

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA PENGARUH MIGRASI TERHADAP
PERUBAHAN JUMLAH PENGANGGURAN**

SKRIPSI



ANDI UTARI SAMSIR

H111 14 015

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

2018



**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA PENGARUH MIGRASI TERHADAP
PERUBAHAN JUMLAH PENGANGGURAN**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin**

**ANDI UTARI SAMSIR
H111 14 015**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2018



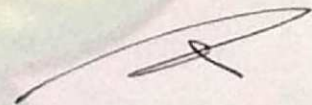
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguhnya-
sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA PENGARUH MIGRASI TERHADAP
PERUBAHAN JUMLAH PENGANGGURAN**

adalah benar-benar kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah
dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 22 November 2018



ANDI UTARI SAMSIR

NIM. H111 14 015



**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA PENGARUH MIGRASI TERHADAP
PERUBAHAN JUMLAH PENGANGGURAN**

ANDI UTARI SAMSIR

H111 14 015

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal : 22 November 2018

Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama



Utari, S.Si., M.Si

904 200312 2 001

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.

NIP. 19680114 199412 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : Andi Utari Samsir

NIM : H111 14 015

Program Studi : Matematika

Pada hari ini, Kamis 22 November 2018, panitia ujian sidang sarjana menerima dengan baik skripsi yang judul :

ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PENGARUH MIGRASI TERHADAP PERUBAHAN JUMLAH PENGANGGURAN

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 22 November 2018

Susunan Panitia Ujian Sidang Sarjana

Tanda Tangan

1. Ketua : Drs. Muhammad Zakir, M.Si
NIP. 19640217 199103 1 004

2. Sekretaris : Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

3. Anggota : Dr. Diaraya, M.Ak
NIP. 19631231 198702 1 011

4. Anggota : Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.
NIP. 19800904 200312 2 001

: Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.
NIP. 19680114 199412 1 001



PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI SKRIPSI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Andi Utari Samsir
NIM : H111 14 015
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*)** atas skripsi saya yang berjudul :

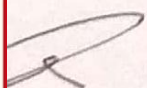
"Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Pengaruh Migrasi terhadap Perubahan Jumlah Pengangguran"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan mempublikasikan skripsi saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 22 November 2018

Yang Menyatakan



Utari Samsir

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Rabbil Alamin ucapan syukur penulis terhadap kehadiran Allah *Subhanahu Wa ta'ala Rabb* semesta alam. Karena atas limpahan rahmat, hidayah, dan kasih sayang-Nya, penulis masih diberikan kesempatan dan kesehatan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam juga tak henti-hentinya tercurah kepada Baginda Rasulullah *Shallallahu Alaihi Wasallam*, yang menjadi panutan untuk terus menuntut ilmu dan memberikan manfaat kepada sesama.

Alhamdulillah berkat pertolongan Allah akhirnya skripsi dengan judul **“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Pengaruh Migrasi terhadap Perubahan Jumlah Pengangguran”** yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan. Dalam proses penyelesaian skripsi ini banyak suka dan duka yang telah dilewati penulis. Namun berkat rahmat dan izin-Nya serta dukungan dan bantuan dari berbagai pihak, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus dan tak terhingga kepada Ayahanda **Andi Samsir.Ar** dan Ibunda **Kaarfiawati.K** tercinta, yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kesabaran bertabur cinta dan kasih sayang dengan penuh ketulusan hati dan kesungguhan dalam memberikan semangat dan dukungan kepada penulis dengan doa dan restunya untuk keberhasilan penulis selama menjalani proses pendidikan. Untuk adikku tersayang **Andi Novita Samsir**, terimakasih banyak atas pengaruh positif yang luar biasa kepada penulis selama menjalani proses pendidikan dengan saling mengingatkan satu sama lain dalam hal kebaikan, menjadi teman terbaik dalam berbagi keluh kesah tentang perkuliahan serta senantiasa memberikan doa dan dukungan bagi penulis menyelesaikan tugas akhir ini. Kepada seluruh keluarga yang senantiasa berikan doa dan dukungan bagi penulis selama menjalani pendidikan.



Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing utama dan Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc** selaku pembimbing pertama penulis atas kesediaan, kesabaran, dan kesetiiaannya untuk membimbing dan membagi ilmunya kepada penulis serta senantiasa mengarahkan, mengingatkan dan menasihati sehingga skripsi ini dapat terselesaikan
2. Bapak **Drs. Muhammad Zakir, M.Si** selaku ketua penguji, Bapak **Dr. Nurdin, S.Si., M.Si** selaku sekretaris penguji, dan Bapak **Dr. Diaraya, M.Ak** selaku anggota tim penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
3. Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si, M.Si** selaku penasehat akademik hingga semester tujuh dan Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si** juga selaku penasehat akademik yang telah memberikan nasehat dan dukungan selama penulis menjalani pendidikan.
4. Bapak/Ibu **Dosen pengajar Jurusan Matematika** yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika. Serta **Pak Nasir, Pak Said, Pak Iswan** dan **Kak Ina** selaku staf Jurusan Matematika atas bantuannya dalam pengurusan akademik selama ini.
5. Ibu **Rektor Universitas Hasanuddin** beserta jajarannya, Bapak **Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** beserta jajarannya dan semua pihak birokrasi atas kemudahan yang diberikan, baik dalam bidang akademik maupun bidang kemahasiswaan.
6. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**, selaku Ketua Departemen Matematika, Bapak **Dr. Amran, S.Si., M.Si**, selaku Sekretaris Departemen Matematika yang telah memberikan banyak bantuan selama penulis menjalani pendidikan dan kepada segenap jajaran Pegawai Akademik Departemen Matematika.

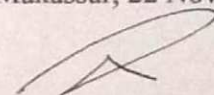
bat terdekat penulis **Srimul, Afni, Ainun, Indah, Arni, Dian, Eka, es, Mira, Ayu, Ida, Amy** yang selalu memberi bantuan, dukungan, perhatian, waktu, dan selalu menjadi tempat keluh kesah penulis.



8. Teman-teman satu bimbingan tugas akhir **Ainun, Afni, Mariani, Arni, Agnes, Wardiman, Faldy** atas bantuan, dukungan dan semangatnya dalam mengerjakan tugas akhir ini.
9. Teman-teman prodi Matematika 2014 terkhusus kepada **Meli, Nikita, Muayyadah, Nunu, Evi, Fira, Tami, Selvi, Nasrullah, Tri, Jeriko** dan **Rusdi** yang menjadi ketua kelas tetap Math'14 serta teman-teman lainnya yang tidak dapat saya tuliskan semuanya. Terima kasih untuk dukungan dan waktunya saat berjuang sama-sama di dunia perkuliahan.
10. Teman-teman **Acceleneun** (Akselerasi SMAN 3 Sengkang, Kab Wajo) atas semangat dan dukungannya untuk menyelesaikan tugas akhir.
11. Teman-teman PKM (Program Kreativitas Mahasiswa) **Meli, Rusdi, Muchlas, Andika** atas kerja samanya saat itu berjuang membagi waktu antara kuliah dan penelitian.
12. Seluruh teman-teman KKN UNHAS GEL.96 Kec. Polongbangkeng Selatan, Kab. Takalar, terkhusus kepada teman posko Kelurahan Rajaya: **Melda, Dewi, Andri, Fitrah** yang telah menjadi teman dan keluarga baru. Terima kasih atas waktu singkat dan pengalaman yang bermakna. Semoga kedepannya silaturahmi yang telah dibangun bersama tetap terjalin dengan baik.
13. Teman-teman seperjuangan Statistika dan Ilmu Komputer 2014.
14. Teman-teman MIPA 2014.
15. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga segala bantuan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat imbalan yang setimpal dari **Allah SWT**. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membutuhkan. *Amin Yaa Rabbal Alamin.*

Makassar, 22 November 2018



Andi Utari Samsir



ABSTRAK

Pengangguran merupakan masalah ketenagakerjaan yang cukup serius. Hal ini menjadi salah satu masalah yang sering dihadapi oleh negara berkembang seperti Indonesia. Masalah ini tidak lepas dari peran pemerintah Indonesia dalam mengeluarkan kebijakan. Pada penelitian ini, kebijakan yang dikeluarkan pemerintah dimodelkan ke dalam model kontrol untuk mempelajari kestabilan dan bentuk strategi kontrol yang efektif dalam mengurangi jumlah pengangguran. Model yang dibangun yaitu dalam bentuk sistem persamaan diferensial dengan faktor kontrol melalui penyediaan pekerjaan bagi pengangguran dan penciptaan lowongan kerja baru. Hasil analisa menunjukkan terdapat paling banyak lima titik kesetimbangan yang positif. Hasil analisis kestabilan diperoleh dari kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin pada model kontrol maka secara analitik dapat diperoleh dua bentuk kontrol yang optimal dari kebijakan pemerintah dalam menyediakan pekerjaan bagi pengangguran dan kebijakan pemerintah dalam menciptakan lowongan kerja baru. Simulasi numerik dari sistem optimal dilakukan dengan melalui metode *forward-backward Runge Kutta*. Hasil yang diperoleh menunjukkan keefektifan dari kedua jenis kontrol saat diterapkan sekaligus dalam mengurangi jumlah pengangguran.

Kata kunci : *Pengangguran, Kebijakan Pemerintah, Kontrol Optimal, Titik Kesetimbangan, Kestabilan, Prinsip Minimum Pontryagin.*



ABSTRACT

Unemployment is a serious labor problem. This has become one of the problems often faced by developing countries such as Indonesia. This problem cannot be separated from the role of the Indonesian government in issuing policies. In this research, the policies issued by the government are modeled into the control model to study the stability and form of effective control strategies in reducing the number of unemployed. The model built is in the form of a system of differential equations with control factors through providing employment to unemployment and creation of new vacancies. The result of the analysis shows there are at most five positif equilibrium point. The results of the stability analysis is obtained from Routh-Hurwitz stability criterion. By applying the Pontryagin Minimum Principle to the control model, it can be obtained analytically two forms of optimal control of government policy in providing employment for unemployment and government policies in creation of new vacancies. The model has been solved numerically by using *forward-backward Runge Kutta* method. The results obtained show the effectiveness of both types of controls when applied at some time in reducing the number of unemployment.

Keywords : *Unemployment, Government Policy, Optimal Control, Equilibrium Points, Stability, Pontryagin's Minimum Principle*



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	ii
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN	iii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	iv
HALAMAN PENGESAHAN	v
PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
ABSTRAK	x
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR TABEL.....	xiv
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	6
2.1 Pengangguran	6
2.2 Migrasi.....	7
2.3 Persamaan Diferensial Biasa	7
2.4 Titik Keseimbangan Sistem.....	8
2.5 Aturan Tanda Descartes'	8
2.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan	9
2.7 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	11
Masalah Kontrol Optimal	12
Metode Forward-Backward Runge Kutta.....	18
Metode Steepest Descent.....	19



BAB III MODEL MATEMATIKA PENGARUH MIGRASI	
TERHADAP PERUBAHAN JUMLAH PENGANGGURAN	21
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	25
4.1 Formulasi Model Kontrol Optimal	25
4.2 Titik Keseimbangan Sistem.....	26
4.3 Linearisasi dan Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	30
4.4 Simulasi Numerik Sistem	36
4.5 Sensitivitas Parameter m_1	38
4.6 Penyelesaian Kontrol Optimal.....	41
4.7 Simulasi Numerik Kontrol Optimal	43
4.8 Sensitivitas Parameter m_1	49
4.9 Perbandingan Solusi Sistem dengan dan tanpa Kontrol Optimal.....	51
BAB V PENUTUP	54
5.1. Kesimpulan	54
5.2. Saran	55
DAFTAR PUSTAKA	56
LAMPIRAN.....	58



DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Definisi dari Parameter dan Variabel Model.....	24
Tabel 4.1 Kemungkinan jumlah akar positif V dengan menggunakan aturan tanda Descartes'	31
Tabel 4.2 Nilai Parameter untuk Simulasi Model	36
Tabel 4.3 Perbedaan jumlah pengangguran, pekerja non migran dan pekerja migran dengan dan tanpa kontrol dengan nilai m_1 yang berbeda ..	50



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram kompartemen model pengaruh migrasi terhadap jumlah perubahan pengangguran.....	22
Gambar 4.1	Grafik laju perubahan populasi pengangguran, pekerja migran, pekerja non migran dan lowongan kerja dengan kontrol konstan	37
Gambar 4.2	Hubungan antara pekerja migran dan pengangguran	38
Gambar 4.3	Pengaruh laju pertambahan jumlah pekerja migran terhadap populasi pengangguran	39
Gambar 4.4	Pengaruh laju pertambahan jumlah pekerja migran terhadap populasi pekerja non migran	40
Gambar 4.5	Pengaruh laju pertambahan jumlah pekerja migran dengan populasi pekerja migran	40
Gambar 4.6	Grafik perubahan jumlah pengangguran sebelum dan sesudah dikontrol.....	45
Gambar 4.7	Grafik perubahan jumlah pekerja non migran sebelum dan sesudah dikontrol.....	46
Gambar 4.8	Grafik perubahan jumlah lowongan kerja sebelum dan sesudah dikontrol.....	47
Gambar 4.9	Grafik perubahan jumlah pekerja migran sebelum dan sesudah dikontrol.....	47
Gambar 4.10	Grafik perbandingan fungsi kontrol optimal $w_1^*(t)$ dan $w_2^*(t)$...	48
Gambar 4.11	Grafik perubahan jumlah pengangguran dengan kontrol konstan, kontrol optimal, dan tanpa kontrol	51
Gambar 4.12	Grafik perubahan jumlah pekerja non migran dengan kontrol konstan, kontrol optimal, dan tanpa kontrol	52
Gambar 4.13	Grafik perubahan jumlah lowongan kerja dengan kontrol konstan, kontrol optimal, dan tanpa kontrol	52
4.14	Grafik perubahan jumlah pekerja migran dengan kontrol konstan, kontrol optimal, dan tanpa kontrol.....	53



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Mendapatkan titik kesetimbangan V pada Persamaan (4.14).....	58
Lampiran 2 Syarat Kestabilan Kriteria Routh-Hurwitz untuk $b_3 > 0$	59
Lampiran 3 Syarat Kestabilan Kriteria Routh-Hurwitz untuk $b_4 > 0$	61
Lampiran 4 Syarat Kestabilan Kriteria Routh-Hurwitz untuk $b_1 b_2 > b_3$	63
Lampiran 5 Syarat Kestabilan Kriteria Routh-Hurwitz untuk $b_1 b_2 b_3 > b_3^2 + b_1^2 b_4$	66
Lampiran 6 Simulasi numerik model dengan kontrol konstan	74
Lampiran 7 Simulasi numerik model dengan kontrol optimal dan tanpa kontrol	75
Lampiran 8 Simulasi numerik model dengan kontrol konstan, kontrol optimal dan tanpa kontrol	81



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematika merupakan suatu pendekatan matematis dalam menyelesaikan berbagai fenomena di kehidupan nyata. Fenomena yang ada ditransformasikan dalam bentuk model matematika. Model matematika merupakan representasi permasalahan di dunia nyata ke dalam persamaan matematika yang dibuat dengan asumsi-asumsi tertentu. Kesesuaian model terhadap fenomena tersebut bergantung dari formulasi persamaan matematika dalam mendeskripsikan fenomena yang sedang dikaji. Salah satu fenomena yang dapat dimodelkan secara matematika adalah pengangguran.

Pengangguran adalah semua orang yang termasuk dalam usia kerja yang tidak bekerja, bersedia menerima pekerjaan dan sedang mencari pekerjaan (International Labour Office, 1990). Pengangguran merupakan masalah ketenagakerjaan yang cukup serius (Utama, 2014). Masalah ini mempengaruhi standar kehidupan masyarakat dan status sosial ekonomi suatu negara. Tingginya tingkat pengangguran juga dapat menimbulkan ketidakstabilan sosial dan politik. Umumnya pengangguran disebabkan oleh minimnya penyerapan tenaga kerja. Hal ini menjadi salah satu masalah yang sering dihadapi oleh negara berkembang seperti Indonesia (Nurjanah, 2017).

Berdasarkan data Badan Pusat Statistik (BPS) per Februari 2018 menunjukkan jumlah pengangguran terhitung mencapai 5,13 persen yaitu sebanyak 6,18 juta orang dari total angkatan kerja yang mencapai 133,94 juta orang (BPS, 2018). Angka pengangguran tersebut mengalami penurunan sebesar 140 ribu orang dalam setahun terakhir dengan jumlah angkatan kerja yang meningkat 2,39 juta orang dibandingkan pada Februari 2017. Meskipun mengalami penurunan, pengangguran harus segera diatasi karena akan berdampak

penurunnya tingkat kesejahteraan masyarakat.

Masalah pengangguran di Indonesia merupakan bagian dari masalah ekonomi negara karena berkaitan dengan penyerapan tenaga kerja dan



ketersediaan lapangan kerja. Masalah ini tidak lepas dari peran pemerintah dalam mengeluarkan kebijakan. Kebijakan yang dikeluarkan pemerintah sangat penting dalam penciptaan lapangan kerja. Kenaikan jumlah lapangan kerja dapat menekan angka pengangguran dan meningkatkan kemakmuran masyarakat. Selain itu, juga akan menambah pendapatan nasional dan meningkatkan pendapatan perkapita.

Kebijakan pemerintah ditetapkan dengan tujuan meminimumkan jumlah pengangguran. Kebijakan pemerintah tersebut menarik untuk dikaji melalui pendekatan model matematika. Beberapa peneliti telah mengkaji secara matematis mengenai pemodelan terhadap pengangguran. Seperti yang dikaji oleh Munoli dan Gani (2015). Dalam penelitian tersebut dideskripsikan model kontrol dengan teori kontrol optimal mengenai kebijakan yang optimal untuk model pengangguran. Dalam penelitian tersebut diberikan dua kebijakan yaitu kebijakan pemerintah untuk menyediakan pekerjaan bagi pengangguran dan kebijakan pemerintah untuk menciptakan lowongan kerja baru. Penelitian tersebut terbatas pada tiga kompartemen, yaitu pengangguran, pekerja dan lowongan kerja baru. Selanjutnya penelitian yang ditulis oleh Pathan dan Bhathawala (2016) menjelaskan mengenai analisis model matematika untuk pengangguran dengan mempertimbangkan persaingan pekerjaan antara pengangguran dan imigran. Dalam kajian tersebut diasumsikan bahwa pemerintah dan perusahaan swasta berupaya untuk menyediakan lowongan kerja. Selain itu, penelitian yang ditulis oleh Munoli dan Gani (2017) membahas mengenai model matematika untuk pengangguran dan analisis kontrol optimalnya. Pada analisis kontrol optimalnya diberikan kebijakan pemerintah yaitu penyediaan pekerjaan sementara dan penyediaan pekerjaan yang reguler untuk pengangguran dan penciptaan lapangan kerja baru yang bersifat sementara dan yang bersifat reguler.

Dalam skripsi ini, penelitian yang dilakukan oleh Munoli dan Gani (2015) dikembangkan dengan menambahkan faktor migrasi yang dimuat pada penelitian Pathan dan Bhathawala (2016) dan belum dikerjakan oleh Munoli dan Gani. Penelitian ini akan meninjau salah satu faktor terjadinya pengangguran migrasi. Seseorang dikatakan melakukan migrasi apabila ia berpindah tinggal secara permanen atau dalam jangka waktu tertentu atau pindah dari



satu unit geografis ke unit geografis lainnya (Rusli, 1995). Migrasi merupakan faktor dasar yang mempengaruhi pertumbuhan penduduk selain kelahiran dan kematian. Hal ini tentu saja akan berdampak pada penumpukan angkatan kerja yang dapat berakibat pada peningkatan jumlah pengangguran. Penelitian ini dituangkan ke dalam bentuk skripsi yang berjudul:

***“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Pengaruh
Migrasi terhadap Perubahan Jumlah Pengangguran”***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya maka rumusan masalah yang diperoleh adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengembangkan model pengangguran dengan menambahkan kompartemen pekerja migran?
2. Bagaimana menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dari model pengangguran dengan kontrol konstan?
3. Bagaimana bentuk kontrol optimal dari kebijakan pemerintah untuk menyediakan pekerjaan bagi pengangguran dan kebijakan pemerintah untuk menciptakan lowongan kerja baru?
4. Bagaimana perbandingan simulasi numerik dari model pengangguran tanpa kontrol dan dengan kontrol?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, model matematika pengangguran hanya diamati pada empat kompartemen, yaitu kompartemen pengangguran (U), kompartemen pekerja non migran (E), kompartemen lowongan kerja (V) dan kompartemen pekerja migran (M). Kontrol yang diberikan yaitu kebijakan pemerintah dalam menyediakan pekerjaan bagi pengangguran dan kebijakan pemerintah dalam menciptakan lowongan kerja baru.



1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian adalah sebagai berikut :

1. Mengembangkan model pengangguran dengan menambahkan kompartemen pekerja migran.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dari model pengangguran dengan kontrol konstan.
3. Mendapatkan bentuk kontrol optimal dari kebijakan pemerintah untuk menyediakan pekerjaan bagi pengangguran dan kebijakan pemerintah untuk menciptakan lowongan kerja baru.
4. Menganalisis perbandingan simulasi numerik model pengangguran tanpa kontrol dan dengan kontrol.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Menjadi salah satu bahan kajian pustaka tentang pemodelan matematika terkait pengangguran.
2. Memberikan gambaran kepada peneliti lain yang ingin mengembangkan penelitian mengenai pengangguran.

1.6 Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini membahas mengenai pengangguran, migrasi, persamaan diferensial, titik kesetimbangan sistem, aturan tanda Descartes', linearisasi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem, kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, masalah kontrol optimal, prinsip minimum Pontryagin, metode *Forward-Backward* Runge Kutta dan metode *Steepest Descent*.



BAB III MODEL MATEMATIKA PENGARUH MIGRASI TERHADAP PERUBAHAN JUMLAH PENGANGGURAN

Bab ini membahas mengenai pengembangan model matematika perubahan jumlah pengangguran

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai formulasi model kontrol optimal, penentuan titik kesetimbangan sistem, linearisasi dan analisis kestabilan solusi kesetimbangan sistem, penyelesaian kontrol optimal, simulasi numerik sistem

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang uraian singkat dari hasil penelitian yang telah dilakukan serta saran untuk penelitian yang lebih lanjut.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengangguran

Pengangguran merupakan masalah yang tidak hanya dihadapi oleh negara berkembang tetapi juga dialami oleh negara-negara yang sudah maju. Secara umum, pengangguran didefinisikan sebagai suatu keadaan dimana seseorang yang tergolong dalam kategori angkatan kerja tidak memiliki pekerjaan dan secara aktif sedang mencari pekerjaan (Nanga, 2001). Terjadinya pengangguran disebabkan karena adanya kelebihan penawaran tenaga kerja dibandingkan dengan permintaan tenaga kerja yang ada dipasar kerja.

Masalah ketenagakerjaan memang sangat luas dan kompleks. Sebelum terjadinya krisis ekonomi, Indonesia sudah tergolong negara bermasalah dengan ketenagakerjaan karena tingginya pertumbuhan penduduk. Terbatasnya lapangan kerja yang tersedia tidak seimbang dengan peningkatan jumlah angkatan kerja sehingga berdampak pada tingginya jumlah pengangguran (Harlen, 2015). Pengangguran seringkali menjadi masalah dalam perekonomian, seperti produktivitas dan pendapatan masyarakat akan berkurang, sehingga menyebabkan timbulnya kemiskinan dan masalah sosial lainnya. Tingkat pengangguran yang terlalu tinggi juga dapat menyebabkan kekacauan politik, keamanan dan sosial sehingga mengganggu pertumbuhan dan pembangunan ekonomi (Adi, 2016).

Pengangguran merupakan masalah penting yang harus segera diatasi karena sangat berpengaruh terhadap perkembangan suatu negara. Pemerintah harus berperan dalam mengatasi masalah pengangguran. Upaya pemerintah dalam mengatasi pengangguran dapat membantu mengurangi permasalahan pengangguran dengan mengeluarkan berbagai kebijakan yang dapat meminimalisir terjadinya pengangguran.



2.2 Migrasi

Migrasi merupakan salah satu komponen demografi yang mempengaruhi dinamika penduduk. Munir (2007) mendefinisikan migrasi sebagai perpindahan penduduk dengan tujuan menetap dari suatu tempat ketempat lain melampaui batas politik, negara administrasi atau batas bagian dalam suatu negara.

Fenomena migrasi sangat sering terjadi di beberapa Negara berkembang, dimana banyak tenaga kerja yang berasal dari daerah pedesaan mengalir ke daerah perkotaan. Proses migrasi yang berlangsung dalam suatu Negara dianggap sebagai proses alamiah yang akan menyalurkan tenaga kerja di daerah ke sector industri modern di kota yang daya serapnya lebih tinggi, walaupun pada kenyataannya arus perpindahan tenaga kerja dari pedesaan ke perkotaan tersebut telah melampaui tingkat penciptaan lapangan kerja sehingga migrasi yang terjadi jauh melampaui daya serap sektor industri dan jasa di daerah perkotaan (Hasyasya,2012).

Lapangan pekerjaan yang tersedia di suatu daerah memberikan harapan bagi para migran untuk memperoleh pekerjaan baru yang lebih baik dari sebelumnya. Migran yang masuk terlalu banyak pada suatu daerah akan menyebabkan peningkatan penduduk di daerah tersebut dan jika peningkatan penduduk ini tidak seimbang dengan peluang kerja yang ada maka tingkat pengangguran akan bertambah di daerah tersebut (Harlen, 2015).

2.3 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas (Ross, 2004). Bentuk umum persamaan diferensial biasa dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa hubungan antara variabel bebas x variabel beserta turunannya. Sebuah persamaan diferensial disebut berorde n jika turunan tertinggi yang terlibat adalah n (Kartono, 2002).



Misalkan diberikan persamaan diferensial,

$$\frac{dy}{dx} = 2y. \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) dapat dituliskan dalam bentuk $y' - 2y = 0$. Persamaan tersebut dikatakan persamaan diferensial biasa orde satu yang memuat variabel bebas x dan variabel tak bebas y .

2.4 Titik Keseimbangan Sistem

Titik keseimbangan merupakan suatu keadaan dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Suatu titik $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik keseimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, untuk $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jika memenuhi (Wiggins, 1990)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

dengan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Atau dengan kata lain, jika $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ merupakan titik keseimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, maka

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

2.5 Aturan Tanda Descartes'

Misalkan diberikan persamaan karakteristik

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.3)$$

dengan koefisien $a_i, i = 0, 1, \dots, n$. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $a_n > 0$. Misalkan N adalah banyaknya perubahan tanda pada barisan koefisien $\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_0\}$, dengan mengabaikan semua yang nol. Aturan tanda Descartes mengatakan bahwa terdapat paling banyak N buah akar dari Persamaan (2.3) yang bernilai real dan positif, lebih lanjut terdapat N atau $N - 2$, atau $N - 4, \dots$ akar

negatif. Dengan memisalkan kembali $\omega = -\lambda$ dan menerapkan kembali persamaan tersebut, maka akan diperoleh informasi mengenai akar real negatif yang



Sebagai contoh, tinjau persamaan

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_1\lambda + a_0 = 0, \quad a_i > 0 \quad \text{untuk } i = 0,1,2. \quad (2.4)$$

Dari Persamaan (2.4), terdapat dua perubahan tanda pada barisan koefisien, yaitu dari a_2 yang bertanda positif ke a_1 yang bertanda negatif, kemudian dari a_1 yang bertanda negatif ke a_0 yang bertanda positif. Jadi, terdapat dua atau nol akar real positif dari Persamaan (2.4).

Jika dimisalkan $\lambda = -\omega$, maka Persamaan (2.4) menjadi

$$-\omega^3 + a_2\omega^2 + a_1\omega + a_0 = 0,$$

yang memiliki satu perubahan tanda pada barisan koefisien. Jadi, terdapat paling banyak satu akar ω yang real positif. Ini berarti, terdapat tepat satu akar λ yang real negatif dari Persamaan (2.4) (Murray, 2002).

2.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan

Linearisasi adalah proses aproksimasi persamaan diferensial nonlinear dengan persamaan diferensial linear. Proses ini dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar titik keseimbangan sistem. Misalkan diberikan sistem :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2). \quad (2.5)$$

Jika sistem Persamaan diferensial (2.5) mempunyai titik keseimbangan (x_1^*, x_2^*) dan $\mu_i = x_i - x_i^*$, maka ekspansi deret Taylor untuk fungsi dua peubah di sekitar titik (x_1^*, x_2^*) dituliskan sebagai berikut:

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^*, x_2^*) + \mu_1 \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\mu_1^2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^2} + \frac{\mu_1 \mu_2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \quad (2.6)$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1^*, x_2^*) + \mu_1 \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\mu_1^2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^2} + \frac{\mu_1 \mu_2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \quad (2.7)$$

in (2.6) dan (2.7) dapat dituliskan dalam bentuk,

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^*, x_2^*) + \mu_1 \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + g_1(\mu_1, \mu_2)$$



$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1^*, x_2^*) + \mu_1 \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + g_2(\mu_1, \mu_2)$$

dengan

$$g_1(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1^2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^2} + \frac{\mu_1 \mu_2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots$$

$$g_2(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1^2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^2} + \frac{\mu_1 \mu_2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots$$

Karena (x_1^*, x_2^*) merupakan titik kesetimbangan, maka $f_i(x_1^*, x_2^*) = 0$, untuk setiap $i = 1, 2$. Jika dimisalkan

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= \frac{d\mu_1}{dt} = \frac{d(x_1 - x_1^*)}{dt} \\ \dot{\mu}_2 &= \frac{d\mu_2}{dt} = \frac{d(x_2 - x_2^*)}{dt}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

maka Persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mu_1}{dt} \\ \frac{d\mu_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\mu_1, \mu_2) \\ g_2(\mu_1, \mu_2) \end{bmatrix}$$

Karena x_1 dianggap cukup dekat dengan x_1^* , begitupun dengan x_2 dan x_2^* , maka nilai μ_1 dan μ_2 sangat kecil. Hal ini menyebabkan suku-suku nonlinear dari Persamaan (2.6) dan (2.7) yaitu $g_i(\mu_1, \mu_2)$ yang memuat $\mu_i^2, \mu_i^3, \dots$, untuk setiap $i = 1, 2$ dapat diabaikan. Sehingga diperoleh sistem linear sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mu_1}{dt} \\ \frac{d\mu_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Dalam notasi vektor Persamaan (2.9) dapat dituliskan menjadi:

$$\dot{\mu} = A\mu \quad (2.10)$$

dan A disebut matriks Jacobi dari f pada (x_1^*, x_2^*) , yaitu (Nayfeh, 1995):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$



Kestabilan titik kesetimbangan (x_1^*, x_2^*) dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu λ yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dengan I adalah suatu matrik identitas.

Misalkan λ merupakan nilai eigen dari matriks Jacobi A , maka secara umum kestabilan titik kesetimbangan berlaku sebagai berikut:

1. Stabil, jika memenuhi kriteria berikut :

- Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i \leq 0$) untuk setiap i .
- Setiap komponen real nilai eigen kompleks adalah tidak positif, yaitu $Re(\lambda_i \leq 0)$ untuk setiap i , dengan $Re(\lambda_i)$ menyatakan bagian real dari nilai eigen λ_i .

2. Tidak stabil, jika memenuhi kriteria berikut :

- Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i > 0$) untuk setiap i .
- Setiap komponen real nilai eigen kompleks adalah tidak positif, yaitu $Re(\lambda_i > 0)$ untuk setiap i , dengan $Re(\lambda_i)$ menyatakan bagian real dari nilai eigen λ_i .

2.7 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Tinjau Persamaan (2.3), dari persamaan tersebut dapat dibentuk matriks M_n yang entri-entrinya merupakan koefisien dari Persamaan (2.3) dengan M_n adalah matriks Hurwitz yang didefinisikan sebagai berikut :

$$M_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$



Akar-akar Persamaan karakteristik (2.3) akan negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan dari matriks Hurwitz bernilai positif ($\det(H_n) > 0$) (Merkin, 1997).

Sebagai contoh, diberikan persamaan kubik

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (2.11)$$

dari Persamaan (2.11) maka dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$M_1 = (a_1), \quad M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar Persamaan (2.11) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $\det(M_1) > 0$, $\det(M_2) > 0$, dan $\det(M_3) > 0$. Dengan demikian diperoleh kondisi sebagai berikut:

$$a_1 > 0 \text{ dan } (a_1a_2 - a_3) > 0.$$

2.8 Masalah Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal adalah masalah pencarian fungsi kontrol $u(t)$ yang membawa sistem dari *state* awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 ke *state* akhir $x(t_f)$ pada waktu akhir t_f , sedemikian sehingga memberikan nilai maksimum atau nilai minimum untuk suatu fungsi tujuan (fungsi objektif) (Tu, 1983).

2.8.1 Persamaan State, Fungsi Kontrol dan Fungsi Tujuan

State suatu sistem kontinu pada waktu t dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial yaitu

$$\dot{x} = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.12)$$

dengan nilai awal $x(t_0) = x_0$.

Sistem tersebut bergantung pada fungsi $u(t)$ yang merupakan fungsi kontrol dari sistem (2.12). Fungsi kontrol $u(t)$ yaitu fungsi yang mempengaruhi suatu *state* yang dapat dikendalikan, dengan $u(t) \in U$ untuk setiap $t \in [0, T]$

$U = \{u(t): 0 \leq u \leq 1\}$ (Tu, 1983). U merupakan himpunan dari semua kontrol $u(t)$ yang diperkenankan. Jika nilai $u(t)$ berubah maka solusi dari (2.12) juga akan berubah.



Masalah kontrol optimal paling dasar adalah mencari fungsi kontrol $u(t)$ dan solusi sistem yang bersesuaian dengan (2.12) sehingga fungsi tujuan berikut dapat tercapai, yaitu

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt, \quad (2.13)$$

dengan kendala $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t))$. Diasumsikan bahwa kontrol optimal dari masalah optimal (2.13) ada yaitu u^* dengan $\mathbf{x}^*$ adalah variabel *state* optimal yang memenuhi Persamaan (2.12).

Penentuan syarat perlu keoptimalan fungsi tujuan (2.13) dapat dilakukan dengan cara menentukan fungsi adjoint. (Lenhart & Workman, 2007). Misalkan fungsi tujuan dalam persamaan (2.13) dituliskan sebagai berikut:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt, \quad (2.14)$$

dengan $\mathbf{x}$ adalah variabel *state*. Misalkan $J(u^*) \leq J(u) < \infty$ untuk semua kontrol u . Misalkan pula terdapat fungsi variasi kontinu $h(t)$ dan $\varepsilon \in R$ sedemikian sehingga

$$v(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t), \quad (2.15)$$

merupakan fungsi kontrol yang lain. Misalkan $\mathbf{y}$ merupakan variabel *state* yang bersesuaian dengan v yang memenuhi,

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t)). \quad (2.16)$$

dengan nilai awal yang sama yaitu $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Jadi fungsi tujuan dalam Persamaan (2.14) dapat dievaluasi di v , sehingga

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) dt. \quad (2.17)$$

Misalkan $\lambda(t)$ merupakan fungsi adjoint yang akan ditentukan. Fungsi tersebut merupakan fungsi yang terturunkan dalam interval $[t_0, t_f]$. Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus diperoleh,

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda(t) \mathbf{y}(t)] dt = \lambda(t_f) \mathbf{y}(t_f) - \lambda(t_0) \mathbf{y}(t_0),$$



$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda(t) \mathbf{y}(t)] dt - [\lambda(t_f) \mathbf{y}(t_f) - \lambda(t_0) \mathbf{y}(t_0)] = 0. \quad (2.18)$$

Jika Persamaan (2.18) dijumlahkan ke dalam Persamaan (2.17) maka diperoleh

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda(t) \mathbf{y}(t)) \right] dt \\ &\quad + [\lambda(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \lambda(t_f) \mathbf{y}(t_f)], \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \dot{\lambda}(t) \mathbf{y}(t) + \lambda(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t))] dt \\ &\quad + [\lambda(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \lambda(t_f) \mathbf{y}(t_f)], \end{aligned}$$

dengan $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t))$. Karena nilai minimum dari J terhadap kontrol u terjadi pada u^* , turunan dari $J(v)$ terhadap ε (dalam arah h) adalah nol, yaitu:

$$\left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(v) - J(u^*)}{\varepsilon} = 0.$$

Dengan menggunakan teorema *Lebesgue Dominated Convergence* (Royden, 1968), bentuk limit (begitu pula dengan turunan) dapat dipindahkan ke dalam bentuk integral, sehingga diperoleh turunan dari $J(v)$ terhadap ε , yaitu

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \dot{\lambda}(t) \mathbf{y}(t) + \lambda(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t))] dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda(t_0) \mathbf{y}(t_0) \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda(t_f) \mathbf{y}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \end{aligned}$$

Dengan menerapkan aturan rantai terhadap fungsi f dan $\mathbf{g}$, diperoleh

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_f} \left[f_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \dot{\lambda}(t) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + \lambda(t) \left(\mathbf{g}_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + \mathbf{g}_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \right] dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad - \lambda(t_f) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

dengan $f_x, f_u, \mathbf{g}_x$, dan $\mathbf{g}_u$ bergantung pada $t, \mathbf{x}^*(t)$, dan $u^*(t)$. Jika Persamaan (2.19) disederhanakan maka diperoleh:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_f} \left[(f_x + \lambda(t) \mathbf{g}_x + \dot{\lambda}(t)) \frac{d\mathbf{y}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda(t) \mathbf{g}_u) h(t) \right] dt \\ &\quad \frac{d\mathbf{y}}{d\varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$



Akan dipilih fungsi adjoint untuk menyederhanakan Persamaan (2.20) dengan menghilangkan $\left. \frac{dy}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$. Dengan demikian dipilih fungsi adjoint $\lambda(t)$ yang memenuhi

$$\dot{\lambda}(t) = -[f_x(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) \mathbf{g}_x(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))], \quad (2.21)$$

dan syarat batas $\lambda(t_f) = \mathbf{0}$. Syarat batas ini dikenal sebagai syarat *transversality*. Persamaan (2.20) berubah menjadi

$$\int_{t_0}^{t_f} [f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))] h(t) dt.$$

Selanjutnya, karena Persamaan (2.20) berlaku untuk sembarang fungsi variasi $h(t)$ yang kontinu, maka $h(t)$ dapat dipilih fungsi,

$$h(t) = f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)).$$

Akibatnya Persamaan (2.20) menjadi,

$$\int_{t_0}^{t_f} [f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))]^2 dt = 0.$$

Berdasarkan persamaan tersebut diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi optimal, yaitu

$$f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*, u^*(t)) = 0, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_f. \quad (2.22)$$

Jadi Persamaan (2.21) dan (2.22) yang diperoleh tersebut merupakan syarat perlu keoptimalan fungsi tujuan (2.13) (Lenhart & Workman, 2007).

2.8.2 Prinsip Minimum Pontryagin

Misalkan diberikan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt, \quad (2.23)$$

dengan kendala

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)). \quad (2.24)$$

Diasumsikan bahwa $u(t)$ merupakan fungsi terhadap waktu sehingga $f(t, \mathbf{x}, u)$ juga merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi dalam $[t_0, t_f]$. Pemilihan fungsi f bergantung pada penekanan dari sistem yang



akan dioptimalkan. Dalam sistem kontrol optimal, tujuan pengendalian adalah untuk mengoptimalkan fungsi tujuan (2.23).

Pencarian fungsi kontrol $u^*(t)$ yang mengoptimalkan J pada prinsipnya menggunakan Metode Pengali Lagrange. Sistem (2.24) menyatakan suatu fungsi kendala yang bergantung pada $t \in [t_0, t_f]$, sehingga diperlukan pengali Lagrange pada masing-masing waktu tersebut karena setiap kendala mempunyai satu pengali Lagrange. Misalkan pengali Lagrange disimbolkan dengan $\lambda(t) \in R^n$ maka bentuk perluasan dari J yang menyertakan kendala (2.24) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda(t)(\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u) - \dot{\mathbf{x}}(t))] dt. \quad (2.25)$$

Misalkan didefinisikan fungsi Hamiltonian sebagai berikut:

$$H(t, \mathbf{x}, u, \lambda) = f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda(t)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u). \quad (2.26)$$

Dengan menggunakan fungsi Hamiltonian tersebut, Persamaan (2.25) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [H(t, \mathbf{x}, u, \lambda) - \dot{\lambda}(t)\mathbf{x}(t)] dt. \quad (2.27)$$

Teorema 1 (Lenhart & Workman, 2007) *Jika $u^*(t)$ dan $\mathbf{x}^*(t)$ merupakan kontrol optimal dan state optimal untuk masalah berikut:*

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt, \quad (2.28)$$

terhadap $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t))$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, maka terdapat variabel adjoint $\lambda(t)$ yang terturunkan sedemikian sehingga

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \leq H(t, \mathbf{x}^*(t), u(t), \lambda(t)),$$

untuk semua fungsi kontrol u pada setiap t , dengan fungsi Hamiltonian

$$H = f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \lambda(t)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t)),$$

dan

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H(t, \mathbf{x}(t), u^*(t), \lambda(t)), \quad \lambda(t_f) = \mathbf{0}.$$

ngkas, prinsip minimum Pontryagin dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$



Fungsional Tujuan

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt$$

Fungsi Hamiltonian

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda(t)g(t, x, u)$$

Pengontrol Optimum

- **Persamaan state** $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u)$ (2.29)

- **Persamaan costate** $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ (2.30)

- **Syarat Stasioner** $\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U$ (2.31)

- **Syarat Transversality** $\lambda(t_f) = 0$

Contoh 2.1 (Lenhart & Workman, 2007)

Misalkan diberikan suatu fungsi tujuan :

$$\min \int_0^1 u(t)^2 dt$$

dengan fungsi kendala $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$ dengan syarat awal $x(0) = 1$. Fungsi

Hamiltonian dari masalah kontrol optimal tersebut adalah

$$H = u^2 + \lambda(x + u).$$

Syarat stasionernya adalah

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0,$$

Sehingga diperoleh $u = -\frac{1}{2}\lambda$.

Persamaan *costatenya* yaitu

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda$$

yang mempunyai solusi $\lambda(t) = ce^{-t}$, dengan c merupakan sebuah konstanta.

Dari syarat *transversalitynya* yaitu $\lambda(1) = 0$, diperoleh

$$ce^{-1} = 0 \text{ atau } c = 0.$$

Sehingga $\lambda = 0$, sehingga diperoleh $u^* = -\frac{1}{2}\lambda = 0$.

Sehingga, untuk persamaan *state* dan syarat awalnya yaitu

$$\dot{x} = x \text{ dengan } x(0) = 1.$$



Jika kedua ruas diselesaikan untuk mendapatkan $x(t)$, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} dx &= dt \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int dt \\ x &= ce^t.\end{aligned}$$

Karena $x(0) = 1$ maka diperoleh

$$ce^0 = 1 \text{ atau } c = 1.$$

Jadi diperoleh u dan x yang optimal, yaitu

$$u^* = 0 \quad \text{dan} \quad x^* = e^t.$$

2.9 Metode *Forward-Backward Runge Kutta*

Masalah optimasi yang diberikan dapat diselesaikan secara numerik menggunakan berbagai metode optimasi. Salah satunya dengan menggunakan metode *Forward Runge Kutta* dan *Backward Runge Kutta*. Secara umum, pendekatan beda maju (*Forward Difference*) diperoleh dengan mengekspansi $(x + \Delta x)$ dalam deret Taylor di sekitar x , diperoleh:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots, \quad (2.32)$$

Jika semua suku-suku yang memuat faktor Δx dan suku-suku lebih tinggi dijumlahkan dan notasi error sebagai $O(\Delta x)$ maka Persamaan (2.32) menjadi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.33)$$

dimana merupakan sebuah pendekatan untuk turunan parsial pertama dari f terhadap x . Sedangkan pendekatan beda mundur (*Backward Difference*) diperoleh dari mengekspansi $(x - \Delta x)$ dalam deret Taylor di sekitar x , diperoleh:

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots, \quad (2.34)$$

Jika semua suku-suku yang memuat faktor Δx dan suku-suku lebih tinggi dijumlahkan dan notasi error sebagai $O(\Delta x)$ maka Persamaan (2.34) menjadi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.35)$$

merupakan sebuah pendekatan untuk turunan parsial pertama dari f terhadap x (Hoffman & Chiang, 2000).



Dalam penyelesaian solusi numerik akan digunakan metode *Forward Runge Kutta*. Pada metode ini, diberikan kondisi awal yaitu pada Persamaan (2.29). Kemudian diberikan *step size* yaitu h dan Persamaan (2.22) yang akan diselesaikan. Pendekatannya melalui $x(t + h)$ dan $x(t)$, sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$x(t + h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.36)$$

dengan

$$k_1 = f(t, x(t)), \quad (2.37)$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(t + h, x(t) + hk_3\right).$$

Sedangkan metode *Backward Runge Kutta* diberikan kondisi akhir yaitu pada Persamaan (2.30). Kemudian diberikan *step size* yaitu h dan Persamaan (2.22) yang akan diselesaikan. Pendekatannya melalui $\lambda(t - h)$ dan $\lambda(t)$, sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$\lambda(t - h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.38)$$

dengan

$$k_1 = f(t, \lambda(t)), \quad (2.39)$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(t + h, \lambda(t) - hk_3\right).$$

(Lenhart & Workman, 2007).



2.10 Metode Steepest Descent

Diberikan suatu fungsi $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ yang mempunyai turunan di $\mathbf{x}_0$. Arah dari metode *Steepest Descent* adalah vektor $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Untuk melihat hal ini, perhatikan fungsi berikut:

$$\varphi(\alpha) = f(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{u}), \quad (2.40)$$

dengan $\mathbf{u}$ adalah vektor satuan, yaitu $\|\mathbf{u}\| = 1$. Dengan menggunakan aturan rantai diperoleh turunan dari $\varphi(t)$, yaitu

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}, \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} u_n, \\ &= \nabla f(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Untuk $\alpha = 0$, diperoleh:

$$\varphi'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cos \theta,$$

dengan θ adalah besar sudut antara $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ dan $\mathbf{u}$. Nilai $\varphi'(0)$ minimum ketika $\theta = 180^\circ$ sehingga diperoleh:

$$\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \text{ dimana } \varphi'(0) = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \quad (2.41)$$

Oleh karena itu, dengan memilih nilai $\mathbf{u}$ pada Persamaan (2.41) fungsi (2.40) dapat diminimumkan. Artinya, terdapat nilai $\alpha > 0$ yang dapat meminimumkan fungsi (2.40), yaitu:

$$\varphi_0(\alpha) = f(\mathbf{x}_0 - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_0)), \quad (2.42)$$

jika α_0 merupakan nilai minimum dari α maka diperoleh

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \alpha_0 \nabla f(\mathbf{x}_0).$$

Dalam metode *Steepest Descent* ini, nilai awal untuk $\mathbf{x}_0$ diberikan. Nilai selanjutnya dihitung melalui iterasi berikut:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.43)$$

dengan $\alpha_k > 0$. Jadi Persamaan (2.42) menjadi :

$$\varphi_k(t) = f(\mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)). \quad (2.44)$$

, 2011).

