BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Angka Kematian Ibu (AKI) merupakan indikator kunci yang digunakan untuk menilai kualitas pelayanan kesehatan suatu wilayah, terutama dalam hal kesehatan reproduksi dan maternal. Menurut Kementerian Kesehatan Republik Indonesia (2020) AKI didefinisikan sebagai jumlah kematian perempuan akibat komplikasi kehamilan atau penanganannya dalam masa kehamilan atau dalam 42 hari setelah melahirkan per 100.000 kelahiran hidup. AKI menjadi cerminan status gizi dan kesehatan ibu, kondisi sosial ekonomi, kesehatan lingkungan, dan tingkat pelayanan kesehatan maternal. Hingga saat ini penurunan AKI masih menjadi prioritas program kesehatan di Indonesia. Oleh karena itu, melalui tujuan ketiga *Sustainable Development Goals* (SDGs), yaitu menciptakan kehidupan sehat dan sejahtera, Indonesia menargetkan penurunan AKI hingga 70 kematian per 100.000 kelahiran hidup pada tahun 2030 (Badan Pusat Statistik, 2022). Target ini menekankan pentingnya peningkatan kualitas layanan kesehatan maternal, terutama di daerah dengan tingkat AKI yang masih tinggi.

Menurut data Direktorat Jendral Kesehatan Masyarakat, jumlah kasus kematian ibu di Indonesia mengalami peningkatan signifikan, dengan 7.389 kematian tercatat pada tahun 2021, meningkat dari 4.627 kematian pada tahun 2020 (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2022). Salah satu provinsi penyumbang kasus kematian ibu tertinggi di Indonesia adalah Provinsi Sulawesi Selatan. Berdasarkan rekapitulasi data kabupaten/kota, jumlah kematian ibu di Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2021 tercatat sebanyak 195 kasus, meningkat 62 kasus dibandingkan tahun 2020 yang hanya mencapai 133 kasus (Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan, 2022). Peningkatan jumlah kematian ibu dapat dipengaruhi oleh berbagai faktor, diantaranya adalah komplikasi kebidanan, kekurangan darah, proses persalinan tidak dilakukan oleh tenaga kesehatan, serta kurang memadainya pelayanan kesehatan ibu hamil maupun nifas. Data jumlah kematian ibu merupakan data *count* yang tidak berdistribusi normal sehingga tidak dapat dimodelkan dengan regresi linear. Oleh karena itu, salah satu pendekatan yang dapat digunakan adalah *Generalized Linear Model* (GLM), yaitu perluasan regresi linear yang mengasumsikan variabel prediktor memiliki efek linear tetapi tidak mengharuskan variabel respon mengikuti distribusi tertentu. Model tersebut digunakan ketika variabel respon termasuk dalam keluarga eksponensial, seperti distribusi Poisson.

Data jumlah kematian ibu di Provinsi Sulawesi Selatan merupakan data yang mengikuti distribusi Poisson karena merupakan data dengan peluang kejadiannya kecil pada periode tertentu. Regresi Poisson merupakan metode statistik yang umum digunakan dalam memodelkan data jumlah kematian ibu. Akan tetapi, data jumlah kematian ibu berpotensi mengalami overdispersi karena data *count* cenderung memiliki nilai varians yang lebih besar dari nilai rata-rata (Winata, 2023). Sedangkan dalam regresi Poisson terdapat asumsi yang harus dipenuhi yaitu equidispersi yang artinya rata-rata dan varians dari variabel respon bernilai sama (Brilliant dan Fakhriyana, 2023). Ketika kasus overdispersi diabaikan maka pengujian menjadi tidak akurat, sehingga hasil pengujian menjadi tidak valid (Nasution dkk., 2022). Oleh karena itu, perlu dilakukan penanganan masalah overdispersi menggunakan model regresi *Conway Maxwell Poisson* (CMP) yang merupakan pengembangan regresi *Poisson* (Sellers dan Premeaux, 2021). Model regresi CMP dibentuk berdasarkan distribusi *Conway Maxwell Poisson* yang memiliki dua parameter, yaitu parameter μ yang berhubungan dengan rata-rata observasi dan parameter ϕ yang merupakan parameter dispersi (Sellers dan Premeaux, 2021). Distribusi CMP merupakan generalisasi dari distribusi Poisson $(\phi = 1)$ yang dikembangkan oleh Conway dan Maxwell pada tahun 1962. Regresi CMP memiliki dua parameter yaitu parameter regresi (β) dan parameter dispersi (ϕ). Model ini mempunyai fleksibiltas dalam memodelkan data dengan berbagai tingkat dispersi, baik overdispersi maupun underdispersi (Hayati dkk., 2019). Salah satu metode pendugaan parameter yang digunakan dalam regresi CMP adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang dapat dioptimalkan menggunakan metode iterasi *Newton Raphson*.

Dalam regresi CMP sering kali terdapat hubungan korelasi yang tinggi antarvariabel prediktor, yang dikenal sebagai multikolinearitas. Tingginya tingkat multikolineritas pada variabel prediktor mengakibatkan kesalahan baku koefisien regresi menjadi besar, sehingga model regresi menjadi tidak valid dan menghasilkan taksiran parameter dengan varians yang tidak minimum (Wulandari, 2020). Oleh karena itu, regresi CMP jika diestimasi menggunakan metode MLE akan menghasilkan estimasi yang tidak efisien. Untuk mengatasi masalah multikolinearitas, Hoerl dan Kennard memperkenalkan regresi *ridge* untuk model regresi linear. Pendekatan ini kemudian diterapkan pada model data diskrit untuk memperbaiki estimasi regresi yang mengandung multikolinearitas. Dalam regresi *ridge*, tetapan bias k memainkan peran penting dalam mengestimasi koefisien model (Sami dkk., 2022). Akan tetapi, regresi *ridge* tidak selalu menghasilkan bias yang minimum sehingga Singh pada tahun 1986 memperkenalkan metode *Jackknife Ridge Regression* (Malau, 2021). Metode ini diperoleh dengan menerapkan prosedur *Jackknife* yaitu menghilangkan satu data dan mengulang proses sebanyak jumlah sampel untuk mengurangi bias pada regresi *ridge*. Metode *Jackknife* memiliki kelebihan yaitu dapat diterapkan pada sampel berukuran kecil dan menghasilkan pendugaan parameter yang akurat (Azis, 2024).

Penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Nasution dkk. (2022) mengenai perbandingan regresi CMP dengan *Poisson Tweedie* dan menunjukkan bahwa regresi CMP memiliki kinerja yang baik pada data dengan tingkat dispersi yang tinggi. Selain itu, penelitian menggunakan pendekatan regresi *ridge* untuk mengatasi multikolinearitas pada regresi Poisson telah banyak dilakukan sebelumnya. Sami dkk. (2022) telah melakukan penelitian terhadap penanganan multikolinearitas pada regresi CMP dengan membandingkan kinerja dari regresi CMP yang diestimasi menggunakan MLE dan regresi *ridge*. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa regresi CMP yang diestimasi menggunakan regresi *ridge* merupakan metode terbaik dalam penanganan multikolinearitas. Sementara itu, penelitian yang dilakukan oleh Palinoan (2023) menggunakan regresi binomial negatif dengan estimasi *Jackknife Negative Binomial Ridge Regression* untuk mengatasi masalah overdispersi dan multikolinearitas pada data angka kematian bayi Provinsi Sulawesi Selatan. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa *Jackknife Negative Binomial Ridge Regression* memiliki kinerja yang baik dalam hal penanganan masalah overdispersi dan multikolinearitas.

Penelitian ini memodelkan regresi CMP pada kasus jumlah kematian ibu di Provinsi Sulawesi Selatan tahun 2021 berdasarkan faktor-faktor yang memengaruhinya untuk mengatasi overdispersi. Selain itu, penelitian ini menerapkan metode *Jackknife Ridge Regression* dalam regresi CMP guna mengatasi multikolinearitas yang tinggi pada variabel prediktor.

1.2 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh model regresi *Conway Maxwell Poisson* dengan metode *Jackknife Ridge Regression* pada kasus jumlah kematian ibu di Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2021.
2. Memperoleh faktor-faktor yang signifikan memengaruhi kasus jumlah kematian ibu di Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2021 berdasarkan model regresi *Conway Maxwell Poisson* dengan metode *Jackknife Ridge Regression*.

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai sarana untuk menambah ilmu dan wawasan terkait penerapan model regresi *Conway Maxwell Poisson* dengan metode *Jackknife Ridge Regression* dalam mengatasi masalah pelanggaran asumsi equidispersi dan masalah multikolinearitas pada data yang diharapkan dapat memberikan referensi bagi penelitian selanjutnya.
2. Sebagai bahan pertimbangan bagi pemerintah dalam mengambil kebijakan untuk mengatasi kasus kematian ibu yang masih tinggi dengan memberikan informasi mengenai faktor-faktor yang memengaruhi kematian ibu di Provinsi Sulawesi Selatan.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Data penelitian yang digunakan yaitu kasus jumlah kematian ibu di Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2021 yang diperoleh dari publikasi Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan dengan enam variabel prediktor yang diduga memengaruhi jumlah kematian ibu.
2. Metode optimasi yang digunakan dalam estimasi parameter model regresi *Conway Maxwell Poisson* yaitu *Newton Raphson*.
3. Uji kebaikan model menggunakan *Root Mean Square Error* (RMSE) dan koefisien determinasi (R^2).

1.4 Landasan Teori

1.4.1 *Generalized Linear Model*

Generalized Linear Model (GLM) merupakan perluasan dari regresi linear klasik ketika variabel respon tidak mengikuti distribusi normal, tetapi termasuk dalam keluarga distribusi eksponensial. Menurut McCullagh dan Nelder (1989) terdapat tiga komponen utama pada GLM, diantaranya yaitu:

1. Komponen acak, diidentifikasi oleh variabel respon Y dengan observasi bebas $(y_1, \dots, y_n)$ dari sebuah distribusi dalam keluarga eksponensial. Menurut Dobson (2002), variabel acak Y termasuk dalam keluarga distribusi eksponensial jika dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi peluang berikut:
$$\begin{aligned} f(y) &= s(y)t(\theta)e^{a(y)b(\theta)} \\ &= \exp[a(y)b(\theta) + c(\theta) + d(y)] \end{aligned} \tag{1}$$
dengan $a(.)$, $b(.)$, $s(.)$, $t(.)$ adalah fungsi yang diketahui, $s(y) = \exp d(y)$, $t(\theta) = \exp c(\theta)$ dan θ adalah parameter dispersi.
2. Komponen sistematik, yaitu hubungan dari sebuah vektor prediktor linear $[\eta_1, \dots, \eta_n]$ untuk menjelaskan variabel-variabel yang berhubungan dalam sebuah model linear.
$$\eta_i = \beta_0 + \beta x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip}$$
$$\eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} \text{ dengan } i = 1,2, \dots, n \tag{2}$$
atau dapat dituliskan dalam bentuk matriks
$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{X\beta} \tag{3}$$
$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$$
dengan n merupakan banyaknya observasi dan p merupakan banyaknya variabel prediktor.
3. Fungsi penghubung (*link function*), yaitu fungsi yang menghubungkan nilai harapan dari variabel respon Y dengan variabel-variabel prediktor melalui persamaan linier. Misalkan $\mu_i = E(Y_i)$, fungsi yang menghubungkan μ_i dengan prediktor linear (η_i) adalah $g(.)$ sehingga $g(\mu_i) = \eta_i$. Fungsi penghubung $g(.)$ menghubungkan $E(Y_i)$ dengan variabel prediktor dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:
$$g(\mu_i) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} \text{ dengan } i = 1,2, \dots, n \tag{4}$$

1.4.2 Regresi Poisson

Regresi Poisson merupakan metode statistika yang dapat digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon Y yang berupa data diskrit dengan variabel prediktor X yang berupa data diskrit atau kontinu. Variabel respon Y pada regresi Poisson diasumsikan berdistribusi Poisson. Menurut Cameron dan Trivedi (1998) variabel acak Y yang bersifat diskrit akan mengikuti distribusi Poisson ketika memiliki fungsi peluang sebagai berikut.

$$f(y,\mu)=\frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}\text{ , untuk } y=0,1,2,\dots;\ \mu>0 \tag{5}$$

dengan $E(Y)=Var(Y)=\mu$.

Untuk mengetahui suatu data berdistribusi Poisson atau tidak, dapat dilakukan uji *Kolmogorov-Smirnov* dengan statistik uji sebagai berikut:

$$D_{hitung}=maks|F_n(Y)-F_0(Y)| \tag{6}$$

dengan:

$F_0(Y)$ = fungsi distribusi kumulatif yang dihipotesiskan

$F_n(Y)$ = fungsi distribusi kumulatif yang diobservasi

Kriteria pengujian dalam *Kolmogorov-Smirnov* yaitu tolak H_0 jika $D_{hitung}>D_{tabel}(\alpha)$ atau nilai signifikansi $<\alpha$ (Justitiaski dkk., 2022).

Regresi Poisson menggunakan GLM agar modelnya dapat digunakan dalam data pengamatan dengan variabel respon yang tidak harus mengikuti distribusi normal. Terdapat sebuah fungsi $g(.)$ dalam GLM yang menghubungkan rata-rata dari variabel respon dengan variabel prediktor, yaitu (Saraiva dkk., 2022).

$$\begin{aligned} g(\mu_i) &= \eta_i \\ &= \beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ij} \\ &= \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \tag{7}$$

dengan $i=1,2,\dots n$ dan $j=1,2,\dots,p$. Sedangkan hubungan antara nilai rata-rata dan variabel prediktor linear dinyatakan sebagai berikut.

$$\mu_i=g^{-1}(\eta_i)=g^{-1}(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta})$$

Model regresi Poisson menggunakan fungsi logaritma natural karena rata-rata dari variabel responnya akan berbentuk eksponensial dan menjamin bahwa variabel yang diestimasi dari variabel responnya akan bernilai non-negatif. Rata-rata dari variabel respon dan variabel prediktor yang dihubungkan dengan fungsi penghubung tersebut berbentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned} g(\mu_i) &= \ln\mu_i=\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} \\ \ln\mu_i &= \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} \\ \mu_i &= \exp(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) \end{aligned} \tag{8}$$

sehingga fungsi massa peluang distribusi Poisson dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$f(y_i;\boldsymbol{\beta})=\frac{e^{-\exp(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta})}(\exp(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}))^{y_i}}{y_i!} \tag{9}$$

dengan $\exp(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta})$ adalah rata-rata distribusi Poisson, y_i adalah variabel respon pada pengamatann ke-*i*, $\boldsymbol{x}_i$ menunjukkan vektor yang berukuran $1\times c$ yang terdiri dari variabel prediktor, dan vektor $\boldsymbol{\beta}$ menunjukkan parameter regresi yang akan diestimasi yang berukuran $c\times 1$ dengan $c=p+1$ (Cahyandari, 2014). Dengan demikian, model regresi Poisson dengan penghubung logaritma natural dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= \mu_i + \varepsilon_i \\ &= \exp(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_i \,, i = 1,2, \dots, n \end{aligned} \tag{10}$$

1.4.3 Equidispersi

Terdapat asumsi yang harus dipenuhi dalam regresi Poisson yaitu nilai varians sama dengan nilai rata-rata dari variabel respon atau equidispersi (Myers dkk., 2010). Akan tetapi, menurut Wang dan Famoye (1997) kenyataan di lapangan sering terjadi pelanggaran asumsi equidispersi, yaitu ketika nilai varians lebih besar dari nilai rata-rata yang dikenal dengan istilah overdispersi atau lebih kecil dari nilai rata-rata yang disebut underdispersi. Overdispersi ataupun underdispersi akan menghasilkan nilai *Deviance* model menjadi sangat besar sehingga model yang dihasilkan menjadi tidak valid (Kondo Lembang dkk., 2019). Sedangkan menurut Hilbe (2011) penerapan model Poisson pada data overdispersi menyebabkan estimasi *standard error* menjadi *underestimate* sehingga parameter variabel tampak signifikan padahal sebenarnya tidak.

Terpenuhi atau tidak asumsi equidispersi dapat dideteksi menggunakan nilai *Deviance* (D^2) atau *Pearson Chi-Square* (χ^2) (McCullagh dan Nelder, 1989):

1. *Deviance*

$$\phi = \frac{D^2}{db} \tag{11}$$

dengan:

$$D^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \ln \left(\frac{y_i}{\mu_i} \right) - (y_i - \mu_i) \right\}$$

2. *Pearson Chi-Square*

$$\phi = \frac{\chi^2}{db} \tag{12}$$

dengan:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \mu_i)^2}{var(\mu_i)}$$

Dalam hal ini, $db = n - c$, n adalah banyaknya observasi, dan $c = p + 1$ adalah banyaknya parameter. Jika nilai $\phi > 1$ maka data mengalami overdispersi dan sebaliknya jika $\phi < 1$ maka data mengalami underdispersi (Hilbe, 2011).

1.4.4 Multikolinearitas

Menurut Majore dkk. (2020) multikolinearitas adalah kondisi ketika terjadi korelasi yang tinggi antarvariabel prediktor dalam model. Permasalahan yang sering muncul pada multikolinieritas yaitu terjadinya korelasi yang cukup tinggi antarvariabel prediktor. Nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) dapat digunakan dalam pendeteksian multikolinearitas yang dituliskan dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \text{ dengan } j = 1,2, \dots, p \tag{13}$$

dengan R_j^2 merupakan nilai koefisien determinasi antara variabel prediktor x_j dengan variabel x lainnya. Nilai VIF mengukur peningkatan varians (atau standar eror) estimasi koefisien regresi yang disebabkan oleh kolinearitas antarvariabel prediktor. Ketika nilai $VIF \geq 10$ menunjukkan bahwa terjadi multikolinearitas (Gujarati, 2004).

1.4.5 Regresi *Conway Maxwell Poisson*

Model regresi *Conway Maxwell Poisson* (CMP) dibentuk berdasarkan distribusi *Conway Maxwell Poisson* yang memiliki dua parameter, diantaranya yaitu parameter μ yang berhubungan dengan rata-rata observasi dan parameter ϕ yang merupakan parameter dispersi. Bentuk fungsi kepadatan peluang distribusi *Conway Maxwell Poisson* dituliskan dalam bentuk berikut (Sellers dan Shmueli, 2010):

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{\mu^y}{(y!)^\phi Z(\mu, \phi)}, \mu > 0;\ \phi \geq 0 \tag{14}$$

dengan $Z(\mu, \phi)$ merupakan konstanta normalisasi.

$$Z(\mu, \phi) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\mu^y}{(y!)^\phi} \tag{15}$$

Karena Persamaan (15) merupakan deret tak hingga yang tidak memiliki bentuk *close form* maka Shmueli dkk. (2005) menyatakan bahwa persamaan tersebut tersebut dianalisis secara asimtotik, yaitu:

$$Z(\mu, \phi) = \frac{\exp\left(\phi \mu^{\frac{1}{\phi}}\right)}{\mu^{\frac{\phi-1}{2\phi}} (2\pi)^{\frac{\phi-1}{2}} \sqrt{\phi}} \tag{16}$$

Parameter μ merupakan nilai ekspektasi dalam distribusi Poisson yang bernilai positif dan $\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ bernilai riil. Hubungan nilai ekspektasi dapat dinyatakan pada persamaan (8). Selanjutnya, dengan mensubtitusikan persamaan (16) dan (8) kedalam persamaan (14) diperoleh seperti persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(y_i; \boldsymbol{\beta}, \phi) &= \frac{(\exp(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{y_i}}{(y_i!)^\phi} \frac{1}{\dfrac{\exp\left(\phi \exp\left(\dfrac{\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi}\right)\right)}{(\exp(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{\frac{\phi-1}{2\phi}} (2\pi)^{\frac{\phi-1}{2}} \sqrt{\phi}}} \\ &= \frac{(\exp(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{y_i}}{(y_i!)^\phi} \frac{(\exp(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{\frac{\phi-1}{2\phi}} (2\pi)^{\frac{\phi-1}{2}} \sqrt{\phi}}{\exp\left(\phi \exp\left(\dfrac{\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi}\right)\right)} \\ &= \frac{(\exp(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{y_i} (\exp(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{\frac{\phi-1}{2\phi}} (2\pi)^{\frac{\phi-1}{2}} \sqrt{\phi}}{(y_i!)^\phi \exp\left(\phi \exp\left(\dfrac{\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\phi}\right)\right)} \end{aligned} \tag{17}$$

Adapun bentuk persamaan regresi CMP dapat dituliskan ke dalam bentuk sebagai berikut:

$$y_i = \mu_i + \varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n \tag{18}$$

1.4.6 *Newton Raphson*

Metode *maximum likelihood* akan menghasilkan persamaan yang non-linear dari suatu parameter sehingga bentuk pasti (*close form*) parameter tersebut sulit ditentukan dan memerlukan metode numerik untuk penyelesaiannya. *Newthon Raphson* merupakan metode yang menggunakan pendekatan satu titik dalam menentukan akar suatu fungsi ketika fungsi tersebut mempunyai turunan. Metode ini digunakan dalam menyelesaikan peramaan non-linear secara iteratif, misalnya mencari parameter lokasi agar suatu fungsi maksimum pada persamaan *likelihood*. Metode *Newton Raphson* memiliki kelebihan konvergensi lebih cepat dalam menentukan akar persamaan (Abidin dkk., 2024). Persamaan iterasi *Newton Raphson* adalah sebagai berikut (Riyantie, 2022):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t+1)} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t)} - \boldsymbol{H}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t)})\boldsymbol{g}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t)} \tag{19}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t)}$ merupakan nilai taksiran parameter pada saat iterasi ke-t, $\boldsymbol{g}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t)}$ merupakan vektor gradien dengan parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t)}$, dan $\boldsymbol{H}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t)}$ madalah matriks Hessian dengan parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{(t)}$.

Adapun langkah-langkah estimasi parameter dengan iterasi *Newton Raphson* adalah sebagai berikut:

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter untuk $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(\mathbf{0})}$ menggunakan menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS).
2. Membentuk vektor gradien ($\boldsymbol{g}$) dengan menggunakan turunan pertama fungsi *log-likelihood*.
3. Membentuk matriks *Hessian* ($\boldsymbol{H}$) dengan menggunakan turunan kedua fungsi *log-likelihood*.
4. Menghitung estimator parameter regresi untuk $t = 0,1,2, \ldots$ menggunakan persamaan (18).
5. Mengulangi iterasi sampai diperoleh nilai parameter yang konvergen, yaitu ketika $\left\|\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{t+1} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{t}\right\| \leq \varepsilon$, dengan ε adalah konstanta positif yang ditentukan.

1.4.7 Regresi *Conway Maxwell Poisson* dengan *Metode Jackknife Ridge Regression*

Regresi *ridge* pertama kali dikenalkan oleh Hoer dan R.W. Kennard pada tahun 1962 sebagai salah satu metode untuk mengatasi masalah multikolinearitas (Anggraeni dkk., 2018). Regresi *ridge* merupakan modifikasi dari metode kuadrat terkecil yang dilakukan dengan menambahkan bias kecil (k) pada diagonal matriks $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ sehingga keofisien penduga *ridge* dipengaruhi oleh tetapan bias k yang bernilai 0 sampai 1 (Arisandi dkk., 2021). Dalam penerapan regresi *ridge*, langkah pertama yang dilakukan adalah mentransformasikan data melalui metode pemusatan (*centering*) dan penskalaan (*scaling*). Menurut Anggraini dkk. (2019) pemusatan merupakan perbedaan/selisih antara masing-masing pengamatan dengan rata-rata dari semua pengamatan. Sedangkan penskalaan meliputi gambaran pengamatan pada kesatuan (unit) standar deviasi dari pengamatan untuk variabel. Transformasi data menggunakan metode pemusatan dan penskalaan bertujuan untuk mempermudah proses analisis data yang memiliki satuan yang berbeda-beda. Akan tetapi, dalam regresi Poisson variabel respon berupa data diskrit dan non-negatif sehingga proses transformasi dilakukan pada variabel prediktor saja (Munawaroh, 2018). Proses pemusatan dilakukan dengan menghilangkan intersep (β_0) sehingga membuat perhitungan regresi menjadi lebih sederhana dan mudah (Ali dan Nugraha, 2019). Sedangkan penskalaan dilakukan mentransformasikan variabel prediktor X dalam bentuk berikut:

$$X_{ij}^{*} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\frac{X_{ij}-\bar{X}_j}{S_{xj}}\right) \text{dengan } S_{xj} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij}-\bar{X}_j\right)^2}{n-1}} \tag{20}$$

dengan $\boldsymbol{X}^*$ merupakan matriks $\boldsymbol{X}$ yang telah ditransformasi.

Menurut Singh dkk. (1986) dalam Algamal dkk. (2023) untuk memperoleh estimator *Conway Maxwell Poisson Ridge Regression* (CMPRR) dapat menggunakan matriks $\boldsymbol{G}$ berukuran $p \times p$ dengan elemen vektor eigen dari $\boldsymbol{X}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}$ dan Λ_{CMPRR} adalah matriks diagonal $\left(\lambda_{1CMPRR}, \dots, \lambda_{pCMPRR}\right)$ yang bersesuaian dengan matriks $\boldsymbol{G}$, sehingga:

$$\begin{aligned} \Lambda_{CMPRR} &= \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{X}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{G} \\ &= (\boldsymbol{X}\boldsymbol{G})^T\widehat{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}) \\ &= \boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} \end{aligned} \tag{21}$$

dengan $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}$ dan $\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$, maka bentuk $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML} &= \left[\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}\right]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\hat{\boldsymbol{s}} \\ &= \left[\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}\right]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} \\ &= \left[\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}\right]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{G}^{-\mathbf{1}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} \\ &= \boldsymbol{G}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} \end{aligned} \tag{22}$$

Estimator $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR}$ diperoleh dengan menambahkan konstanta bias $k\mathbf{I}$ sehingga dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} &= \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\hat{\boldsymbol{s}} \\ &= \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} \\ &= (\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML} \\ &= (\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML} \\ &= (\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B} - k\mathbf{I})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML} \\ &= (\mathbf{I} - k\boldsymbol{B}^{-1})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML} \end{aligned} \tag{23}$$

dengan $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}$.

Metode *Jackknife* berperan dapat mereduksi bias sehingga dapat diperoleh penaksir parameter dengan bias yang kecil. Misalkan $\hat{\boldsymbol{s}}_{-i}$, $\boldsymbol{Z}_{-i}$, $\widehat{\boldsymbol{W}}_{-i}$, ditunjukkan masing-masing, vektor $\boldsymbol{s}$ dengan mengeluarkan baris ke-i, matriks $\boldsymbol{Z}$ dengan mengeluarkan baris ke-i, matriks $\boldsymbol{W}$ dengan mengeluarkan kedua baris dan kolom ke-i. Didefinisikan:

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR-i} = \left(\boldsymbol{Z}_{-i}^T\widehat{\boldsymbol{W}}_{-i}\boldsymbol{Z}_{-i} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_{-i}^T\widehat{\boldsymbol{W}}_{-1}\,\hat{\boldsymbol{s}}_{-i} \tag{24}$$

Persamaan (24) merupakan estimator CMPRR dengan mengeluarkan observasi ke-i dengan: $\boldsymbol{Z}_{-i}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}_{-i}\widehat{\boldsymbol{s}}_{-i} = \boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i$ dan $\left(\boldsymbol{Z}_{-i}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}_{-i}\boldsymbol{Z}_{-i} + k\mathbf{I}\right)^{-1}$ merupakan teorema dari *Sherman-Morrison Woodbury* menggunakan invers jumlah matriks yaitu:

$$\left(\boldsymbol{Z}_{-i}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}_{-i}\boldsymbol{Z}_{-i} + k\mathbf{I}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1} + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1 - \boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}$$

Sehingga Persamaan (24) menjadi:

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR-i} &= \left(\boldsymbol{Z}_{-i}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}_{-i}\boldsymbol{Z}_{-i} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_{-i}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}}_{-i} \\
&= \left[\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1} + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}\right]\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i\right) \\
&= \left[\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}} + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}}\right] \\
&\quad - \left[\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}\right] \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}} - \left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i \\
&\quad - \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+kI\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i} - \left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{i}} \\
&\quad - \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i} - \\
&\quad \left[\frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i - \left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}\right] - \\
&\quad \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR}\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i} - \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} - \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\left(\widehat{\boldsymbol{s}}_i-\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR}\right)}{1-\boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i} \qquad (25)
\end{aligned}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} = \left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}}$.

Menurut Hinkley (1977) mendefinisikan *weighted pseudo-value* dalam persamaan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Q}_i = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + n(1 - \boldsymbol{w}_i)(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} - \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR-i}) \qquad (26)$$

Persamaan (25) disubstitusikan ke dalam Persamaan (26), sehingga diperoleh Persamaan (27) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Q}_i = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + n(1 - \boldsymbol{w}_i)\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} - \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \frac{\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i(\widehat{\boldsymbol{s}}_i - \boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR})}{1 - \boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^{T}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i}\right)$$

$$\boldsymbol{Q}_i = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + n(1-\boldsymbol{w}_i)\left(\frac{\left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i(\widehat{\boldsymbol{s}}_i-\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR})}{1-\boldsymbol{w}_i}\right)$$
$$= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + n\left(\left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i(\widehat{\boldsymbol{s}}_i-\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR})\right) \tag{27}$$

dengan $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{z}_i^T\left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i$.

Selanjutnya estimasi parameter model regresi *Conway Maxwell Poisson* dengan metode *Jackknife Ridge Regression* (CMPJRR) dilakukan dengan mengambil rata-rata *weighted pseudo-value*.

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPJRR} &= \bar{Q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Q}_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + n\left(\left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i(\widehat{\boldsymbol{s}}_i-\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR})\right) \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i(\widehat{\boldsymbol{s}}_i-\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR}) \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\widehat{\boldsymbol{s}}_i - \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i\boldsymbol{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}} - \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} - \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \left(\mathbf{I} - \left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}\right)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} + \left(k\left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\right)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} \\
&= \left(\mathbf{I} + k\left(\boldsymbol{Z}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\right)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR} \\
&= (\mathbf{I} + k\boldsymbol{B}^{-1})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPRR}
\end{aligned} \tag{28}$$

Persamaan (23) disubstitusikan ke dalam persamaan (28) sehingga estimator CMPJRR dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{CMPJRR} &= (\boldsymbol{I} + k\boldsymbol{B}^{-1})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML} \\
&= (\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-2})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML}
\end{aligned} \tag{29}$$

Bentuk estimasi model CMPJRR diperoleh melalui transformasi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{CMPJRR} = \boldsymbol{G}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^*_{CMPJRR}$ yang dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\mu = \exp\left(\left(\hat{\beta}^*_{CMPJRR}\right)_1 X_1 + \left(\hat{\beta}^*_{CMPJRR}\right)_2 X_2 + \cdots + \left(\hat{\beta}^*_{CMPJRR}\right)_p X_p\right) \tag{30}$$

1.4.8 Pemilihan Nilai k

Masalah utama yang dihadapi dalam mengatasi multikolinearitas menggunakan analisis regresi *ridge* adalah penentuan nilai k. Berikut persamaan yang digunakan untuk menentukan nilai k pada CMPJRR (Algamal dkk., 2023):

$$\hat{k}_{CMPJRR} = \min_j\left(\frac{\hat{\phi}}{\hat{\alpha}_j^2}\right) \quad j = 1,2,\ldots,p \tag{31}$$

dengan:

$\hat{\alpha}_j^2$: elemen ke-*j* dari matriks $\left(\boldsymbol{G}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}\right)^2$

$\hat{\phi}$: penduga parameter dispersi

1.4.9 Uji Kebaikan Model

Root Mean Square Error (RMSE) merupakan salah satu metode Pemilihan model terbaik pada analisis regresi. RMSE merupakan besaran untuk melihat *error* yang dihasilkan oleh model. Semakin kecil nilai RMSE maka semakin baik model regresi yang dihasilkan. Nilai RMSE dapat diperoleh melalui Persamaan (32) (Hodson, 2022):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2} \tag{32}$$

Penentuan ukuran kebaikan model juga dapat dilakukan menggunakan koefisien determinasi (R^2). Menurut Mubarak (2021) koefisien determinasi memberikan gambaran variasi total yang dapat dijelaskan oleh model sehingga keakuratan garis regresi dalam menjelaskan kelompok data hasil observasi dapat diketahui. Koefisien determinasi dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{33}$$

1.4.10 Pengujian Simultan Parameter Model

Uji simultan digunakan untuk mengetahui signifikansi parameter β terhadap variabel responnya secara keseluruhan. Uji simultan pada model CMPJRR dapat dilakukan melalui uji F. Hipotesis uji simultan untuk model CMPJRR sebagai berikut:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$

(semua variabel prediktor dalam model tidak berpengaruh terhadap variabel respon)

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_j \neq 0, j = 1,2, \dots, p$

(paling sedikit ada satu variabel prediktor dalam model yang berpengaruh terhadap variabel respon)

Statistik uji F ddidefinsikan sebagai berikut:

$$F = \frac{JKR/p}{JKG/(n-p-1)} \tag{34}$$

dengan JKR merupakan jumlah kuadrat regresi dan JKG adalah jumlah kaudrat galat. Adapun kriteria pengujian hipotesis yaitu tolak H_0 jika nilai $F_{hitung} > F_{(\alpha;p,n-p-1)}$ atau ketika $p - value < \alpha = 0{,}05$. Hal tersebut menunjukkan bahwa minimal ada satu parameter yang berpengaruh secara signifikan (Sulistianingsih dkk., 2023).

1.4.11 Pengujian Parsial Parameter Model

Pengujian parameter model CMPJRR secara parsial dilakukan menggunakan statistik uji t untuk menguji signifikansi parameter regresi secara parsial pada masing-masing variabel prediktor. Hipotesis uji parsial untuk model CMPJRR sebagai berikut:

$H_0 : \beta_j = 0$ (tidak terdapat pengaruh signifikan antara variabel prediktor terhadap variabel respon).
$H_1 : \beta_j \neq 0$ (masing-masing variabel prediktor berpengaruh signifikan terhadap variabel respon, untuk $j = 1,2, \dots, p$).
Statistik uji t didefinsikan sebagai berikut:

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \quad j = 1,2, \dots, p \tag{35}$$

dengan $\hat{\beta}_j$ sebagai penduga dari β_j dan $SE(\hat{\beta}_j)$ sebagai *standard error* penduga galat baku β_j. Adapun kriteria pengujian hipotesis yaitu tolak H_0 ketika nilai $|t_{hitung}| > t_{(\alpha/2pnp-1)}$ atau jika $p - value < \alpha = 0{,}05$ (Deria, 2019).

1.4.12 Angka Kematian Ibu

Kematian ibu adalah kematian perempuan pada saat hamil atau kematian dalam kurun waktu 42 hari sejak terminasi kehamilan tanpa memandang lamanya kehamilan, yaitu kematian yang disebabkan karena kehamilannya atau penanganannya, tetapi bukan karena sebab-sebab lain seperti kecelakaan dan terjatuh. Kematian ibu dikelompokkan menjadi dua yaitu kematian langsung yang disebabkan oleh komplikasi yang berhubungan dengn kehamian, persalinan& nifas, kelalaian perawatan yang tidak memadai atau kombinasinya dan kematian tidak langsung yang berasal dari penyakit yang sudah ada sebelumnya dan diperparah oleh fisiologis kehamilan (World Health Organization, 2023). Angka Kematian Ibu (AKI) dihitung per 100.000 kelahiran hidup pada tahun tertentu. AKI mencerminkan tingkat kesadaran perilaku hidup sehat, status gizi dan kesehatan ibu, kondisi kesehatan lingkungan, tingkat pelayanan kesehatan terutama untuk ibu hamil, serta pelayanan kesehatan waktu ibu melahirkan dan masa nifas (Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan, 2022). Upaya penurunan AKI dilakukan dengan menjamin agar setiap ibu dapat mengakses pelayanan kesehatan yang berkualitas, seperti pelayanan kesehatan ibu hamil, pertolongan persalinan oleh tenaga kesehatan terlatih di fasilitas pelayanan kesehatan, perawatan pasca persalinan bagi ibu dan bayi, perawatan khusus dan rujukan jika terjadi kompilkasi, serta pelayanan keluarga berencana (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2020).

Menurut Kementerian Kesehatan Republik Indonesia (2022) penurunan AKI dilakukan melalui beberapa upaya, diantaranya yaitu:

1. Pelayanan kesehatan ibu hamil diberikan oleh tenaga kesehatan terlatih di fasilitas kesehatan. Pelayanan ini berlangsung sepanjang masa kehamilan, yang dikelompokkan sesuai usia kehamilan menjadi trimester pertama, trimester kedua, dan trimester ketiga. Adapun cakupan K1, K4 dan K6 digunakan sebagai penilaian dalam pelaksanaan pelayanan kesehatan ibu hamil.
2. Pemberian imunisasi tetanus difteri pada wanita usia subur, termasuk ibu hamil sebagi upaya mengendalikan infeksi tetanus yang merupakan salah satu faktor risiko kematian ibu dan bayi, serta memberikan perlindungan tambahan terhadap penyakit difteri. Imunisasi Td ditargetkan pada wanita usia subur yang hamil atau

tidak, dalam kelompok usia 15-39 tahun. Untuk ibu hamil, dikatakan bahwa mereka telah menerima imunisasi Td2+ jika telah mendapatkan imunisasi Td2 hingga Td5.

3. Pemberian tablet tambah darah pada ibu hamil untuk mencegah terjadinya anemia yang dapat meningkatkan risiko kelahiran prematur, kematian ibu dan anak, serta penyakit infeksi.
4. Pelayanan kesehatan ibu bersalin oleh tenaga kesehatan yang kompeten seperti dokter spesialis kebidanan (SpOG), dokter umum, bidan, dan perawat, yang di fasilitas pelayanan kesehatan. Ketersediaan tenaga kesehatan dalam intitusi rumah sakit atau puskesmas pada suatu daerah sangatlah penting karena jika jumlah tenaga medis terpenuhi dalam suatu daerah maka pelayanan kesehatan akan terjamin.
5. Pelayanan kesehatan ibu nifas dilakukan minimal empat kali dengan waktu kunjungan ibu dan bayi baru lahir bersamaan yaitu pada hari ketiga sampai hari ketujuh setelah persalinan (KF1), pada hari kedelapan sampai hari ke-28 setelah persalinan (KF2), dan pada hari ke-29 sampai 42 hari setelah persalinan (KF3).
6. Pelayanan kontrasepsi yang meliputi konseling, pemberian, pemasangan, serta pencabutan kontrasepsi dalam rahim, termasuk penanganan akibat komplikasi maupun efek samping untuk mencegah kehamilan.

BAB II
METODE PENELITIAN

2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam peneltian ini adalah data sekunder yang merupakan data kuantitatif mengenai Jumlah Kematian Ibu di Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2021. Data tersebut diperoleh dari buku Profil Kesehatan Sulawesi Selatan Tahun 2022 yang diterbitkan oleh Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan. Unit penelitian dalam penelitian ini yaitu 24 kabupaten/kota di Provinsi Sulawesi Selatan.

2.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari 1 variabel respon (Y) dan 6 variabel prediktor (X) dengan rincian sebagai berikut:

Tabel 1. Variabel Penelitian

Variabel	Keterangan	Satuan
Y	Jumlah Kematian Ibu	Jiwa
X_1	Persentase Ibu Hamil yang Mendapatkan Tablet Tambah Darah	%
X_2	Jumlah Ibu Hamil yang Menerima Imunisasi Td2+	Jiwa
X_3	Jumlah Peserta KB Aktif	Jiwa
X_4	Perkiraan Jumlah Ibu Hamil dengan Komplikasi Kebidanan	Jiwa
X_5	Jumlah Tenaga Keperawatan dan Kebidanan di Fasilitas Kesehatan	Jiwa
X_6	Jumlah Cakupan Pelayanan KF3 Ibu Bersalin/Nifas	Jiwa

2.3 Tahapan Analisis

Tahapan analisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan analisis statistik deskriptif pada data jumlah kematian ibu di Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2021 berdasarkan faktor-faktor yang memengaruhinya.
2. Melakukan uji distribusi Poisson menggunakan statistik uji *Kolmogoriv Smirnov*.
3. Melakukan pengujian equidispersi dengan menghitung nilai *Deviance* dan *Pearson Chi-Square* yang dibagi dengan derajat bebas menggunakan Persamaan (11) dan Persamaan (12). Jika nilai $\phi > 1$ maka data mengalami overdispersi dan sebaliknya jika $\phi < 1$ maka data mengalami underdispersi.
4. Melakukan pendeteksian multikolinearitas dengan melihat nilai korelasi antar variabel prediktornya dan nilai VIF menggunakan Persamaan (13).
5. Memodelkan data menggunakan model CMPJRR dalam mengatasi masalah multikolinearitas dan overdispersi menggunakan bantuan *Software Rstudio* melalui langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Melakukan transformasi korelasi dengan metode *centering* dan *scaling* terhadap variabel perdiktor menggunakan Persamaan (20).

b. Menganalisis data hasil *centering* dan *scaling* menggunakan model regresi CMP dengan *Maximum Likelihood Estimation* untuk menghasilkan pendugaan parameter ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{ML}$).
c. Membentuk matriks $\boldsymbol{X}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}$ menggunakan data hasil transformasi dengan $\widehat{\boldsymbol{W}}$ merupakan matriks diagonal dari $\boldsymbol{V_i}$, dimana $\boldsymbol{V}_i = \frac{\tau_i}{\phi} + \frac{\phi^2-1}{24\phi^3}\tau_i^{-1} + \frac{\phi^2-1}{12\phi^4}\tau_i^{-2} + \frac{\phi^2-1}{6\phi^4}\tau_i^{-3}$ dengan $\tau_i = \frac{\widehat{\mu}_i}{\phi}$ (Sami dkk., 2022).
d. Membentuk matriks $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{XG}$ dengan $\boldsymbol{G}$ merupakan vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{X}^T\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}$.
e. Menghitung estimator $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^*_{ML} = \boldsymbol{G}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{ML}$.
f. Menghitung nilai tetapan bias k menggunakan Persamaan (31).
g. Mensubstitusikan nilai k untuk memperoleh estimator model CMPJRR menggunakan Persamaan (29).
h. Membentuk model CMPJRR dari data transformasi dengan mensubstitusikan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^*_{CMPJRR}$ sehingga diperoleh persamaan regresi *ridge* yang asli dengan transformasi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*_{CMPJRR} = \boldsymbol{G}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^*_{CMPJRR}$.
i. Mentransformasikan persamaan regresi ke bentuk awal tanpa *centering* dan *scaling* menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}S_{xj}}\right)\hat{\beta}^*_{CMPJRR}$$

$$\hat{\beta}_0 = \ln(\bar{Y}) - \beta_{CMPJRR1}\bar{X}_1 - \beta_{CMPJRR1}\bar{X}_2 - \cdots - \beta_{CMPJRRp}\bar{X}_p$$

Dengan S_{xj} merupakan standar deviasi data awal X_j, sedangkan $\bar{X}_j$ merupakan rata-rata data awal X_j sebelum ditansformasi.
j. Melakukan pengujian signifikansi parameter model CMPJRR menggunakan Persamaan (34) untuk pengujian simultan dan Persamaan (35) untuk pengujian parsial.
k. Menentukan model terbaik menggunakan Persamaan (32) dan Persamaan (33).
l. Interpretasi dan menarik kesimpulan.