaan indisial

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0,$$

memiliki dua akar riil  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1 \geq \alpha_2$ . Maka persamaan diferensialnya memiliki setidaknya satu solusi deret Frobenius yang diberikan dalam bentuk

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0, \quad 0 < x < r,$$

dengan koefisien  $a_n$  dapat ditentukan dengan mensubstitusi  $y_1(x)$  ke dalam persamaan diferensialnya. Solusi kedua yang bebas linier diperoleh sebagai berikut:

- a) Jika  $\alpha_1 - \alpha_2$  bukan bilangan bulat, maka solusi deret Frobenius keduanya diberikan sebagai berikut

$$y_2 = x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < r,$$

dengan koefisien  $b_n$  dapat ditentukan dengan mensubstitusi  $y_2(x)$  ke dalam persamaan diferensialnya.

b) Jika  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , maka

$$y_2 = y_1(x) \ln x + x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < r,$$

dengan koefisien  $b_n$  dapat ditentukan dengan mensubstitusi  $y_2(x)$  ke dalam persamaan diferensialnya, setelah  $y_1(x)$  diketahui. Pada kasus ini, solusi kedua  $y_2(x)$  bukan solusi deret Frobenius.

c) Jika  $\alpha_1 - \alpha_2$  bilangan bulat positif, maka

$$y_2 = ay_1(x) \ln x + x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < r,$$

dengan koefisien  $b_n$  dan  $a$  dapat ditentukan dengan mensubstitusi  $y_2(x)$  ke dalam persamaan diferensialnya, setelah  $y_1(x)$  diketahui. Parameter  $a$  dapat bernilai nol, pada kasus ini solusi kedua  $y_2(x)$  merupakan solusi deret Frobenius.

Solusi umum dari persamaan diferensialnya diberikan sebagai berikut

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Salah satu persamaan diferensial yang menggunakan solusi berupa deret sebagai berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} + (x^2 - v^2)y(x) = 0, \quad (2.9)$$

dengan  $v \geq 0$  adalah konstan. Persamaan (2.9) biasa juga disebut sebagai persamaan diferensial Bessel. Untuk menyelesaikan persamaan Bessel diatas, terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk,

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dy(x)}{dx} + Q(x)y(x) = 0, \quad P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \frac{x^2 - v^2}{x^2}. \quad (2.10)$$

Perhatikan bahwa,

$$xP(x) = 1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots \Rightarrow P_0 = 1,$$

$$x^2Q(x) = x^2 - v^2 = -v^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + \dots \Rightarrow Q_0 = -v^2,$$

keduanya analitik di titik  $x = 0$  dan dapat diekspansi menjadi deret yang konvergen untuk  $|x| < \infty$ . Sehingga jelas bahwa  $x = 0$  adalah titik regular singular pada Persamaan (2.9). Dengan menggunakan persamaan

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0, \quad (2.11)$$

maka diperoleh akar-akar persamaannya

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 1) + \alpha \cdot 1 - v^2 &= 0 \\ \alpha^2 - v^2 &= 0 \\ (\alpha - v)(\alpha + v) &= 0 \\ \alpha_1 = v \text{ atau } \alpha_2 = -v. & \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sehingga untuk  $\alpha_1 = v$ , Persamaan (2.9) memiliki solusi dengan bentuk

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v}, \quad a_0 \neq 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (2.13)$$

Selanjutnya Persamaan (2.13) didiferensialkan terhadap  $x$ , diperoleh

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + v) a_n x^{n+v-1}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + v)(n + v - 1) a_n x^{n+v-2}. \quad (2.15)$$

Substitusi Persamaan (2.13), (2.14), dan (2.15) ke dalam Persamaan (2.9), diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + v)(n + v - 1) a_n x^{n+v-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n + v) a_n x^{n+v-1} \\ + (x^2 - v^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Jika indeks penjumlahan pada Persamaan (2.16) diubah, maka Persamaan (2.16) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2v)a_n x^n + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0. \quad (2.17)$$

Agar persamaan ini bernilai benar, maka koefisien dari  $x^n$  untuk  $n = 0, 1, \dots$ , harus nol. Sehingga diperoleh

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{dan} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} \cdot n! (1+v)(2+v) \dots (n+v)}, \quad (2.18)$$

dan solusi dari persamaan Besselnya berupa

$$y_1(x) = a_0 x^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (1+v)(2+v) \dots (n+v)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty,$$

atau

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}, \quad 0 < x < \infty, \quad (2.19)$$

dengan  $J_v(x)$  disebut sebagai jenis pertama fungsi Bessel orde  $v$ . Berdasarkan Theorema Fuch, bentuk kedua dari solusi yang bebas linear bergantung pada selisih akar yang ada pada Persamaan (2.12), yaitu  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2v$ , bukan bilangan bulat, nol, atau bilangan bulat positif.

**Kasus 1:**  $2v$  bukan bilangan bulat

Solusi kedua yang bebas linear terhadap solusi pertama untuk kasus  $2v$  bukan bilangan bulat adalah

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-v}, \quad 0 < x < \infty. \quad (2.20)$$

dengan cara yang sama pada solusi pertama, maka diperoleh solusinya berbentuk

$$y_2(x) = b_0 x^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (1-v)(2-v) \dots (n-v)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty, \quad (2.21)$$

atau

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n - v + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}, \quad 0 < x < \infty. \quad (2.22)$$

Sehingga solusi umum dari Persamaan (2.9) adalah

$$\begin{aligned} y(x) &= B_1 y_1(x) + B_2 y_2(x) \\ &= C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x), \end{aligned}$$

atau

$$y(x) = D_1 J_v(x) + D_2 Y_v(x), \quad (2.23)$$

dengan

$$Y_v(x) = \frac{J_v(x) \cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}, \quad (2.24)$$

adalah jenis kedua fungsi Bessel orde  $v$ .

### Kasus 2: $v$ nol

Karena  $v = 0$ , maka nilai  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Sehingga solusi pertama dari persamaan (2.9) menjadi

$$y_1 = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty,$$

dengan  $J_0(x)$  disebut sebagai jenis pertama fungsi Bessel orde 0. Selanjutnya, solusi kedua yang bebas linear terhadap solusi pertama untuk kasus  $v = 0$  ialah

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty. \quad (2.25)$$

Dengan cara yang sama pada solusi pertama, maka diperoleh solusinya berbentuk

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad (2.26)$$

$$0 < x < \infty,$$

atau

$$y_2(x) = \frac{\pi}{2} Y_0(x) + (\ln 2 - \gamma) J_0(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (2.27)$$

dengan  $Y_0(x)$  disebut sebagai jenis kedua fungsi Bessel orde 0 yang didefinisikan sebagai berikut

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} \right\}, \quad (2.28)$$

dengan

$$\gamma = 0.57721566490153 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

adalah konstanta Euler. Selanjutnya solusi umum Persamaan (2.9) berupa

$$y(x) = D_3 J_0(x) + D_4 Y_0(x). \quad (2.29)$$

**Kasus 3:**  $v$  bilangan bulat positif

Solusi kedua yang bebas linear terhadap solusi pertama untuk kasus  $2v$  bukan bilangan bulat adalah

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln x + x^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty. \quad (2.30)$$

dengan cara yang sama pada solusi pertama, maka diperoleh solusinya berbentuk

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= aJ_v(x) \ln x \\
&+ x^{-v} \left\{ \sum_{n=0}^{v-1} \frac{(v-n-1)!}{n!(v-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right. \\
&\left. + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{v-1} A_n}{n!(n+v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+v)} \right\}, \quad 0 < x < \infty,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

dengan

$$A_n = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{1+v} + \frac{1}{2+v} + \dots + \frac{1}{n+v} \right).$$

Selanjutnya, dengan menggunakan notasi

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \psi(n+1) + \gamma, \quad \psi(1) = -1,$$

dengan  $\psi(n) = \Gamma'(n)/\Gamma(n)$  adalah fungsi psi, maka Persamaan (2.31) dapat diekspresikan dalam bentuk jenis kedua fungsi Bessel orde  $v$ , diperoleh

$$y_2(x) = a \left\{ \frac{\pi}{2} Y_v(x) - \frac{1}{2} [\gamma - \psi(v+1) - 2 \ln 2] J_v(x) \right\}, \quad 0 < x < \infty. \tag{2.32}$$

dengan  $Y_v(x)$  disebut sebagai jenis kedua fungsi Bessel orde  $v$  yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
Y_v(x) &= \frac{2}{\pi} J_v(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{v-1} \frac{(v-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\psi(n+1) + \psi(n+v+1)}{n!(n+v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Selanjutnya solusi umum Persamaan (2.9) berupa

$$y(x) = E_3 J_0(x) + E_4 Y_0(x). \tag{2.34}$$

Namun, persamaan Bessel jarang muncul dalam bentuk yang standar. Sebagai contoh persamaan diferensial biasa linier orde dua sebagai berikut

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1-2\gamma}{x} \frac{dy(x)}{dx} + \left[ (\kappa\tau x^{\tau-1})^2 + \frac{\gamma^2 - v^2\tau^2}{x^2} \right] y(x) = 0, x > 0, \quad (2.35)$$

dengan  $\gamma, \kappa, v$ , dan  $\tau$  adalah konstan. Menyelesaikan Persamaan (2.35) menggunakan solusi deret (deret Frobenius) akan melalui proses yang sulit. Namun, Persamaan (2.35) dapat ditransformasikan ke dalam persamaan Bessel. Perhatikan bahwa Persamaan (2.35) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2y(x)}{dx^2} + (1-2\gamma)x \frac{dy(x)}{dx} + [(\kappa\tau x^\tau)^2 + \gamma^2 - v^2\tau^2]y(x) &= 0 \\ x^{2-\gamma} \frac{d^2y(x)}{dx^2} + (1-2\gamma)x^{1-\gamma} \frac{dy(x)}{dx} + [(\kappa\tau x^\tau)^2 + \gamma^2 - v^2\tau^2]x^{-\gamma}y(x) &= 0 \\ x^{2-\gamma} \frac{d^2y(x)}{dx^2} + (1-2\gamma)x^{1-\gamma} \frac{dy(x)}{dx} + \gamma^2 x^{-\gamma}y(x) + (\kappa^2 x^{2\tau} - v^2)\tau^2 x^{-\gamma}y(x) \\ &= 0 \\ x \frac{d}{dx} \left( x \frac{d(x^{-\gamma}y(x))}{dx} \right) + (\kappa^2 x^{2\tau} - v^2)\tau^2 x^{-\gamma}y(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

misalkan  $\eta = x^{-\gamma}y(x)$ , maka Persamaan (2.36) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\eta}{dx} \right) + (\kappa^2 x^{2\tau} - v^2)\tau^2 \eta &= 0 \\ \frac{x}{\tau} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\tau} \frac{d\eta}{dx} \right) + (\kappa^2 x^{2\tau} - v^2)\eta &= 0 \\ \frac{\kappa x^\tau}{\kappa\tau x^{\tau-1}} \frac{d}{dx} \left( \frac{\kappa x^\tau}{\kappa\tau x^{\tau-1}} \frac{d\eta}{dx} \right) + (\kappa^2 x^{2\tau} - v^2)\eta &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Selanjutnya, misalkan  $\xi = \kappa x^\tau$  dan  $d\xi = \kappa\tau x^{\tau-1}dx$  maka Persamaan (2.37) dapat ditulis

$$\begin{aligned} \xi \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\eta}{d\xi} \right) + (\xi^2 - v^2)\eta &= 0 \\ \xi^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi \frac{d\eta}{d\xi} + (\xi^2 - v^2)\eta &= 0, \quad \xi > 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

Persamaan (2.38) adalah persamaan Bessel yang memiliki solusi berupa

$$\eta = B_v(\xi),$$

$$= C_1 J_v(\xi) + C_2 Y_v(\xi).$$

Kemudian, dilakukan substitusi balik untuk memperoleh solusi dari Persamaan (2.38)

$$\begin{aligned}\eta &= C_1 J_v(\xi) + C_2 Y_v(\xi) \\ &= C_1 J_v(\kappa x^\tau) + C_2 Y_v(\kappa x^\tau),\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}x^{-\gamma} y(x) &= C_1 J_v(\kappa x^\tau) + C_2 Y_v(\kappa x^\tau) \\ y(x) &= x^\gamma \{C_1 J_v(\kappa x^\tau) + C_2 Y_v(\kappa x^\tau)\}.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Selanjutnya, permasalahan persamaan diferensial lain yang menggunakan solusi berupa deret sebagai berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} - (x^2 + v^2)y(x) = 0, \quad (2.40)$$

dengan  $v \geq 0$  adalah konstan. Persamaan (2.40) biasa juga disebut sebagai persamaan diferensial Bessel yang dimodifikasi. Solusi dari persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut

$$y(x) = C_1 I_v(x) + C_2 K_v(x), \quad (2.41)$$

dengan  $I_v(x)$  disebut sebagai jenis pertama fungsi Bessel orde  $v$  yang dimodifikasi dan  $K_v(x)$  disebut sebagai jenis kedua fungsi Bessel orde  $v$  yang dimodifikasi. serta persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{1 - 2\gamma}{x} \frac{dy(x)}{dx} + \left[ -(\kappa \tau x^{\tau-1})^2 + \frac{\gamma^2 - v^2 \tau^2}{x^2} \right] y(x) &= 0, \\ x &> 0,\end{aligned}\quad (2.42)$$

dengan  $\gamma, \kappa, v$ , dan  $\tau$  adalah konstan, memiliki solusi berupa

$$y(x) = x^\gamma \{C_3 I_v(\kappa x^\tau) + C_4 K_v(\kappa x^\tau)\}.\quad (2.43)$$

(Wei dan Xie, 2010).

## 2.6. Persamaan Diferensial Parsial dan Persoalan Nilai Awal dan Nilai Batas

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang menghubungkan fungsi beserta turunan-turunannya. Persamaan tersebut dapat diaplikasikan untuk memodelkan suatu peristiwa alam yang menjadi masalah dalam kehidupan kemudian ditemukan solusinya secara matematis. Namun, persamaan diferensial parsial (PDP) yang melibatkan dua atau lebih variabel independen lebih cocok untuk digunakan dalam banyak masalah fisik dibanding persamaan diferensial biasa (PDB) seperti di ruang lingkup dinamika fluida, elektrisitas, magnetika, mekanika, optik, aliran panas, dan elastisitas (Boyce dan DiPrima, 2001; Kreyszig, Kreyszig dan Norminton, 2011; Kusuma, 2018).

### 2.6.1. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan parsial dari suatu fungsi (tidak diketahui) yang bergantung pada dua variabel atau lebih, seringkali waktu  $t$  dan satu atau beberapa variabel dalam ruang seperti temperatur yang bergantung pada kedudukan  $x$  dan waktu  $t$ . Untuk menyederhanakan penulisan, diberikan batasan perhatian pada kasus satu fungsi yang tidak diketahui, misalkan  $u$ , dan memiliki  $n + 1$  variabel independen, misalkan  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ . Sehingga, bentuk umum dari persamaan diferensial parsial untuk fungsi  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  adalah

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_j}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots) \quad (2.44)$$

dengan  $F$  adalah sebuah fungsi yang diberikan,  $u_{x_j}$  adalah notasi indeks dari  $\partial u / \partial x_j$ ,  $u_{x_i x_j}$  adalah notasi indeks dari  $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ , dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$  dan seterusnya. (Stavroulakis dan Tersian, 2004; Li dan Chen, 2008)

Solusi dari suatu persamaan diferensial parsial dapat ditemukan dengan berbagai metode yang lebih sederhana, seperti mengubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa. Metode-metode tersebut antara lain Pemisahan Variabel, Transformasi Laplace, Transformasi Integral, Transformasi Variabel Bergantung, Metode Numerik, Persamaan Integral, Perubahan Koordinat, Metode Gangguan (Perturbasi), dan Ekspansi Fungsi

Eigen. Namun, metode-metode tersebut hanya dapat diterapkan pada kelas tertentu saja. Akibatnya, persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan dalam enam kelas, yaitu:

1. *Orde dari Persamaan Diferensial Parsial.* Orde dari persamaan diferensial parsial merupakan turunan tertinggi dari turunan parsial yang ada. Persamaan  $u_t = u_{xx} + \sin x$  merupakan persamaan diferensial parsial berorde dua.
2. *Banyak Variabel.* Banyak variabel merupakan jumlah dari banyaknya variabel bebas. Persamaan  $u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$  merupakan persamaan diferensial parsial tiga variabel yaitu  $t, r,$  dan  $\theta$ .
3. *Linieritas.* Linieritas dari persamaan diferensial parsial memberikan klasifikasi atas linier dan tidak linier. Pada persamaan diferensial parsial linier, variabel bebas pada fungsi yang tidak diketahui  $u$  dan semua derivatifnya berbentuk linear atau dalam bahasa yang sederhana tidak ada perkalian dan pengkuadratan. Seperti persamaan  $u_{tt} = e^{-t}u_{xx}$  merupakan persamaan diferensial parsial linier sedangkan  $u_{tt} = uu_{xx} + \sin x$  merupakan persamaan diferensial parsial tidak linier karena terdapat faktor perkalian  $u$  dengan  $u_{xx}$ .
4. *Homogenitas.* Sifat homogenitas diperoleh sebagaimana dalam persamaan diferensial biasa. Persamaan  $u_{xx} + u_x + u_t = 0$  merupakan persamaan diferensial parsial homogen sedangkan persamaan  $u_{xx} + u_x + u_t = f(x, t)$  dengan  $f(x, t) \neq 0$  merupakan persamaan diferensial parsial tidak homogen.
5. *Jenis Koefisien.* Jenis koefisien dari persamaan diferensial parsial dibedakan menjadi PDP koefisien konstan dan PDP koefisien variabel. Persamaan  $2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0$  merupakan persamaan diferensial parsial dengan koefisien konstan sedangkan persamaan  $yu_{xx} + 5u_{xy} + xu_{yy} = 0$  merupakan persamaan diferensial dengan koefisien variabel.
6. *Ketiga Tipe Dasar Persamaan Linear.* Persamaan diferensial parsial orde dua dua variabel yang banyak digunakan mempunyai bentuk persamaan  $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$  dengan  $A, B, C, D, E, F,$  dan  $G$  merupakan konstan ataupun fungsi  $x$  dan  $y$ . Jika persamaan

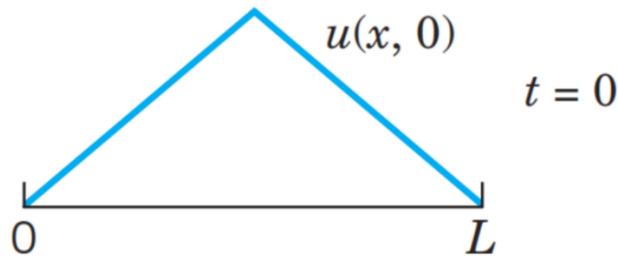
diferensial parsial memenuhi  $B^2 - 4AC = 0$ , maka persamaan tersebut digolongkan ke dalam kelas Parabolik. Jika persamaan diferensial parsial memenuhi  $B^2 - 4AC > 0$ , maka persamaan tersebut digolongkan ke dalam kelas Hiperbolik. Jika persamaan diferensial parsial memenuhi  $B^2 - 4AC < 0$ , maka persamaan tersebut digolongkan ke dalam kelas Eliptik (Kusuma, 2018).

## **2.6.2. Persoalan Nilai Awal dan Nilai Batas**

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial, dibutuhkan beberapa syarat awal dan syarat batas berupa fungsi yang berasal dari permasalahan persamaan diferensial parsial tersebut. Teknik dan metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial sangat bergantung pada syarat awal dan syarat batasnya. Persamaan diferensial yang tidak dilengkapi dengan syarat awal dan syarat batas mengakibatkan solusi yang diperoleh dari persamaan tersebut tidak tunggal. Ketidaktunggalan solusi PDP dapat dinyatakan dengan suatu fungsi.

### **2.6.2.1. Persoalan Nilai Awal**

Persamaan diferensial parsial dengan syarat awal disebut sebagai persoalan nilai awal. Syarat awal adalah suatu syarat atau kondisi yang harus dipenuhi pada mula-mula. Jika  $t$  adalah salah satu variabel independen yang menginterpretasikan variabel waktu, maka syarat atau kondisi awal ditentukan untuk nilai  $u$  beserta turunannya pada waktu  $t = 0$ . Sebagai contoh, getaran pada senar biola yang diikat pada posisi  $x = 0$  dan  $x = L$  seperti pada Gambar 2.9. Diasumsikan bahwa senar biola hanya bergetar secara 1 dimensi. Selanjutnya, senar biola didistorsi kemudian dilepaskan dan dibiarkan bergetar. Distorsi yang dilakukan di awal inilah yang disebut sebagai syarat atau keadaan awal (pada waktu  $t = 0$ ) (Astutik, 2019).



Gambar 2.9. Grafik Fungsi Keadaan Awal Senar Biola dengan Panjang  $L$

Pada mulanya, senar biola akan memiliki posisi mula-mula dan kecepatan mula-mula yaitu saat senar biola tersebut didistorsi. Sehingga memenuhi syarat awal sebagai berikut

$$u(x, 0) = f(x) \text{ dan } u_t(x, 0) = g(x). \quad (2.45)$$

Kondisi syarat awal ini menginterpretasikan posisi mula-mula senar biola berbentuk fungsi  $f(x)$  dan kecepatan mula-mula berbentuk fungsi  $g(x)$  (Kreyszig, Kreyszig dan Norminton, 2011; Kusuma, 2018).

#### 2.6.2.2. Persoalan Nilai Batas

Persamaan diferensial parsial dengan syarat batas yang diberikan, disebut sebagai persoalan nilai batas. Secara umum persoalan nilai batas dapat dibagi atas tiga macam kategori yaitu:

##### 1. Persoalan Dirichlet

Persoalan nilai batas Dirichlet ditandai dengan keseluruhan syarat batas berupa fungsi yang dicari dalam persamaan diferensial parsialnya.

##### Contoh 2.4:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2.46)$$

dengan syarat batasnya diberikan dalam bentuk

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(1, y) &= y, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, 1) &= x. \end{aligned} \quad (2.47)$$

##### 2. Persoalan Neumann

Persoalan nilai batas Neumann ditandai dengan syarat batas berupa turunan dari fungsi yang dicari. Turunan ini dapat berupa turunan ke salah satu variabelnya maupun ke dua atau lebih variabelnya.

**Contoh 2.5:**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1,$$

dengan syarat batasnya diberikan dalam bentuk

$$\begin{aligned} u_n(0, y) &= 0, & u_n(1, y) &= 0, \\ u_n(x, 0) &= f(x), & u_n(x, 1) &= g(x). \end{aligned} \quad (2.48)$$

dengan  $u_n$  merupakan turunan  $u$  ke vektor normalnya, atau dengan kata lain:

$$u_n = \frac{\partial u}{\partial x} n_1 + \frac{\partial u}{\partial y} n_2. \quad (2.49)$$

Dengan  $n_1$  dan  $n_2$  merupakan komponen vektor normal satuan searah sumbu  $x$  dan  $y$  berturut-turut.

### 3. Persoalan Robin

Persoalan nilai batas Robin ditandai dengan syarat batas yang bercampur antara syarat batas Dirichlet dengan syarat batas Neumann.

**Contoh 2.6:**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1,$$

dengan syarat batasnya diberikan dalam bentuk

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & u(x, 1) &= x, \\ u(0, y) &= 0, & u_n(1, y) &= y. \end{aligned} \quad (2.50)$$

(Kusuma, 2018)

## 2.7. Metode Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel adalah metode yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Metode ini menggunakan pemisalan yang bertujuan untuk mengubah persamaan diferensial

parsial dengan seperangkat persamaan diferensial biasa, yang kemudian harus diselesaikan dengan syarat awal dan syarat batas dari persamaan diferensial parsialnya. Kemudian, semua solusi berupa fungsi yang telah diperoleh dari setiap persamaan diferensial biasa dikalikan. Hasil perkalian fungsi-fungsi inilah yang menjadi solusi akhir dari fungsi yang tidak diketahui, misalkan  $u$  (Boyce dan DiPrima, 2001).

Menurut Farlow (1982), metode pemisahan variabel dapat digunakan jika:

- a. Persamaan diferensial parsial bersifat linier dan homogen, dan
- b. Syarat batas bersifat linier dan homogen.

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial menggunakan metode pemisahan variabel untuk variabel spasial  $x$  dan variabel waktu  $t$ , dimisalkan solusinya berupa:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

dengan  $X(x)$  adalah fungsi yang bergantung terhadap variabel spasial  $x$  dan  $T(t)$  adalah fungsi yang bergantung terhadap variabel waktu  $t$ .

Untuk mengilustrasikan metode ini, diberikan suatu contoh kasus persamaan gelombang satu dimensi sebagai berikut:

**Contoh 2.7** Persamaan gelombang

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad 0 \leq x \leq l; \quad 0 < t < \infty, \quad (2.51)$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

dan syarat awal

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x). \end{aligned} \quad (2.53)$$

untuk menyelesaikan persamaan diferensial, berikut langkah-langkah yang dapat dilakukan:

**Langkah 1:** Mereduksi persamaan diferensial parsial ke persamaan diferensial biasa.

Asumsikan bahwa solusi dari Persamaan (2.51) berbentuk sebagai berikut.

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.54)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (2.54) ke Persamaan (2.51), sehingga diperoleh

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t),$$

atau

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (2.55)$$

Agar Persamaan (2.55) dapat terpenuhi, maka nilai dari kedua ruas haruslah bernilai sama dan konstan. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = K, \quad (2.56)$$

dengan  $K$  adalah konstan. Dari Persamaan (2.56) dapat diperoleh dua persamaan diferensial biasa, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} - K T(t) &= 0, \\ \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \frac{K}{c^2} X(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

**Langkah 2:** Mencari ketiga macam solusi yang bergantung pada nilai  $K$  dan memasukkan syarat batas.

Persamaan (2.57b) memiliki tiga macam solusi yang bergantung pada nilai  $K$ , yakni  $K = 0$ ;  $K > 0$ ; dan  $K < 0$ .

**Solusi I:**

Jika  $K = 0$ , Persamaan (2.57b) menjadi

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0, \quad (2.58)$$

yang memiliki solusi berbentuk

$$X(x) = A_1x + B_1, \quad (2.59)$$

dengan  $A_1$  dan  $B_1$  merupakan konstanta integrasi. Syarat batas (2.52) dan (2.54) memberikan

$$\begin{aligned} X(0)T(t) = 0 & \quad \text{atau} & \quad X(0) = 0, \\ X(l)T(t) = 0 & \quad \text{atau} & \quad X(l) = 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

dengan menggunakan Persamaan (2.60) ke Persamaan (2.59) maka diperoleh

$$\begin{aligned} X(0) = A_1(0) + B_1 &= 0, \\ X(l) = A_1(l) + B_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Solusi dari kedua persamaan terakhir adalah  $A_1 = B_1 = 0$  yang mengakibatkan fungsi  $u(x, t) = 0$ . Solusi dari persamaan diferensial parsial untuk kasus  $K = 0$  merupakan solusi trivial.

### Solusi II:

Jika  $K > 0$ , misalkan  $K = \lambda^2$ , Persamaan (2.57b) menjadi

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - \frac{\lambda^2}{c^2}X(x) = 0, \quad (2.62)$$

yang memiliki solusi berbentuk

$$X(x) = A_2e^{\frac{\lambda}{c}x} + B_2e^{-\frac{\lambda}{c}x}. \quad (2.63)$$

dengan menggunakan persamaan syarat batas sebelumnya ke Persamaan (2.63) maka diperoleh

$$\begin{aligned} X(0) = A_2 + B_2 &= 0, \\ X(l) = A_2e^{\frac{\lambda}{c}l} + B_2e^{-\frac{\lambda}{c}l} &= 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Solusi dari kedua persamaan terakhir adalah  $A_2 = B_2 = 0$  yang mengakibatkan fungsi  $u(x, t) = 0$ . Solusi dari persamaan diferensial parsial untuk kasus  $K > 0$  merupakan solusi trivial.

**Solusi III:**

Jika  $K < 0$ , misalkan  $K = -\lambda^2$ , Persamaan (2.57b) menjadi

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{c^2}X(x) = 0, \quad (2.65)$$

yang memiliki solusi berbentuk

$$X(x) = A_3 \sin\left(\frac{\lambda}{c}x\right) + B_3 \cos\left(\frac{\lambda}{c}x\right). \quad (2.66)$$

dengan menggunakan persamaan syarat batas sebelumnya ke Persamaan (2.66) maka diperoleh

$$\begin{aligned} X(0) &= A_3(0) + B_3(1) = 0, \\ X(l) &= A_3 \sin\left(\frac{\lambda}{c}l\right) + B_3 \cos\left(\frac{\lambda}{c}l\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Solusi dari Persamaan (2.67a) adalah  $B_3 = 0$ . Untuk solusi tidak trivial diharuskan nilai  $A_3 \neq 0$  atau  $\sin\left(\frac{\lambda}{c}l\right) = 0$ . Hal ini berarti nilai  $\frac{\lambda l}{c} = n\pi$ , dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$  atau

$$\lambda = \frac{n\pi c}{l}, \quad (2.68)$$

yang berarti nilai

$$K = -\frac{n^2\pi^2 c^2}{l^2}. \quad (2.69)$$

Sehingga solusi yang tidak trivial untuk fungsi  $X(x)$  adalah

$$X(x) = A_3 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (2.70)$$

Selanjutnya, substitusi Persamaan (2.69) ke dalam Persamaan (2.57a) maka diperoleh

$$T''(t) + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}T(t) = 0, \quad (2.71)$$

yang memiliki solusi berbentuk

$$T(t) = D_3 \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + E_3 \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right). \quad (2.72)$$

Substitusi Persamaan (2.70) dan (2.72) ke dalam Persamaan (2.54) diperoleh

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ F \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + G \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right]. \quad (2.73)$$

dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dengan prinsip superposisi keseluruhan solusi untuk  $n$  disatukan menjadi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ F_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + G_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right]. \quad (2.74)$$

Langkah 3: Memasukkan syarat awal.

Untuk menentukan nilai konstanta  $F_n$  dan  $G_n$ , maka Persamaan (2.74) disubstitusikan ke dalam syarat awal yang ada pada Persamaan (2.53) sehingga diperoleh

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (2.75)$$

dan

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{n\pi c}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (2.76)$$

Berikutnya konstanta  $F_n$  dan  $G_n$  dapat ditentukan menggunakan deret Fourier.

Kalikan kedua ruas pada Persamaan (2.75) dengan  $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$

$$f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \quad (2.77)$$

Selanjutnya integralkan dari 0 sampai dengan  $l$  terhadap variabel  $x$  diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx &= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx \\ &= \frac{l}{2} F_m \end{aligned}$$

atau

$$F_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right) d\xi. \quad (2.78)$$

Dengan cara yang sama untuk konstanta  $G_n$  diperoleh

$$\frac{n\pi c}{l} G_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right) d\xi,$$

atau

$$G_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right) d\xi. \quad (2.79)$$

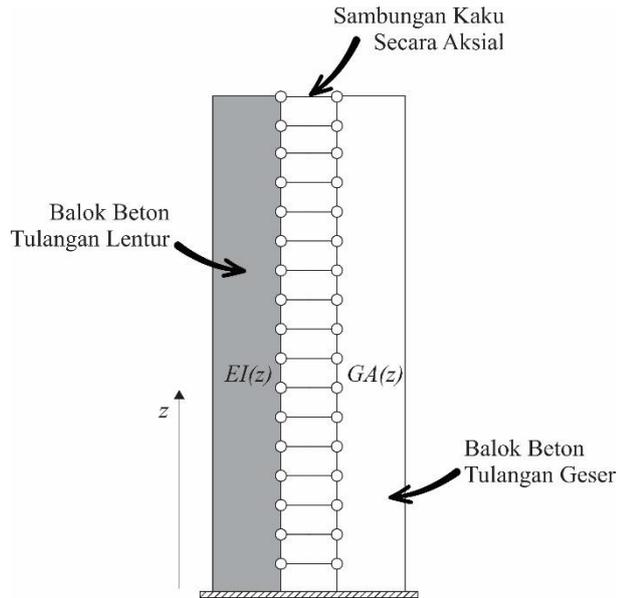
Substitusi balik Persamaan (2.78) dan (2.79) ke dalam Persamaan (2.74) diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) \left[ f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{lg(\xi)}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right] d\xi \right]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

(Kusuma, 2018)

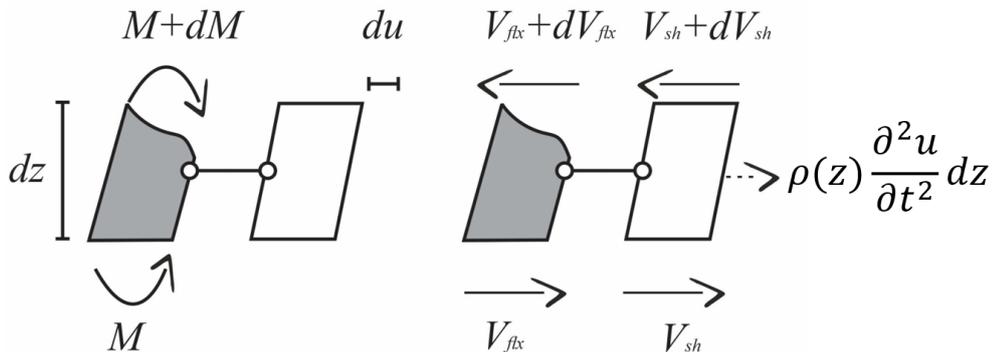
## 2.8. Model Matematika *Flexural-Shear* Bangunan Bertingkat

Model *flexural-shear* yang diberikan oleh Khan dan Sbrounis (1964) dengan balok beton tulangan geser dan balok beton tulangan lentur dihubungkan secara paralel menggunakan sambungan kaku secara aksial.



Gambar 2.10. Model geser lentur yang digabungkan secara kontinu.

Besarnya beban yang bekerja di balok menentukan besaran- besaran gaya geser dan momen yang terjadi. Mencari gaya geser dan momen lentur merupakan langkah penting dalam mendesain suatu balok. Sehingga apabila terjadi gelombang seismik, dapat dilihat pergerakan balok beton tulangan lentur (*flexural beam*) dan balok beton tulangan geser (*shear beam*) nya sebagai berikut.



Gambar 2.11. Potongan penampang balok beton tulangan, momen di kiri, geser dan beban di kanan  $u$  adalah perpindahan bangunan ( $m$ ).

Sebelum menganalisis gaya geser dan momen yang terjadi pada kedua balok beton bertulang, terlebih dahulu diberikan hukum-hukum berikut

**Hukum Newton I :**

Hukum Newton I berbunyi “Jika resultan gaya pada suatu benda sama dengan nol, maka benda yang diam akan tetap diam dan benda yang bergerak akan tetap bergerak dengan kecepatan tetap selama tidak ada gaya eksternal yang mengenainya”. Secara matematis dituliskan sebagai

$$\sum F = 0,$$

dengan  $F$  adalah gaya ( $N$ ). (D’Eleuterio dan Heppler, 2016).

**Hukum Newton II :**

Hukum Newton II berbunyi “Percepatan yang dihasilkan oleh resultan gaya yang bekerja pada suatu benda berbanding lurus dengan resultan gaya, dan berbanding terbalik dengan massa benda”. Secara matematika dituliskan sebagai

$$\sum F = ma,$$

dengan  $F$  adalah gaya ( $N$ ),  $m$  adalah massa ( $kg$ ), dan  $a$  adalah percepatan ( $m/s^2$ ) (D’Eleuterio dan Heppler, 2016; Irwan dan Jalil, 2019).

Karena momen pada balok beton tulangan lentur (*flexural beam*) cenderung lembam sehingga untuk analisisnya digunakan **Hukum Newton I**. Selanjutnya analisis dapat dilakukan dengan menggunakan dua hukum diatas, sehingga diperoleh

$$\rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{2.81}$$

dan

$$V_{flx} = \frac{\partial M}{\partial z}, \tag{2.82}$$

dengan,  $\rho(z)$  adalah kerapatan linier ( $kg/m^3$ ),  $u$  adalah perpindahan bangunan ( $m$ ),  $V$  adalah pergeseran kedua balok ( $N$ ),  $V_{flx}$  adalah pergeseran pada balok beton tulangan lentur (*flexural beam*) ( $N$ ),  $M$  adalah momen lentur pada balok beton tulangan lentur (*flexural beam*) ( $Nm$ ),  $z$  adalah koordinat tinggi dengan alas tetap ( $m$ ), dan  $t$  adalah waktu ( $s$ ).

Perhatikan bahwa pergeseran pada kedua balok berbanding lurus dengan jumlahan pergeseran pada balok beton tulangan lentur (*flexural beam*) dan pergeseran pada balok geser. Sehingga,

$$V = V_{flx} + V_{sh}. \quad (2.83)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (2.82) dan (2.83) ke dalam Persamaan (2.81), sehingga dapat dituliskan kembali menjadi,

$$\begin{aligned} \rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} (V_{flx} + V_{sh}), \\ \rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \left[ \frac{\partial M}{\partial z} \right] + V_{sh} \right). \end{aligned} \quad (2.84)$$

dengan  $V_{sh}$  adalah pergeseran pada balok beton tulangan geser (*shear beam*) ( $N$ ). Berdasarkan sifat balok beton tulangan lentur (*flexural beam*), diperoleh bahwa momen lentur yang terjadi pada balok tersebut dapat dituliskan secara matematis sebagai berikut,

$$M = EI(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.85)$$

dengan  $EI(z)$  adalah kekakuan lentur dari balok beton tulangan lentur (*flexural beam*) pada ketinggian  $z$  ( $N \cdot m^2$ ). Sedangkan pergeseran pada balok beton tulangan geser (*shear beam*) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$V_{sh} = -GA(z) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.86)$$

dengan  $GA(z)$  adalah kekakuan geser dari balok beton tulangan geser (*shear beam*) pada ketinggian  $z$  ( $N$ ). Dari Persamaan (2.85) dan (2.86), Persamaan (2.84) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\begin{aligned} \rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left[ EI(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - GA(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left[ EI(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - GA(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Xiao Lai dkk (2021) dalam penelitiannya mengembangkan model *flexural-shear* dengan memperhatikan distribusi massa dan kekakuan ganda yang tidak seragam, dan memberikan perkiraan yang efisien dari permintaan ISD maksimumnya. Pada penelitiannya, mereka melakukan penyederhanaan analitis. Jika diasumsikan luas lantai bervariasi secara linier dengan ketinggian struktur, maka aproksimasi variasi linier pada berat tiap lantai sistem dan variasi kuadrat dalam gaya aksial akumulatif pada komponen struktur vertikal dapat diamati. Jika kekuatan material juga diasumsikan memenuhi variasi linear, menurut kode batas tegangan tekan yang ternormalisasi dalam kode desain seismik cina, penampang komponen struktur yang vertikal juga cenderung menurun secara linier. Oleh karena itu, berat tiap komponen struktur (yaitu, sistem lantai horizontal dan komponen struktur vertikal) dapat diasumsikan teraproksimasi variasi linier dengan ketinggian bangunannya. Sehingga, distribusi kerapatan linier pada ketinggiannya lebih bergantung pada variasi berat tiap komponen struktur bangunan. Xiao Lai juga menuliskan kaitan antara distribusi kerapatan linier dengan distribusi kekakuan lentur dan kekakuan gesernya.

Namun, dalam penelitian Xiao Lai dkk (2021) dan penelitian yang sejenis tidak terlalu menyinggung pengaruh pemberian peredam lentur bangunan. Pemberian peredam ini diharapkan dapat meredam perubahan bentuk bangunan terhadap waktu saat terjadinya gempa bumi. Berdasarkan harapan tersebut, pada penelitian ini akan dikembangkan model *flexural – shear* dengan penambahan faktor peredam dan selanjutnya akan dianalisis pengaruhnya.