BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi spasial merupakan suatu metode yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor yang dipengaruhi oleh faktor spasial atau lokasi geografis. Data spasial tidak dapat diselesaikan menggunakan analisis regresi linear karena pada regresi linear tidak berlaku untuk data yang dipengaruhi oleh faktor lokasi (Safitri dkk., 2022). Selain itu, keberagaman data pada data spasial mengakibatkan sulitnya asumsi linearitas dan homoskedastisitas terpenuhi. Oleh karena itu, apabila asumsi-asumsi tersebut tidak terpenuhi maka akan berdampak pada parameter regresi yang bervariasi secara spasial. Untuk mengantisipasi hal tersebut maka dikenalkan suatu model regresi yang terboboti secara geografis atau dikenal dengan model *Geographically Weighted Regression* (GWR) (Fotheringham dkk, 2002). Model GWR merupakan salah satu bentuk regresi spasial dengan pembobot berdasarkan letak geografis suatu wilayah yang diwakili oleh titik koordinat geografis (Cellmer dkk., 2020).

Model GWR kurang tepat untuk menganalisis data dengan efek spasial dan temporal. Oleh karena itu, dikembangkan metode yang dapat mengakomodasi kedua efek ini, yaitu *Geographically and Temporally Weighted Regression* (GTWR) (Yasin dkk. 2018). Model GTWR menghasilkan parameter yang bersifat lokal untuk setiap lokasi dan waktu, tetapi pada kenyataannya tidak semua variabel prediktor dalam model GTWR berpengaruh secara lokal. Beberapa variabel berpengaruh secara global sedangkan yang lainnya dapat mempertahankan pengaruh lokalnya. Oleh karena itu, model GTWR dikembangkan menjadi model *Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* (MGTWR) (Sumertajaya dkk., 2020). Model MGTWR merupakan kombinasi antara model regresi linier dan GTWR sehingga menghasilkan estimasi parameter yang sebagian bersifat global untuk semua lokasi dan waktu serta sebagian bersifat lokal berdasarkan lokasi dan waktu. Hal ini memberikan hasil yang lebih representatif dan dapat mengurangi risiko *overfitting* pada model.

MGTWR memberikan interpretasi yang akurat dan informatif. Namun, seperti analisis regresi pada umumnya, terkadang ditemukan permasalahan seperti data pencilan. Keberadaan data pencilan dapat menyebabkan estimasi parameter model menjadi bias dan hasil analisis menjadi kurang akurat (Liu dkk., 2017). Oleh karena itu, perlu dilakukan penanganan pencilan, salah satunya dengan menggunakan regresi *robust*. Menurut Prahutama dkk. (2021) regresi *robust* memiliki beberapa metode estimasi, antara lain S-*Estimator*, M-*Estimator*, dan MM-*Estimator*. Setiap metode estimasi memiliki kelebihan dan kekurangannya masing-masing. S-*Estimator* mempunyai nilai *breakdown point* yang tinggi yaitu 0.5, tetapi efisiensinya sangat rendah, M-*Estimator* mempunyai efisiensi yang tinggi, tetapi nilai *breakdown point* 0, dan MM-*Estimator* merupakan gabungan efisiensi tinggi dari M-*Estimator* dengan *breakdown point* tinggi dari S-*Estimator*. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa MM-*Estimator* merupakan metode terbaik berdasarkan kriteria bias dan *mean square error* (MSE) terkecil (Khotimah dkk., 2020). Regresi *robust* yang digunakan untuk mengatasi adanya pencilan pada model MGTWR disebut *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* (RMGTWR).

Penelitian mengenai RMGTWR telah dilakukan oleh Asianingrum dkk. (2020) mengenai pemodelan persentase penduduk miskin di Pulau Jawa tahun 2012-2018 menggunakan RMGTWR dengan M-*Estimator*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model RMGTWR merupakan model yang baik untuk menjelaskan persentase penduduk miskin di Pulau Jawa dan mampu mengurangi pencilan serta memperbaiki tanda pada pengaruh suatu faktor menjadi lebih relevan. Pemodelan deformasi bendungan menunjukkan bahwa model MGTWR meningkatkan akurasi prediksi rata-rata sebesar 57,6% dibandingkan dengan model GTWR (Yang dkk., 2022). Selain itu, MM-*Estimator* telah diterapkan pada kasus tuberkulosis di Sulawesi Selatan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pemodelan dengan *Robust Spatial Durbin Model* dapat memberikan hasil yang lebih baik daripada model *Spatial Durbin Model* (Syam dkk., 2024). Ketiga penelitian tersebut telah berfokus pada bidang ekonomi, lingkungan dan kesehatan, sehingga pada penelitian ini akan dilakukan analisis pada bidang pangan dan gizi berupa analisis pada data Indeks Ketahanan Pangan (IKP) di Provinsi Sulawesi Selatan.

Ketahanan pangan merupakan isu penting yang menjadi perhatian global untuk mencapai tujuan pembangunan yang berkelanjutan. IKP merupakan salah satu indikator yang digunakan untuk mengukur tingkat ketahanan pangan di suatu wilayah (Harvian & Yuhan, 2019). Pemahaman yang menyeluruh mengenai faktor-faktor yang memengaruhi IKP sangat penting untuk mendukung pengambilan keputusan yang tepat dalam merumuskan kebijakan terkait ketahanan pangan. Sulawesi Selatan merupakan salah satu provinsi di Indonesia yang memiliki peran penting dalam ketahanan pangan nasional. Provinsi ini dikenal sebagai lumbung pangan dengan kontribusi yang cukup besar terhadap produksi pangan di Indonesia (Diskominfo, 2024). Berdasarkan Badan Pusat Statistik (2024), IKP di Sulawesi Selatan pada tahun 2023 berkisar antara 71.87 hingga 89.28. Angka ini menunjukkan adanya variasi yang cukup besar antar kabupaten/kota. Hal ini mengakibatkan variabel yang memengaruhi IKP di suatu wilayah akan berbeda dengan wilayah lainnya. Perbedaan data yang signifikan antarwilayah dapat menyebabkan adanya pencilan dalam data. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan mengidentifikasi faktor-faktor penentu IKP di setiap kabupaten/kota di Sulawesi Selatan pada tahun 2019-2023 menggunakan *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* dengan MM-*Estimator*. Model ini memungkinkan peneliti untuk menggabungkan informasi spasial dan temporal dalam analisis sehingga dapat memahami lebih baik bagaimana faktor-faktor yang memengaruhi IKP yang berubah seiring waktu dan bervariasi dalam berbagai wilayah di Sulawesi Selatan.

1.2 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh model RMGTWR menggunakan MM-*Estimator* pada indeks ketahanan pangan di Sulawesi Selatan tahun 2019-2023.
2. Memperoleh faktor-faktor yang berpengaruh secara signifikan terhadap IKP di Sulawesi Selatan tahun 2019-2023.

Manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:
1. Memberikan sumber informasi bagi pemerintah terkhusus pemerintah provinsi maupun kabupaten/kota agar dapat dijadikan salah satu acuan untuk menetapkan kebijakan dalam rangka meningkatkan ketahanan pangan di Sulawesi Selatan.
2. Memberikan informasi tentang RMGTWR dengan MM-*Estimator* sebagai salah satu metode untuk menganalisis data spasial yang mengandung pencilan.

1.3 Batasan Penelitian

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:
1. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data IKP di Sulawesi Selatan pada tahun 2019 sampai 2023 dengan tujuh variabel prediktor yang diduga memengaruhi IKP.
2. Metode penentuan jarak antar lokasi pengamatan menggunakan jarak *euclidean* dan fungsi pembobot yang digunakan adalah *fixed* kernel berdasarkan nilai *Cross Validation* (CV) minimum, sedangkan pembobot yang digunakan dalam pembobot *robust* adalah pembobot *Tukey's Bisquare*.
3. Variabel global ditetapkan jika minimal 70% dari koefisien model GTWR berada dalam selang kepercayaan regresi global.
4. Penentuan model regresi spasial terbaik berdasarkan nilai *Root Mean Square Error* (RMSE) dan *Adjusted* R^2.

1.4 Teori

1.4.1 *Geographically Weighted Regression*

Salah satu metode statistik yang dapat digunakan untuk menganalisis faktor risiko secara spasial melalui pendekatan titik adalah model *Geographically Weighted Regression* (GWR). Parameter model GWR diukur pada setiap titik sehingga setiap area memiliki nilai parameter yang berbeda (Marizal & Atiqah, 2022). Model GWR dituliskan pada Persamaan (1).

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)X_{ik} + \varepsilon_i \,, i = 1,2, \dots, n; k = 1,2, \dots, p \qquad (1)$$

Keterangan:

y_i : nilai variabel respon pada lokasi pengamatan ke-i
X_{ik} : nilai variabel prediktor ke-k pada lokasi pengamatan ke-i
(u_i, v_i) : koordinat lokasi pengamatan ke-i
$\beta_0(u_i, v_i)$: intersep untuk model GWR
$\beta_k(u_i, v_i)$: koefisien regresi variabel prediktor ke-k pada lokasi pengamatan ke-i
ε_i : galat pada lokasi pengamatan ke-i

1.4.2 Heterogenitas Spasial

Heterogenitas spasial merupakan kondisi yang terjadi apabila suatu variabel prediktor yang sama memberikan respon yang tidak sama pada lokasi yang berbeda dalam satu wilayah pengamatan (Sobari & Jaya, 2022). Heterogenitas spasial dapat diuji menggunakan uji *Breusch-Pagan* dengan hipotesis dan statistik uji dituliskan pada Persamaan (2):

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2$ (tidak terdapat heterogenitas spasial)
H_1 : minimal ada satu $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$, $i \neq j$ untuk $i, j = 1,2 \dots, n$ (terdapat heterogenitas spasial)

Statistik Uji:

$$BP = \left(\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{f} \tag{2}$$

dengan elemen vektor $\boldsymbol{f}$

$$f_i = \left(\frac{e_i^2}{\sigma^2}\right) - 1$$

dengan e_i adalah galat untuk pengamatan ke-i, $\boldsymbol{Z}$ adalah matriks variabel prediktor berukuran $n \times (p+1)$, dan σ^2 adalah variansi galat. Kriteria pengujian apabila nilai $BP > \chi^2_{(\alpha,p)}$ maka terdapat heterogenitas spasial (Fitriatusakiah dkk., 2021).

1.4.3 Fungsi Pembobot

Pembobot sangat penting dalam pemodelan GWR karena nilai pembobot menunjukkan letak data observasi satu sama lain. Matriks pembobot dihitung berdasarkan informasi jarak dari ketetanggaan (Kusnandar dkk., 2021). Matriks pembobot yang memiliki pengaruh paling besar terhadap penaksiran pada GWR berbasis pada kedekatan titik lokasi pengamatan ke-i. Oleh karena itu, jarak yang semakin dekat membuat matriks pembobot ($\mathbf{W}$) juga semakin besar. Salah satu metode pembobotan yang biasa digunakan adalah fungsi kernel (Lutfiani dkk., 2019). Fungsi kernel terbagi menjadi beberapa fungsi sebagai berikut:

a. Fungsi *Gaussian*

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right) \tag{3}$$

b. Fungsi *Exponential*

$$w_{ij} = \exp\left[-\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)\right] \tag{4}$$

c. Fungsi *Bisquare*

$$w_{ij} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right]^2 & \text{, jika } d_{ij} < b \\ 0 & \text{, jika } d_{ij} \geq b \end{cases} \tag{5}$$

d. Fungsi *Tricube*

$$w_{ij} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^3\right]^3 & \text{, jika } d_{ij} < b \\ 0 & \text{, jika } d_{ij} \geq b \end{cases} \tag{6}$$

dengan d_{ij} adalah jarak *euclidean* antara lokasi pengamatan ke-i dan ke-j, sedangkan b adalah *bandwidth*.

1.4.4 *Bandwidth*

Bandwidth merupakan ukuran jarak fungsi pembobot yang dapat mengukur sejauh mana pengaruh suatu lokasi dengan lokasi lainnya. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan *bandwidth* optimum adalah dengan menghitung *Cross Validation* (CV) menggunakan Persamaan (7).

$$CV(b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}_{i\neq 1}(b)]^2 \tag{7}$$

dengan $\hat{y}_{i\neq 1}(b)$ adalah nilai duga y_i, namun titik lokasi di pengamatan ke$-i$ dihilangkan dari proses estimasi. Semakin kecil nilai CV, semakin optimum nilai *bandwidth* yang diperoleh (Haryanto, 2019).

1.4.5 *Geographically and Temporally Weighted Regression*

Geographically and Temporally Weighted Regression (GTWR) merupakan pengembangan dari model GWR yang menggabungkan informasi spasial dan temporal (Huang dkk., 2010). Model GTWR untuk p variabel prediktor dan variabel respon y_i pada koordinat (u_i, v_i, t_i) dituliskan pada Persamaan (8) (Debataraja dkk., 2021) :

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i, t_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i, t_i) X_{ik} + \varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n; k = 1,2, \dots, p \tag{8}$$

Keterangan:

y_i : nilai variabel respon pada lokasi pengamatan ke-i

$\beta_0(u_i, v_i, t_i)$: konstanta atau intersep model GTWR

$\beta_k(u_i, v_i, t_i)$: koefisien regresi ke-k pada setiap lokasi pengamatan (u_i, v_i) dan waktu (t_i)

X_{ik} : nilai variabel prediktor ke-k pada lokasi pengamatan ke-i

ε_i : galat pada lokasi pengamatan ke-i

Estimasi parameter yang digunakan pada model GTWR adalah metode *Weighted Least Square* (WLS) dengan memberikan pembobot berbeda setiap lokasi data yang diamati. Estimasi parameter model GTWR dapat dilihat pada Persamaan (9) (Sifriyani dkk., 2022):

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i, t_i) = [\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \boldsymbol{X}]^{-1} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \boldsymbol{Y} \tag{9}$$

dengan $\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) = diag(w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in})$ adalah matriks pembobot berukuran $n \times n$ pada lokasi pengamatan (u_i, v_i) dan waktu ke-t_i, sedangkan n adalah jumlah observasi.

1.4.6 Jarak Spasial Temporal

Jarak spasial temporal dibentuk melalui kombinasi linear antara jarak spasial (d^S) dan jarak temporal (d^T) yang ditunjukkan pada Persamaan (10):

$$\begin{aligned} d_{ij}^S &= \left[\left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ d_{ij}^T &= \left[\left(t_i - t_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ \left(d_{ij}^{ST}\right)^2 &= \lambda\left[\left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2\right] + \mu\left(t_i - t_j\right)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

dengan u_i merupakan koordinat *latitude* pada lokasi ke-i, v_i merupakan koordinat *longitude* pada lokasi ke-i, λ dan μ merupakan faktor skala untuk menyeimbangkan berbagai efek yang digunakan untuk mengukur jarak spasial dan temporal (Zhang dkk., 2019).

Misalkan τ menunjukkan parameter rasio $\frac{\mu}{\lambda}$ dan $\lambda \neq 0$ maka diperoleh Persamaan (11).

$$\frac{\left(d_{ij}^{ST}\right)^2}{\lambda} = \left[\left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2\right] + \tau\left(t_i - t_j\right)^2 \quad (11)$$

Parameter τ berfungsi untuk menambah atau mengurangi efek jarak temporal agar sesuai dengan jarak spasial (Huang dkk., 2010). Parameter τ diperoleh dari kriteria meminimumkan CV dengan menginisialisasi nilai awal τ seperti pada Persamaan (12).

$$CV(\tau) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}_{\neq i}(\tau)]^2 \quad (12)$$

dengan $\hat{y}_{i\neq 1}(\tau)$ adalah nilai duga y_i, namun titik lokasi di pengamatan ke$-i$ dihilangkan dari proses estimasi. Selanjutnya penduga parameter λ dan μ bisa diperoleh dengan metode iteratif berdasarkan hasil penduga τ yang menghasilkan CV minimum.

1.4.7 *Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression*

Model *Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* (MGTWR) merupakan pengembangan dari model GTWR yang memuat beberapa koefisien variabel prediktor yang diasumsikan konstan untuk semua pengamatan sedangkan variabel lainnya bervariasi menurut lokasi pengamatan. Model MGTWR dituliskan pada Persamaan (13) (Liu dkk., 2017) :

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i, t_i) + \sum_{k=1}^{q} \beta_l(u_i, v_i, t_i) X_{ik} + \sum_{k=q+1}^{p} \beta_g X_{ik} + \varepsilon_i \quad (13)$$

$i = 1,2, \dots, n; k = 1,2, \dots, p$

dengan

y_i : nilai variabel respon pada lokasi pengamatan ke-i

$\beta_0(u_i, v_i, t_i)$: konstanta atau intersep model MGTWR

$\beta_l(u_i, v_i, t_i)$: koefisien regresi lokal pada lokasi pengamatan ke-i

β_g : koefisien regresi global

p : banyaknya variabel prediktor global

q : banyaknya variabel prediktor lokal

X_{ik} : nilai variabel prediktor ke-k pada lokasi pengamatan ke ke-i

ε_i : galat pada lokasi pengamatan ke-i

Estimasi parameter pada model MGTWR terbagi menjadi dua yaitu estimasi parameter lokal dan estimasi parameter global (Palupi, 2018). Persamaan (14) dapat dituliskan dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_g \boldsymbol{\beta}_g + \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (14)$$

Persamaan (14) dapat dituliskan dalam bentuk GTWR untuk mempermudah proses estimasi parameter lokal dan global yang ditunjukkan pada Persamaan (15):

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}_g \boldsymbol{\beta}_g = \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

a. Estimasi Parameter Lokal

Estimasi parameter lokal pada model MGTWR menggunakan *Weighted Least Square* (WLS) yaitu memberi bobot yang berbeda untuk setiap lokasi pengamatan. Persamaan parameter lokal dituliskan pada Persamaan (16):

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)$$

Misalkan pembobot untuk titik pengamatan (u_i, v_i) dan waktu pengamatan (t_i) adalah $\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)$ maka koefisien parameter lokal model MGTWR dapat dihitung dengan menambahkan pembobot. Oleh karena itu, diperoleh estimasi parameter lokal pada Persamaan (17).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i) = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\tilde{\boldsymbol{y}} \tag{17}$$

Misalkan $\boldsymbol{x}_{li}^T = (1, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi})$ adalah elemen baris ke-i dari matriks $\boldsymbol{X}_l$, maka nilai estimasi untuk $\tilde{\boldsymbol{y}}$ pada seluruh pengamatan adalah:

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{y}}} = \left(\hat{\tilde{y}}_1, \hat{\tilde{y}}_2, \dots, \hat{\tilde{y}}_n\right)^T = \boldsymbol{S}_l\tilde{\boldsymbol{y}} \tag{18}$$

dengan $\boldsymbol{S}_l$ merupakan matriks berukuran $n \times n$

$$\boldsymbol{S}_l = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{l1}^T[\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \\ \boldsymbol{x}_{l2}^T[\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{ln}^T[\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \end{bmatrix}$$

b. Estimasi Parameter Global

Estimasi parameter global pada model MGTWR menggunakan *Ordinary Least Square* (OLS). Persamaan parameter global dituliskan pada Persamaan (19):

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g \tag{19}$$

Kemudian, substitusikan Persamaan (17) ke persamaan (14) sehingga diperoleh estimasi parameter global pada Persamaan (20):

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_g = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{y} \tag{20}$$

Subtitusikan Persamaan (20) kedalam Persamaan (17) sehingga diperoleh estimasi parameter lokal pada Persamaan (21).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i) = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}_g\hat{\boldsymbol{\beta}}_g\right) \tag{21}$$

Oleh karena itu, nilai estimasi respon untuk n lokasi pengamatan yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{y} \tag{22}$$

dengan $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_l + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)$. Penduga $\hat{\boldsymbol{\beta}}_g$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)$ merupakan penduga tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}_g$ dan $\boldsymbol{\beta}_l\ (u_i, v_i, t_i\ )$ (Palupi, 2018).

1.4.8 Regresi *Robust* MM-*Estimator*

Regresi *robust* merupakan metode regresi yang digunakan ketika distribusi galat tidak normal atau terdapat beberapa pencilan yang dapat memengaruhi model. Metode ini merupakan alat penting untuk menganalisis data sehingga model yang dihasilkan kuat terhadap pencilan. MM-*Estimator* merupakan salah satu estimasi yang dapat digunakan untuk mengatasi pencilan.

MM-*Estimator* merupakan gabungan dari metode estimasi yang mempunyai nilai *breakdown* tinggi (S-*Estimator*) dan metode M-*Estimator* (Prahutama & Rusgiyono, 2021). MM-*Estimator* didefinisikan melalui tiga tahap. Tahap pertama yaitu menghitung estimasi parameter awal regresi menggunakan S-*estimator*. Tahap kedua, menghitung galat dan skala estimasi *robust* dengan menggunakan M-*Estimator*. Ketiga, menghitung estimasi parameter akhir dengan M-*Estimator* (Sari dkk., 2020). MM-*Estimator* didefinisikan pada Persamaan (23):

$$\hat{\beta} = min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{e_i}{\hat{\sigma}}\right) = min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right) \tag{23}$$

dengan $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}$, $e_i = y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j$, notasi $\hat{\sigma}$ merupakan skala estimasi *robust* dan nilai $\rho(u_i)$ adalah fungsi simetris pada fungsi objektif (ρ). Salah satu fungsi pembobot yang dapat digunakan adalah fungsi pembobot *Tukey's Bisquare* yang ditunjukkan pada Persamaan (24):

$$w(u_i) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{u_i}{c}\right)^2\right]^2 & \text{untuk } |u_i| \leq c \\ 0 & \text{untuk } |u_i| > c \end{cases} \tag{24}$$

Nilai c pada metode *Tukey's Bisquare* disebut *tuning constant*. Diketahui bahwa *tuning constant* pada *robust* S-*Estimator* adalah c = 1.547 dan *tunning constant* untuk M-*Estimator* adalah c = 4.685 (Khotimah dkk., 2020).

1.4.9 *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression*

Regresi *robust* pada model MGTWR digunakan untuk memodelkan data yang mengandung pencilan. Proses MM-*Estimator* dilakukan dengan meminimumkan fungsi objektif yang ditunjukkan pada Persamaan (25) (Syam dkk., 2024).

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{e_i}{\hat{\sigma}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right) \tag{25}$$

Estimasi parameter diperoleh dengan menurunkan Persamaan (25) terhadap β_j kemudian disamakan dengan nol, seperti berikut:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right)}{\partial \beta_j} = 0 \tag{26}$$

karena $e_i = y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j$ maka $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}$ sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho\,(u_i)}{\partial \beta_j} = 0 \tag{27}$$

hasil turunan Persamaan (27) dapat dilakukan dengan menggunakan aturan berantai sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho\,(u_i)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho\,(u_i)}{\partial u_i} \times \frac{\partial u_i}{\partial \beta_j} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho\,(u_i)}{\partial u_i} \times \frac{\partial \frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}}{\partial \beta_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \rho'(u_i) \times \left(-\frac{X_{ij}}{\hat{\sigma}}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \rho'\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right) \times \left(-\frac{X_{ij}}{\hat{\sigma}}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\rho'\left(y_i - \sum\nolimits_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j\right) = 0 \tag{28}$$

dengan $\rho' = \psi$ merupakan fungsi pengaruh sehingga Persamaan (28) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\psi\left(y_i - \sum\nolimits_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j\right) = 0 \tag{29}$$

Fungsi pengaruh tersebut digunakan untuk memperoleh pembobot yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$w(u_i) = w_i = \frac{\psi(u_i)}{u_i} = \frac{\psi\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right)}{\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}}$$

maka persamaan (29) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}w_i\left(y_i - \sum\nolimits_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j\right) = 0 \tag{30}$$

Persamaan (30) diselesaikan dengan metode *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS), estimasi awal koefisien $\hat{\beta}^{(1)}$ dan galat $e_i^{(1)}$ diambil dari regresi *robust* S-*Estimator* untuk bobot permulaan $w_i^{(1)}$, maka diperoleh Persamaan (31):

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}w_i\, y_i - \sum_{i=1}^{n} X_{ij}w_i \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j = 0 \tag{31}$$

Persamaan (31) dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega y} - \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega y} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \tag{32}$$

dengan $\boldsymbol{\omega}$ adalah matriks diagonal berukuran $n \times n$ dengan elemen diagonalnya w_1, w_2, w_3,..., w_n, $\boldsymbol{X}$ adalah matriks variabel prediktor berukuran $n \times p + 1$ dan n adalah banyaknya observasi. Untuk setiap $\boldsymbol{\omega}$ maka diperoleh *estimator* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ dari Persamaan (32), sebagai berikut:

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega y} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$
$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\omega y} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$
$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega y} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega y} \tag{33}$$

Selanjutnya, $\boldsymbol{\omega}$ dihitung menggunakan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM}$ dan skala *robust* $\hat{\sigma}$. Untuk $w^{(m)}$ bobot yang diberikan, dapat diperoleh *estimator* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM}^{m+1} = \left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega}^{(\boldsymbol{m})}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega}^{(\boldsymbol{m})}\boldsymbol{y}$ sampai $\sum_{i=0}^{n}\left|e_i^{(m)}\right|$ konvergen yaitu selisih nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM}^{m+1}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM}^{m}$ mendekati 0, dengan m adalah banyaknya iterasi.

Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression (RMGTWR) digunakan ketika terdapat pencilan pada residual model MGTWR. Diketahui penduga bagi $\boldsymbol{y}$ adalah $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, sehingga estimasi parameter global dapat diperoleh dengan mensubtitusikan Persamaan (33) ke Persamaan (20) sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g &= \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM} \\
&= \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{y}) \\
&= \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{\omega}^{-1}(\boldsymbol{X}^T)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{y} \\
&= \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{\omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{y} \\
&= \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{y} \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Estimasi parameter lokal dapat diperoleh dengan mensubtitusikan Persamaan (34) ke Persamaan (21) sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i,v_i,t_i) &= [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g\right) \\
&= [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\left([\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{y}]-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g\right) \\
&= [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\omega}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{y}]-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g \\
&= [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\left(\boldsymbol{\omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g\right) \\
&= [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{\omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g \\
&= [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Pendugaan parameter global dan lokal untuk iterasi m dilakukan menggunakan Persamaan (36) dan (37):

$$
\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^m = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{\omega}^{m-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{\omega}^{m-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{y} \qquad (36)
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i,v_i,t_i)^m &= [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{\omega}^{m-1}\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{\omega}^{m-1}\boldsymbol{y} \qquad (37) \\
&\quad -\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i,v_i,t_i)\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^{m-1}
\end{aligned}
$$

Nilai bobot $\boldsymbol{\omega}$ akan berubah disetiap iterasinya. Proses iterasi berhenti ketika selisih nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^{m+1}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^m$ mendekati nol dan selisih nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i,v_i,t_i)^{m+1}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i,v_i,t_i)^m$ mendekati nol, dengan m adalah banyaknya iterasi.

1.4.10 Pencilan Spasial

Pencilan adalah observasi atau titik data yang menunjukkan nilai yang sangat berbeda dari sebagian besar data lainnya. Salah satu metode yang dapat digunakan dalam mendeteksi pencilan adalah *Random Walk on Bipartite* (RWBP). Metode RWBP dilakukan dengan langkah langkah sebagai berikut (Liu dkk., 2010):

1. Pembentukan dua grafik terboboti

Pembentukan grafik terdiri dari tiga tahapan dasar. Pertama, mengelompokkan variabel nonspasial berdasarkan metode penggerombolan *K-Means*. Kedua, membentuk dua grafik dengan bagian kiri berisi data spasial dan bagian kanan berisi data non spasial yang telah digerombolkan sebelumnya. Ketiga, menghitung nilai kemiripan pengamatan spasial dan kelompok berdasarkan variabel non spasial dari pengamatan spasial dan nilai pusat dari kelompok yang terbentuk menggunakan Persamaan (38):

$$
E\langle P_i, C_j\rangle = \frac{1}{e^{|Atr\ (Pi)-Ctr(Cj)|^{\alpha}}}, 0 < \alpha \leq 2 \qquad (38)
$$

Keterangan :

$Atr\ (Pi)$: variabel nonspasial ke-i

$Ctr(Cj)$: nilai pusat (Center) dari kelompok ke-j

α : nilai konstanta yang diperoleh berdasarkan jangkauan dari nilai variabel non spasial.

2. Menghitung Kemiripan antara Pengamatan Spasial

Perhitungan kemiripan antara pengamatan spasial dilakukan dengan menerapkan metode RW pada dua grafik terboboti. Metode RW dimulai dari simpul ke$-i$ dan secara iterasi menuju tetangga terdekat dengan peluang tertentu dengan peluang sebesar c untuk kembali ke simpul awal.

$$\boldsymbol{s}_p = (1-c)\left(\boldsymbol{I} - c\boldsymbol{W}_p\right)^{-1}\boldsymbol{e}_p \tag{39}$$

Keterangan :

$\boldsymbol{s}_p$: vektor peluang yang menjelaskan skor kemiripan antara titik ke-p dan titik lainnya
c : konstanta yang bernilai 0.1
$\boldsymbol{W}_p$: matriks ketetanggaan dari titik ke-p yang telah dinormalisasi
$\boldsymbol{e}_p$: vektor edge untuk titik ke-p

Matriks $\boldsymbol{W}_p$ merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot yang sama rata terhadap tetangga lokasi terdekat dan yang lainnya nol dengan elemen matriks (w_{ij}). Adapun rumus normalisasi matriks ketetanggan adalah sebagai berikut (Mubarok, 2022):

$$w_{ij_{norm}} = \frac{w_{ij}}{\sum_j^n w_{ij}}$$

3. Menghitung skor kemiripan untuk tiap pasangan pengamatan spasial menggunakan Persamaan (36):

$$Sim(p_i, p_j) = \frac{\boldsymbol{s}_{pi}, \boldsymbol{s}_{pj}}{\sqrt{\boldsymbol{s}_{pi}, \boldsymbol{s}_{pi}} \times \sqrt{\boldsymbol{s}_{pj}, \boldsymbol{s}_{pj}}} \tag{40}$$

Keterangan:

$\boldsymbol{s}_{pi}$: vektor peluang yang menjelaskan skor kemiripan antara titik ke-p dan titik lainnya pada lokasi ke-i
$\boldsymbol{s}_{pj}$: vektor peluang yang menjelaskan skor kemiripan antara titik ke-p dan titik lainnya pada lokasi ke-j

4. Mengidentifikasi pencilan spasial berdasarkan nilai kemiripan dimana nilai kemiripan terkecil akan dideteksi sebagai pencilan.

1.4.11 Uji Signifikansi Parameter

Pengujian parameter model RMGTWR dilakukan untuk mengetahui variabel mana saja yang berpengaruh secara signifikan. Terdapat dua uji parameter yaitu pengujian untuk variabel global dan pengujian untuk variabel lokal. Uji signifikan variabel global dengan hipotesis sebagai berikut (Yasin dkk., 2015).

H_0 : $\beta_k = 0$ (variabel global X_k tidak signifikan)
H_1 : $\beta_k \neq 0$ (variabel global X_k signifikan)

Statistik uji:

$$t_g = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}\sqrt{g_{kk}}} \tag{41}$$

dengan g_{kk} adalah elemen diagonal ke$-k$ dari matriks $\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T$, $\boldsymbol{G} = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{y}}{tr((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}))}$. Kriteria keputusan yolak H_0 apabila $|t_g| > t_{\frac{\alpha}{2},df}$, dengan $df = \left[\frac{u_1^2}{u_2}\right]$ dan $u_i = tr([(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})]^i), i = 1{,}2.$

Uji signifikansi variabel lokal dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : $\beta_k(u_i, v_i, t_i) = 0$ (variabel lokal X_k pada lokasi ke$-i$ tidak signifikan)

H_1 : $\beta_k(u_i, v_i, t_i) \neq 0$ (variabel lokal X_k pada lokasi ke$-i$ signifikan)

Statistik uji:

$$t_l = \frac{\hat{\beta}_k(u_i, v_i, t_i)}{\hat{\sigma}\sqrt{m_{kk}}} \tag{42}$$

dengan m_{kk} adalah elemen diagonal ke$-k$ dari matriks $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T$, $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{G})$. Kriteria keputusan apabila $|t_l| > t_{\frac{\alpha}{2},df}$, maka tolak H_0 (Wulandari, 2017).

1.4.12 Indeks Ketahanan Pangan

Indeks ketahanan pangan (IKP) merupakan indikator penting untuk menilai kemampuan suatu negara dalam menyediakan pangan bagi penduduknya. Ketahanan pangan terdiri dari tiga komponen utama yaitu ketersediaan pangan, aksesibilitas pangan, dan stabilitas pangan. Seiring dengan berkembangnya teori ketahanan pangan, pemanfaatan pangan menjadi isu penting yang perlu diperhatikan dalam upaya ketahanan pangan. Ketahanan pangan sangat dipengaruhi oleh faktor sosial dan ekonomi, serta kebijakan pemerintah yang mendukung praktik pertanian berkelanjutan (Fadila & Putri, 2023). Pengukuran indeks ketahanan pangan melibatkan berbagai indikator, seperti produksi pangan dalam negeri, aksesibilitas pangan, dan status gizi masyarakat. Apabila suatu negara memiliki ketahanan pangan yang kuat dan mampu mencukupi kebutuhan pangan nasional maka secara swasembada negara tersebut akan memiliki ketahanan nasional yang kuat.

Pemilihan indikator yang tepat sangat penting untuk mendapatkan gambaran akurat mengenai ketahanan pangan. Daerah dengan akses yang baik ke pasar dan infrastruktur memiliki tingkat ketahanan pangan yang lebih tinggi dibandingkan dengan daerah yang terpencil (Sutrisno, 2022). Tantangan ketahanan pangan di Indonesia juga semakin rumit akibat perubahan iklim yang berdampak pada hasil pertanian. Cuaca ekstrem dapat mengurangi hasil pertanian yang dapat berdampak negatif pada ketersediaan pangan. Oleh karena itu, pengembangan strategi adaptasi menjadi penting agar petani dapat menghadapi perubahan iklim dan menjaga ketahanan pangan (Nurhaliza dkk., 2023).

Pengelompokan delapan indikator dilakukan dengan mengikuti pola standar pengelompokan yang sudah ditetapkan, sedangkan pengelompokan satu indikator yaitu persentase balita stunting dilakukan dengan mengikuti aturan *World Health Organization* (WHO). Berdasarkan kesepakatan dalam Kelompok Kerja Teknis *Food Security and Vulnerability Atlas* (FSVA) atau peta ketahanan dan kerentanan pangan, metode pembobotan yang digunakan untuk menentukan tingkat kepentingan relatif indikator terhadap masing-masing aspek ketahanan pangan adalah metode pembobotan. Metode pembobotan dalam penyusunan FSVA mengacu pada metode yang dikembangkan oleh *The Economist Intelligence Unit* (EIU) dalam penyusunan GFSI (Badan Pangan Nasional, 2023). Perhitungan indeks ketahanan pangan menurut Badan Ketahanan Pangan adalah sebagai berikut:

1. Standarisasi nilai indikator dengan menggunakan *z-score* dan *distance to scale* (0 – 100)
2. Menjumlahkan hasil perkalian antara masing-masing nilai indikator yang sudah distandarisasi dan bobot indikator dengan rumus:

$$Y_j = \sum_{i=1}^{9} a_i X_{ij}$$

Keterangan:

i : indikator ke-1,2,3,...,9
j : kabupaten/kota ke-1,2,...,514
Y_j : IKP kabupaten/kota ke-j
a_i : bobot masing-masing indikator ke-i
X_{ij} : nilai standarisasi masing masing indikator ke-i pada kabupaten/kota ke-j

Besaran bobot masing-masing indikator berdasarkan rekomendasi para ahli (*expert judgement*) yang berasal dari akademisi dan pemerintah.

3. Mengelompokan wilayah ke dalam 6 kelompok berdasarkan *cut off point* IKP

IKP yang dihasilkan pada masing-masing wilayah dikelompokkan ke dalam enam kelompok berdasarkan *cut off point* IKP yang dapat dilihat pada Tabel 1. *Cut off point* IKP merupakan hasil penjumlahan dari masing-masing perkalian antara bobot indikator individu dengan *cut off point* indikator individu hasil standarisasi *z-score* dan *distance to scale* (0-100).

Tabel 1. *Cut off Point* IKP

Kelompok IKP	Kabupaten
1	≤ 41.520
2	$> 41.520 - 51.420$
3	$> 51.420 - 59.580$
4	$> 59.580 - 67.750$
5	$> 67.750 - 75.680$
6	> 75.680

Kabupaten/kota diklasifikasikan dalam enam kelompok ketahanan pangan dan gizi berdasarkan tingkat kerentanan pangan. Kabupaten/kota yang berada pada Prioritas 1, 2 dan 3 merupakan wilayah rentan pangan dengan klasifikasi sangat rentan (Prioritas 1), rentan (Prioritas 2), dan agak rentan (Prioritas 3). Kabupaten/kota pada Prioritas 4, 5, dan 6 merupakan wilayah tahan pangan dengan klasifikasi agak tahan (Prioritas 4), tahan (Prioritas 5), dan sangat tahan (Prioritas 6).

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari publikasi Badan Ketahanan Pangan dan publikasi Badan Pusat Statistik Sulawesi Selatan dalam kurun waktu 2019-2023. Adapun variabel pada penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 1 dan secara lengkap pada Lampiran 1.

Tabel 2. Variabel Penelitian

Variabel	Keterangan	Definisi Operasional	Satuan
Y	Indeks ketahanan pangan	Suatu indeks penilaian untuk mengetahui tingkat ketahanan pangan suatu wilayah	Indeks
X_1	Persentase rumah tangga dengan proporsi pengeluaran untuk pangan lebih dari 65% terhadap total pengeluaran	Rumah tangga dengan proporsi pengeluaran untuk makanan lebih dari 65% dibandingkan dengan total pengeluaran (makanan dan non makanan) rumah tangga.	%
X_2	Rasio konsumsi normatif per kapita terhadap produksi bersih	Rasio konsumsi normatif per kapita terhadap produksi bersih serealia dan umbi-umbian (padi, jagung, ubi kayu, ubi jalar, dan sagu), serta stok beras pemerintah daerah.	%
X_3	Umur harapan hidup	Perkiraan rata-rata usia yang dapat dicapai oleh seseorang dalam suatu populasi berdasarkan tingkat kematian yang berlaku pada tahun tertentu	Tahun
X_4	Persentase penduduk yang hidup di bawah garis kemiskinan	Penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita perbulan lebih rendah dari garis kemiskinan	%
X_5	Persentase rumah tangga tanpa akses ke air bersih	Rumah tangga yang menggunakan sumber utama air untuk minum berasal dari sumber tak terlindung, mata air tak terlindung, air permukaan, air hujan, dan lainnya.	%
X_6	Rata-rata lama sekolah perempuan di atas 15 tahun	Rata-rata lama bersekolah (total tahun bersekolah sampai pendidikan tertinggi yang ditamatkan dan kelas tertinggi yang pernah diduduki) oleh perempuan berumur 15 tahun ke atas.	Tahun
X_7	Rasio jumlah penduduk per tenaga kesehatan	Total jumlah penduduk per jumlah tenaga kesehatan (dokter umum, dokter spesialis, dokter gigi, bidan, tenaga	%

Variabel	Keterangan	Definisi Operasional	Satuan
	terhadap tingkat kepadatan penduduk	kesehatan masyarakat, tenaga gizi, tenaga keterapian fisik, dan tenaga keteknisian medis) dibandingkan dengan tingkat kepadatan penduduk.	

2.2 Metode Analisis

Pengolahan data dilakukan dengan bantuan *software R.* Langkah-langkah dalam analisis penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan eksplorasi data menggunakan peta tematik untuk mendapatkan gambaran awal dari variabel respon.
2. Melakukan uji multikolinearitas dengan melihat nilai *Varians Inflation Factor* (VIF) berdasarkan persamaan sebagai berikut (Hu dkk., 2022):

$$VIF = \frac{1}{1 - R_k^2}$$

   dengan R_k^2 adalah koefisien determinansi variabel ke-k. Jika nilai VIF > 10 menunjukkan adanya multikolinearitas.
3. Melakukan uji heterogenitas spasial menggunakan statistik uji pada Persamaan (2).
4. Melakukan uji heterogenitas temporal menggunakan *boxplot.*
5. Melakukan Pemodelan GTWR yang meliputi:
   a. Menentukan *bandwidth* spasial optimum (h_{ST}) berdasarkan nilai CV minimum.
   b. Melakukan estimasi parameter model GTWR menggunakan Persamaan (10).
6. Menentukan variabel global dan lokal menggunakan selang kepercayaan masing-masing parameter dari model regresi global. Sebuah variabel dianggap sebagai variabel global apabila minimal 70% dari koefisien dalam model GTWR berada dalam selang kepercayaan (Asianingrum dkk., 2020).
7. Melakukan pemodelan MGTWR yang meliputi:
   a. Menentukan fungsi pembobot dengan menentukan nilai *bandwidth* spasial optimum berdasarkan nilai CV minimum.
   b. Menghitung parameter rasio spasial temporal (τ), parameter spasial (λ) dan parameter (μ).
   c. Menghitung jarak spasial temporal (d_{ij}^{ST}) menggunakan Persamaan (11).
   d. Menghitung matriks pembobot $(\boldsymbol{W})$.
   e. Menghitung estimasi parameter global dan lokal model MGTWR.
8. Mendeteksi pencilan pada sisaan menggunakan *boxplot* dan RWBP.
9. Mengestimasi parameter dengan regresi *Robust* MGTWR dengan MM-*Estimator*. Prosedur MM-*Estimator* dapat diuraikan sebagai berikut:
   a. Menghitung nilai galat $e_i = y_i - \hat{y}_i$
   b. Menghitung nilai $\hat{\sigma}_s$ menggunakan rumus:

$$\hat{\sigma}_s = \sqrt{\frac{n\sum_{i=0}^{n} e_i^2 - (\sum_{i=0}^{n} e_i)^2}{n(n-1)}}$$

   c. Menghitung nilai u_i menggunakan rumus $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_s}$.
   d. Menghitung pembobot untuk *robust* S-*Estimator* menggunakan Persamaan (24)

dengan nilai $c = 1.547$.

e. Menghitung $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^m$ menggunakan Persamaan (36) dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^m$ menggunakan Persamaan (37).

f. Ulangi langkah (a) sampai (e) hingga diperoleh estimasi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_s$ yang konvergen.

g. Galat dari S-*Estimator* digunakan untuk menghitung skala galat M-*Estimator* dengan rumus:

$$\hat{\sigma}_M = \frac{median|e_i - median(e_i)|}{0.6745}$$

dengan 0.6745 adalah konstanta yang membuat $\hat{\sigma}$ mendekati estimasi tak bias dari σ dan membuat galat berdistribusi normal (Haryanto dkk., 2019).

h. Menghitung nilai $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_M}$ kemudian menghitung pembobot awal *robust* menggunakan Persamaan (24) dengan nilai $c = 4.685$.

i. Menghitung $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^m$ menggunakan Persamaan (36) dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^m$ menggunakan Persamaan (37).

j. Ulangi langkah (h) sampai (k) hingga diperoleh estimasi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM}$ yang konvergen, yaitu selisih $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM}^{m+1}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MM}^m$ mendekati 0, dengan m adalah banyaknya iterasi.

10. Melakukan pengujian parameter RMGTWR secara parsial untuk parameter global menggunakan Persamaan (41) dan parameter lokal menggunakan Persamaan (42).
11. Melakukan pengujian kebaikan model RMGTWR dengan menghitung nilai $Adjusted\ R^2$ dan *Root Mean Square Error* (RMSE) dengan rumus:

$$Adjusted\ R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2};\ RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

12. Melakukan interpretasi model *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* dengan MM-*Estimator*.