BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pertumbuhan ekonomi merupakan salah satu indikator utama keberhasilan pembangunan suatu daerah. Untuk mengukur kondisi ekonomi di suatu wilayah dalam periode tertentu, dapat dilihat dari data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB), baik atas dasar harga berlaku maupun atas dasar harga konstan. Data ini digunakan sebagai bahan perencanaan pembangunan nasional atau regional khususnya di bidang ekonomi. Data PDRB tersebut juga dapat dipakai sebagai bahan evaluasi dari hasil pembangunan ekonomi yang telah dilaksanakan oleh berbagai pihak, baik pemerintah pusat, pemerintah daerah, maupun swasta(BPS, 2021). Dengan mengetahui faktor-faktor yang memengaruhi PDRB, pemerintah dapat menyusun kebijakan yang lebih terarah guna meningkatkan daya saing, mengurangi ketimpangan ekonomi, dan mendorong pembangunan berkelanjutan. Salah satu metode yang umum digunakan untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh tersebut adalah analisis regresi.

Analisis regresi adalah teknik yang digunakan untuk memperoleh model hubungan antara satu variabel dependen dengan satu atau lebih variabel independen (Johan Harlan, 2018). Metode yang paling umum digunakan untuk mengestimasi parameter regresi adalah Metode Kuadrat Terkecil (MKT) yang dapat menghasilkan estimasi parameter yang baik jika asumsi klasik terpenuhi. Pemodelan regresi dengan melibatkan banyak variabel independen seringkali muncul masalah multikolinearitas, yaitu adanya hubungan atau korelasi yang tinggi antar variabel independen. Efek dari multikolinearitas dapat menyebabkan estimasi parameter regresi yang dihasilkan dari analisis regresi linear menjadi tidak efisien karena dapat mengakibatkan regresi memiliki bias dan varians yang besar (Sungkono & Nugrahaningsih, 2017). Menurut Aboye dkk (2014), multikolinearitas memengaruhi standar residual estimasi koefisien regresi sehingga hasil estimasi bisa jadi tidak akurat. Hal ini dianggap sebagai suatu kelemahan dalam analisis regresi karena bisa menghasilkan kesimpulan yang kurang akurat (Millenia,2021). Oleh sebab itu, penting untuk mengatasi masalah multikolinearitas agar analisis regresi dapat menghasilkan hasil yang valid.

Metode umum yang diterapkan untuk mengatasi masalah multikolinearitas pertama kali diperkenalkan oleh Hoerl dan Kennard pada tahun 1970. Metode RR pada dasarnya merupakan modifikasi dari MKT dengan penambahan konstanta bias pada matriks diagonalnya. Metode RR memiliki beberapa pengembangan, meliputi *Generalized Ridge Regression* (GRR) dan *Jackknife Ridge Regression* (JRR). Metode GRR merupakan pengembangan dari metode RR dengan penambahan konstanta bias yang berbeda pada matriks diagonalnya. Metode JRR merupakan pengembangan dari metode GRR dengan lebih menekankan pengurangan bias pada penduga *ridge* (Devita H, dkk., 2014). Selanjutnya, *Modified Jackknife Ridge*

Regression (MJRR) diperkenalkan oleh Batah dkk (2008) yang merupakan kombinasi antara GRR dan JRR (Arrasyid et al., 2021). Batah dkk (2008) menunjukkan bahwa MJRR memiliki kinerja yang lebih baik dari GRR dan JRR bedasarkan nilai MSE. Selain multikolinieritas, pelanggaran asumsi lain yang sering terjadi adalah data yang tidak berdistribusi normal, yang dapat disebabkan oleh adanya pencilan dalam data.

Pencilan merupakan data yang menyimpang dari sekumpulan data yang lainnya (Daniel, 2021). Kehadiran pencilan dalam data dapat menyebabkan bias dalam analisis, sehingga berpotensi menghasilkan kesimpulan yang kurang akurat. Oleh karena itu, penting untuk menangani pencilan agar hasil analisis lebih dapat diandalkan. Ada dua cara untuk menangani hal tersebut, yaitu cara pertama dapat dilakukan dengan menghapus pencilan dalam data. Namun, beberapa data pencilan seringkali memberikan informasi yang penting, sehingga tidak dapat dihilangkan begitu saja. Cara kedua dengan tetap mempertahankan seluruh data, tetapi menggunakan analisis yang dapat menangani pencilan (Perihatini, 2018).

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menangani pencilan adalah dengan menggunakan regresi *robust*. Metode ini digunakan untuk menduga parameter model regresi dari data yang dipengaruhi oleh pencilan sehingga dihasilkan model yang *robust* atau tahan terhadap pencilan. Prinsip dasar metode regresi *robust* adalah memberikan pembobot dalam proses estimasi parameter model regresi sehingga galat yang dihasilkan berdistribusi normal (Nugroho, 2016). Terdapat beberapa estimasi dalam regresi *robust*, salah satunya adalah estimasi MM (Chen, 2002). Estimator ini diperkenalkan oleh Yohai dkk (1987) yang merupakan gabungan efisiensi dan *breakdown point* yang tinggi (Shodiqin et al., 2018). Nilai *breakdown point* yang tinggi menyebabkan estimasi MM bekerja dengan baik untuk mengestimasi parameter pada data yang mengandung pencilan.

Penelitian sebelumnya, dilakukan oleh Rahmawati (2016) dan Fitriani (2019) yang menggunakan MJRR dalam mengatasi masalah multikolinearitas. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa hasil estimasi menggunakan MJRR lebih baik dibandingkan estimasi menggunakan GRR dan JRR. Metode serupa telah diterapkan oleh Fadhilah (2020) dan Munawaroh (2018) dalam penelitiannya dengan menggunakan pendekatan tersebut pada analisis regresi Poisson. Dalam mengatasi masalah multikolinearitas dan pencilan, penelitian telah dilakukan oleh Kingsley C. Arum, dkk (2022) dengan mengintegrasikan MJRR dengan *transformed M-estimator* (MT) pada model regresi poisson. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa *robust modified jackknife ridge estimator* yang diusulkan mengungguli estimator lain karena memiliki nilai MSE terkecil.

Berdasarkan uraian yang dibahas sebelumnya, maka penulis ingin mengkaji penelitian mengenai PDRB Indonesia pada tahun 2022 beserta faktor – faktor yang memengaruhinya. Dalam kasus ini, terdapat masalah pelanggaran asumsi multikolinearitas dan terindikasi oleh adanya pencilan. Oleh karena itu, penulis akan menerapkan metode *Robust* MJRR dengan menggunakan *MM- estimator* dalam penelitian ini.

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah agar pembahasan pada penelitian ini lebih terstruktur sebagai berikut:

1. Data yang digunakan adalah data PDRB Indonesia pada tahun 2022.
2. Menggunakan *MM-estimator* dengan pembobot *Tukey Bisquare* untuk mencapai sifat *robust* pada regresi.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Memperoleh penduga model PDRB Indonesia pada tahun 2022 menggunakan *Robust* MJRR dengan *MM-estimator*.
2. Memperoleh faktor-faktor yang memengaruhi PDRB Indonesia pada tahun 2022 menggunakan *Robust* MJRR dengan *MM-estimator*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Menambah ilmu dan wawasan terkait *Robust* MJRR untuk mengatasi masalah multikolinearitas dan pencilan pada data PDRB Indonesia tahun 2022.
2. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan masukan kepada pemerintah khususnya instansi terkait dalam menentukan kebijakan guna meningkatkan PDRB di Indonesia.

1.5 Teori

1.5.1 Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda adalah suatu model persamaan yang digunakan untuk menjelaskan keterkaitan antara suatu variabel dependen dengan satu atau lebih variabel independen. Tujuan dari regresi linier berganda adalah untuk melakukan prediksi nilai variabel dependen berdasarkan nilai variabel independen yang diketahui. Bentuk umum persamaan regresi linier berganda dapat ditulis sebagai berikut (Montgomery et al., 2013):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_j X_{ij} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \tag{1}$$

dengan,

y_i = variabel dependen untuk observasi ke-*i* (*i* = 1,2,…n)

β_0 = konstanta

β_j = koefisien regresi variabel independen ke-*j* (*j* = 1,2,…k)

X_{ij} = variabel independen ke-*j* untuk observasi ke-*i*

ε_i = variabel residual ke-*i*

Persamaan (1) dapat diubah ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks di atas dapat ditulis secara sederhana menjadi:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e} \tag{2}$$

1.5.2 Multikolinearitas

Multikolinearitas terjadi ketika dua atau lebih variabel independen dalam model memiliki hubungan yang kuat satu sama lain. Multikolinearitas terjadi apabila terdapat hubungan atau korelasi di antara beberapa atau seluruh variabel independen. Multikolinearitas dalam suatu model regresi dapat diketahui dengan menghitung nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Gejala multikolinearitas terjadi jika nilai $VIF \geq 10$. Perhitungan nilai VIF dapat dilakukan menggunakan rumus berikut (Montgomery et al., 2013):

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \tag{3}$$

dengan R_j^2 adalah nilai koefisien determinasi masing – masing dari variabel independen X_j yang diregresikan terhadap variabel independen lainnya.

1.5.3 Pencilan

Pencilan adalah data yang letaknya jauh dari pola data yang dimungkinkan memiliki pengaruh terhadap model regresi yang dibuat. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mendeteksi adanya pencilan adalah *difference in fit standardized* (DFFITS). Rumus untuk menghitung nilai DFFITS sebagai berikut (Kamaluddin, 2023):

$$DFFITS_i = t_i \sqrt{\frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}} \tag{4}$$

dengan

$$t_i = e_i \sqrt{\frac{n - k - 1}{JKG(1 - h_{ii}) - e_i^2}} \tag{5}$$

dengan t_i adalah *R-student (studentized delected residual)* kasus ke-*i*, e_i adalah residual ke-*i*, JKG adalah jumlah kuadrat galat, k adalah banyaknya variabel independen dan h_{ii} merupakan diagonal utama dari matriks hat (**H**). Pengamatan ke-*i* dikatakan pencilan jika $|DFFITS_i| > 2\sqrt{\frac{p}{n}}$ dimana k merupakan jumlah parameter dan n banyaknya pengamatan.

1.5.4 Metode Pemusatan dan Penskalaan

Pemusatan dan penskalaan merupakan bagian dari membakukan variabel. Pemusatan merupakan perbedaan antara masing-masing pengamatan dan rata-rata dari semua pengamatan untuk setiap variabel. Sedangkan penskalaan meliputi gambaran pengamatan pada kesatuan (unit) simpangan baku dari pengamatan untuk variabel. Transformasi korelasi merupakan fungsi sederhana dari pembakuan variabel, sehingga melalui transformasi diperoleh persamaan berikut (Kutner et al, 2005).

$$X_{ij}^* = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{S_{X_j}}\right) \quad \text{dengan } S_{X_j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_j\right)^2}{n-1}} \tag{6}$$

$$Y_i^* = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y}\right) \quad \text{dengan } S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}} \tag{7}$$

dengan

$\bar{X}_j$ = rata – rata dari pengamatan X_j

$\bar{Y}$ = rata – rata dari Y

S_Y = simpangan baku dari variabel Y

S_{X_j} = simpangan baku dari variabel X_j

$i = 1,2,\dots,n$

$j = 1,2,\dots,k$

Model regresi dengan variabel yang telah ditransformasikan disebut sebagai model regresi baku dan dinyatakan sebagai berikut.

$$y_i^* = \beta_1^* X_{i1}^* + \beta_2^* X_{i2}^* + \cdots + \beta_j^* X_{ij}^* + \cdots + \beta_k^* X_{ik}^* + \varepsilon_i^* \tag{8}$$

Terdapat suatu hubungan linear antara parameter β_1^*, β_2^*, ..., β_k^* regresi baku dan parameter β_1^*, β_2^*, ..., β_k^* dalam model regresi linear berganda. Hubungan antara kedua parameter dari dua model yang berbeda tersebut dijabarkan seperti di bawah ini.

$$\beta_j = \left(\frac{S_Y}{S_X}\right) \times \beta_j^*, \quad j = 1,2,..,k \tag{9}$$

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}_1 - \beta_2 \bar{X}_2 - \cdots - \beta_k \bar{X}_k \tag{10}$$

1.5.5 *Generalized Ridge Regression*

Persamaan umum GRR diperoleh dengan mereduksi $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{X}$ menjadi matriks diagonal dengan menerapkan transformasi $\boldsymbol{T}$. Diberikan $\boldsymbol{\Lambda}$ matriks diagonal berukuran $(p \times p)$ dengan elemen diagonalnya merupakan nilai eigen dari $\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*$ dan $\boldsymbol{T}$ merupakan matriks ortogonal berukuran $p \times p)$ yang elemen – elemennya adalah nilai eigen vektor dari $\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*$. Berdasarkan hal tersebut maka

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{\Lambda} \\ (\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{T})'\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{\Lambda} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} \quad = \boldsymbol{\Lambda} \tag{11}$$

$\boldsymbol{T}$ merupakan matriks ortogonal maka $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{I}$ sehingga Persamaan (2) berubah menjadi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^* &= \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{y}^* &= (\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{y}^* &= \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \tag{12}$$

dengan $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{T}$ dan $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{\beta}$

Dengan menggunakan MKT dan berdasarkan persamaan (11) estimator $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{LS}}$ adalah:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{LS}} &= (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* \\ &= \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* \end{aligned} \tag{13}$$

Persamaan (13) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{LS}} &= \left((\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{T})'(\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{T})\right)^{-1}(\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{T})'\boldsymbol{y}^* \\ &= (\boldsymbol{T}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{y}^* \\ &= (\boldsymbol{T}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*)^{-1}(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*)\widehat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \boldsymbol{T}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \tag{14}$$

Estimator $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{GRR}}$ diperoleh dengan menambahkan konstanta bias $\alpha\boldsymbol{I}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} &= (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* \\ &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* \\ &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{I})\widehat{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{-1}\alpha\boldsymbol{I})\widehat{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\alpha\boldsymbol{I})\widehat{\boldsymbol{\gamma}} \end{aligned} \tag{15}$$

dengan $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-1}$

1.5.6 *Jackknife Ridge Regression*

JRR merupakan pengembangan dari GRR dengan cara melakukan melakukan *resampling jackknife* pada parameter GRR. Metode *jackknife* dalam menduga regresi bekerja dengan menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak jumlah sampel data yang ada (Iskandar et al., 2013). Untuk menghindari bias pada penduga GRR, Singh dkk (1986) menyarankan untuk menggunakan teknik JRR sehingga $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}$ tanpa pengamatan ke -i dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-i)} = \left(\boldsymbol{Z}'_{(-i)}\boldsymbol{Z}_{(-i)} + \alpha\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}'_{(-i)}\boldsymbol{y}^*_{(-i)} \tag{16}$$

Jika $\boldsymbol{z_i}$ adalah vektor kolom berukuran $(n \times 1)$ yang berisi observasi ke-i dari matriks $\boldsymbol{Z}$, sehingga $\boldsymbol{z_1'} = [z_{11} \quad z_{12} \quad \cdots \quad z_{1k}]$ dan y_i^* merupakan observasi ke-i dari vektor $\boldsymbol{y}$, dengan $\boldsymbol{Z}_{(-i)}'\boldsymbol{Z}_{(-i)} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{z_i}\boldsymbol{z_i'}$ dan $\boldsymbol{Z}_{-i}'\boldsymbol{y}_{-i}^* = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{z_i}\boldsymbol{y_i^*}$, maka

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-i)} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}\boldsymbol{i}_i' + \alpha\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*) \tag{17}$$

Selanjutnya, menggunakan invers jumlahan matriks yang diperkenalkan oleh Miller (1980) dalam Millenia (2021).

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}')^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1 - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{c}}$$

dengan $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})$ dan $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{z}_i$ maka diperoleh

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i')^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i}$$

Sehingga Persamaan (17) menjadi

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-i)} &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i')^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{z_i}\boldsymbol{y}_i^*) \\
&= \left(\boldsymbol{A}^{-1} + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i}\right)(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*) \\
&= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^* + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^*) - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i}(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*) \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*(1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i)}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^*)}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} \\
&\quad - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*)}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \left(\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^* - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i}\right) + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^*)}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} \\
&\quad - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*)}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^*)}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} \\
&\quad - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*)}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} + \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}^*)}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} \\
&= \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \left(\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i^*}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i}\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \left(\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i(\boldsymbol{y}_i^* - \boldsymbol{z}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR})}{1 - \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i}\right)$$

Dengan $e_i = \boldsymbol{y}_i^* - \boldsymbol{z}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}$ dan $h_i = \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i$, maka uraian di atas dapat disederhanakan sebagai berikut.

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{e}_i}{1 - \boldsymbol{h}_i} \tag{18}$$

Hinkley (1977) dalam Singh (1986) mengusulkan nilai *pseudo values* sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_i &= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + n(1 - \boldsymbol{h}_i)(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR(-1)}) \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + n(1 - \boldsymbol{h}_i)(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{e}_i}{1 - \boldsymbol{h}_i}\right) \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + n(1 - \boldsymbol{h}_i)\left(\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{e}_i}{1 - \boldsymbol{h}_i}\right) \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + n\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{e}_i
\end{aligned} \tag{19}$$

Estimasi parameter dengan teknik *jackknife* dilakukan dengan mengambil rata – rata dari *pseudo values* sehingga dengan menggunakan Persamaan (19) didapatkan penaksir JRR sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR} &= \bar{\boldsymbol{Q}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Q}_i \\
&= \frac{1}{n}\sum(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + n\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{e}_i) \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + \boldsymbol{A}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{z}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}) \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + \boldsymbol{A}^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}) \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + \boldsymbol{A}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{A}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} + (\boldsymbol{A}^{-1}\alpha\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\
&= [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\alpha\boldsymbol{I}]\,\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\
&= [\boldsymbol{I} + ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-1}\alpha\boldsymbol{I})]\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\
&= (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-1}\alpha\boldsymbol{I})^2)\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{LS}
\end{aligned} \tag{20}$$

1.5.7 *Modified Jackknife Rige Regression*

MJRR merupakan pengembangan dari JRR dan merupakan gabungan dari metode GRR dan JRR. Metode JRR didefinisikan pada Persamaan (20) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{JRR} &= [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I}]\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\ &= [\boldsymbol{I} + ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})]\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\ &= (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{\mathbf{2}})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{LS}\end{aligned}$$

Pada persamaan di atas $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{LS}$ dapat dituliskan sebagai transformasi linear dari $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR}$ yang merupakan estimator GRR, sehingga dapat dibentuk persamaan MJRR sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MJR} &= (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{2})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{LS} \\ &= (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{2})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GRR} \\ &= (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{\mathbf{2}})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{\mathbf{2}})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{\mathbf{2}})(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{LS} \\ &= \boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{\mathbf{2}})(\boldsymbol{I} - \alpha\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \alpha\boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}})\,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{LS} \\ &= (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{\mathbf{2}})(\boldsymbol{I} - \alpha\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{LS} \qquad (21)\end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\gamma}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MJR}$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MJR} = \boldsymbol{T}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MJR} \qquad (22)$$

Variansi dan MSE dapat diperoleh pada persamaan berikut (Batah et al., 2008).

1. Variansi

   $$Var(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MJR}) = \sigma^2\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{W}' \qquad (23)$$

   Dengan $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{A})^{-1}\alpha\boldsymbol{I})^2)(\boldsymbol{I} - \alpha\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A}^{-1}))$

2. MSE

   $$MSE(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MJR}) = \sigma^2\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{W}' + \boldsymbol{K\Phi A}^{-\mathbf{1}}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}'\boldsymbol{A}^{-1}\alpha\boldsymbol{I} \qquad (24)$$

   Dengan $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{I} + \alpha\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A}^{-1}) - \alpha\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathbf{2}}]$

1.5.8 *Robust MM – Estimator*

Menurut Chen (2002), regresi *robust* adalah metode yang penting untuk menganalisis data yang terkontaminasi oleh pencilan. Regresi yang kuat dapat mengatasi bias (penyimpangan) dalam MKT. Regresi *robust* digunakan ketika data dalam regresi linier memiliki pencilan dan distribusi model tidak normal (Kalina & Tichavský, 2020). Salah satu estimasi yang sering digunakan dalam regresi *robust* adalah dengan menggunakan *MM-estimator*.

MM-estimator merupakan metode yang pertama kali diperkenalkan oleh Yohai pada tahun 1987 yang menggabungkan suatu *high breakdown point* (50%) dengan efisiensi tinggi (mencapai 95%). Langkah pertama dalam *MM-estimator* adalah dengan mencari *S-estimator* yang sangat *robust* dan resisten yang meminimumkan suatu skala residual. Kemudian skala residual tetap konstan dan diakhiri dengan menetapkan parameter – parameter regresi menggunakan *M-estimator. MM-estimator* dapat diperoleh dari meminimumkan suatu jumlahan dari skala residual.

$$\min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{e_i}{\hat{\sigma}_s}\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j}{\hat{\sigma}}\right) \tag{25}$$

Persamaan (25) kemudian diturunkan terhadap γ_j kemudian disamakan dengan nol, seperti berikut.

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j}{\hat{\sigma}}\right)}{\partial \gamma_j} = 0 \tag{26}$$

Karena $e_i = yi - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j$, maka $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}$ sehingga Persamaan (26) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i)}{\partial \gamma_j} = 0$$

Dengan menggunakan aturan berantai, diperoleh:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i)}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i)}{\partial u_i} \times \frac{\partial u_i}{\partial \gamma_j} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i)}{\partial \gamma_j} \times \frac{\partial \frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j}{\hat{\sigma}}}{\partial \gamma_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \rho'(u_i) \times \left(-\frac{Z_{ij}}{\hat{\sigma}}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \rho'\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j}{\hat{\sigma}}\right) \times \left(-\frac{Z_{ij}}{\hat{\sigma}}\right) = 0$$

Selanjutnya, masing – masing ruas dikalikan dengan $(-\hat{\sigma})$ sehingga diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}\rho'\left(y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j\right) = 0 \tag{27}$$

dengan $\rho' = \psi$ merupakan fungsi pengaruh, sehingga Persamaan (27) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}\psi\left(y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j\right) = 0 \tag{28}$$

Fungsi pengaruh kemudian digunakan untuk memperoleh pembobot sebagai berikut.

$$w(u_i) = w_i = \frac{\psi(u_i)}{u_i} = \frac{\psi\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j}{\hat{\sigma}}\right)}{\frac{y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j}{\hat{\sigma}}}$$

Maka, Persamaan (28) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}w_i\left(y_i - \sum_{j=0}^{p} Z_{ij}\gamma_j\right) = 0 \tag{29}$$

Kemudian diselesaikan dengan *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS). Estimasi awal $\hat{\beta}^{(1)}$ dan residual $e_i^{(1)}$ diperoleh dari regresi *robust* dengan *high breakdown point* (S-*Estimator*) untuk pembobot awal menggunakan pembobot $w_i^{(1)}$, maka:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_{ij} w_i y_i - \sum_{i=1}^{n} Z_{ij} w_i \sum_{j=0}^{p} Z_{ij} \gamma_j = 0 \tag{30}$$

Dalam bentuk matriks, Persamaan (30) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z'Wy} - \boldsymbol{Z'WX\hat{\gamma}} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Z'Wy} &= \boldsymbol{Z'WX\hat{\gamma}} \end{aligned} \tag{31}$$

dengan **W** merupakan matriks diagonal berukuran $(n \times n)$ dengan elemen diagonalnya $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ dan n adalah banyaknya observasi. Untuk setiap $\boldsymbol{W}$ diperoleh estimator $\boldsymbol{\hat{\gamma}}$ dari Persamaan (30) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{Z'WZ})^{-1} - \boldsymbol{Z'Wy} &= (\boldsymbol{Z'WZ})^{-1}\boldsymbol{Z'WZ\hat{\gamma}} \\ (\boldsymbol{Z'WZ})^{-1}\boldsymbol{Z'Wy} &= \boldsymbol{\hat{\gamma}} \\ \boldsymbol{\hat{\gamma}}_{MM} &= (\boldsymbol{Z'WZ})^{-1}\boldsymbol{Z'Wy} \end{aligned} \tag{32}$$

Estimasi $\boldsymbol{\hat{\gamma}}_{MM}$ dilakukan hingga mendapatkan $\sum_{i=0}^{n} \left| e_i^{(m)} \right|$ konvergen, yaitu selisih $\hat{\gamma}_j^{m+1}$ dan $\hat{\gamma}_j^{(m)}$ mendekati 0, dengan m adalah banyaknya iterasi.

1.5.9 Fungsi Objektif

Fungsi objektif adalah fungsi yang digunakan untuk mencari pembobot pada regresi *robust* (Mardiana, 2019). Salah satu fungsi pembobot yang dapat digunakan adalah fungsi pembobot *Tukey Bisquare* sebagai berikut.

$$w_i = \begin{cases} \left[1 - \left(\dfrac{u_i}{c}\right)^2\right]^2, & |u_i| \le c \\ 0, & |u_i| > c \end{cases} \tag{33}$$

Dengan $\boldsymbol{u_i} = \frac{\boldsymbol{e_i}}{\boldsymbol{\hat{\sigma}}}$ dan *c* adalah *tuning constant*. Diketahui nilai *tuning constant* pada metode *Tukey Bisquare* untuk *S-estimator* yaitu 1.547 dan unutk *M-estimator* yaitu 4.685.

1.5.10 Pemilihan nilai α

Tetapan bias (α) pada regresi *ridge* menentukan besarnya hasil estimasi pada regresi *ridge.* Terdapat beberapa metode dalam penentuan nilai α. Salah satu metode tersebut dikemukakan oleh Hoerl, Kennard, dan Baldwin (1975) yang lebih dikenal dengan metode HKB. Persamaan yang digunakan dalam metode HKB sebagai berikut.

$$\alpha = \frac{p\sigma^2}{\boldsymbol{\hat{\gamma}'\hat{\gamma}}} \tag{34}$$

dengan k menunjukkan banyaknya variabel independen dan σ^2 menunjukkan variansi *residual* dari model regresi dengan MKT. Penentuan nilai α adalah dengan mengganti α dengan α_{MM} sehingga dihasilkan rumus sebagai berikut.

$$\alpha_{MM} = \frac{p\sigma_{MM}^2}{\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM}{}'\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM}} \tag{35}$$

dengan

$$\sigma_{MM}^2 = \frac{(\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM})'(\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM})}{n-k-1}$$

1.5.11 *Robust Modified Jackknife Ridge Regression*

Estimasi parameter *Robust* MJRR dilakukan dengan mengestimasi parameter *robust* dengan MM-*estimator* lalu hasil estimasi parameter *robust* disubstitusikan ke dalam MJRR dengan mengganti . $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{LS}$ pada MJRR dengan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM}$ sehingga diperoleh

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{RMJRR} = (\boldsymbol{I} - ((\boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}\alpha\boldsymbol{I})^{\mathbf{2}})(\boldsymbol{I} - \alpha\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM} \tag{36}$$

Karena $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{T\gamma}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MJR}$ dapat dirumuskan sebagai berikut..

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{RMJRR} = \boldsymbol{T}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{RMJRR} \tag{37}$$

1.5.12 Pengujian Signifikansi

Pengujian signifikansi parameter dilakukan dengan dua tahapan, yaitu secara simultan dan secara parsial.

a. Uji Simultan

Uji F digunakan untuk menguji secara simultan pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen. Adapun untuk hipotesisnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$

H_1: minimal ada satu $\beta_j \neq 0$ untuk $j = 1, \dots, k$

$$F_{hitung} = \frac{SSR/k}{SSE/(n-k-1)} \tag{38}$$

dengan SSR adalah jumlah kuadrat regresi, SSE adalah jumlah kuadrat residual, k adalah banyaknya parameter independen, dan n adalah jumlah observasi. Kriteria ujinya yaitu $F_{hitung} > F_{tabel}$ maka H_0 ditolak, yang berarti minimal ada satu β_j yang tidak sama dengan nol. selain itu, cara lain untuk mengambil keputusan yaitu dengan membandingkan nilai $P - value$ dengan α, jika $P - value < \alpha$ maka H_0 ditolak (Sulistianingsih et al., 2023).

b. Uji Parsial

Uji t merupakan suatu pengujian secara parsial untuk mengetahui pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen. Adapun hipotesis untuk uji t sebagai berikut.

$H_0: \beta_j = 0$
$H_1: \beta_j \neq 0$
Untuk $j = 1,2, \dots, k$

$$t_{hitung_j} = \frac{\hat{\beta}_j}{Se(\hat{\beta}_j)} \tag{39}$$

dengan

$$Se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\mathrm{var}\hat{\beta}_\mathrm{j}} \tag{40}$$

Kriteria ujinya yaitu, H_0 ditolak jika $|t_{hitung}| > t_{(\frac{\alpha}{2}, n-k-1)}$ dengan k adalah banyaknya parameter atau $P - value < \alpha$ (Deria et al., 2019).

1.5.13 Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi (R^2) menunjukkan proporsi variasi yang dijelaskan oleh variabel independen. Nilai R^2 berkisar dari 0 hingga 1. Model dapat dianggap lebih baik dalam menjelaskan pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen ketika nilai R^2 mendekati 1, yang menunjukkan bahwa model tersebut mampu menangkap sebagian besar variasi dalam data (Gujarati,2009). Untuk menghitung koefisien determinasi digunakan rumus sebagai berikut (Montgomery dkk., 2013).

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \tag{41}$$

Dengan SSR merupakan jumlah kuadrat regresi dan SST adalah jumlah kuadrat total.

1.5.14 Produk Domestik Regional Bruto

Menurut BPS, Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) merupakan nilai tambah bruto seluruh barang dan jasa yang tercipta atau dihasilkan di wilayah domestik suatu negara yang timbul akibat berbagai aktivitas ekonomi dalam suatu periode tertentu. Penyusunan PDRB dapat dilakukan melalui tiga pendekatan, yaitu pendekatan produksi, pengeluaran, dan pendapatan yang disajikan atas dasar harga berlaku dan atas dasar harga konstan. Dalam menghitung PDRB atas dasar harga berlaku menggunakan harga barang dan jasa tahun berjalan, sedangkan PDRB atas dasar harga berlaku konstan menggunakan harga pada suatu tahun tertentu (Marsus et al., 2016)

Pendapatan pemerintah daerah berasal dari berbagai sumber, termasuk Pendapatan Asli Daerah (PAD), Transfer ke Daerah dan Dana Desa (TKDD), serta sumber pendapatan lainnya. Kebijakan desentralisasi fiskal memberikan kewenangan bagi pemerintah daerah untuk mengelola dan memungut PAD, seperti pajak dan retribusi daerah. Sementara itu, TKDD, yang mencakup Dana Bagi Hasil (DBH), Dana Alokasi Umum (DAU), Dana Alokasi Khusus (DAK), Dana Otonomi Khusus, Dana Keistimewaan, dan Dana Desa, berfungsi sebagai sumber pembiayaan guna mempercepat pembangunan daerah serta meningkatkan kualitas layanan publik (Pujo Priambodo et al., 2024).

Pemasukan pemerintah dapat mempengaruhi kemampuan pemerintah untuk melakukan investasi dan pembangunan infrastruktur yang mendukung pertumbuhan ekonomi. Ketersediaan infrastruktur memiliki pengaruh signifikan terhadap peningkatan akses masyarakat terhadap sumber daya, yang selanjutnya dapat meningkatkan produktivitas dan mendorong pertumbuhan ekonomi. Sementara itu, pengeluaran pemerintah yang dialokasikan untuk sektor-sektor tertentu, seperti kesehatan, pendidikan, dan infrastruktur, dapat mendorong aktivitas ekonomi di daerah tersebut.

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder mengenai PDRB di Indonesia yang bersumber dari Badan Pusat Statistika dan Direktorat Jenderal Perimbangan Keuangan Kementerian Keuangan tahun 2022. Jumlah unit penelitian yang digunakan adalah 34 provinsi di Indonesia. Adapun variabel yang digunakan pada penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Variabel Dependen dan Independen

Variabel	Keterangan	Definisi Operasional	Satuan
Y	Produk Domestik Regional Bruto	Jumlah nilai tambah bruto yang timbul dari seluruh sektor perekonomian di suatu wilayah	Miliar Rupiah
X_1	Tingkat Pengangguran Terbuka	Persentase jumlah pengangguran terhadap jumlah angkatan kerja	Persen
X_2	Pendapatan Asli Daerah	Pendapatan yang diperoleh daerah yang dipungut berdasarkan peraturan daerah sesuai dengan peraturan perundang – undangan yang berlaku	Miliar Rupiah
X_3	Panjang Jalan	Total panjang jalan negara, provinsi, dan kabupaten/kota	Km
X_4	Dana Bagi Hasil	Dana yang dialokasikan dari Anggaran Pendapatan dan Belanja Negara ke daerah	Miliar Rupiah
X_5	Distribusi Listrik	Total energi listrik yang didistribusikan ke setiap provinsi	GWh
X_6	Persentase Penduduk Miskin	Persentase penduduk yang berada di bawah garis kemiskinan	Persen

2.2 Metode Analisis

Penelitian ini menggunakan analisis regresi *robust modified jackknife ridge* untuk mengatasi masalah multikolinearitas dan pencilan. Pengujian hipotesis dilakukan menggunakan taraf signifikansi 5% dengan menggunakan bantuan *software* R-Studio. Langkah – langkah analisis data dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Melakukan analisis deskriptif untuk memberikan gambaran tentang variabel yang terlibat dalam penelitian.

2. Melakukan pengujian asumsi normalitas dan multikolinearitas.
3. Mentransformasi data dengan menggunakan metode pemusatan dan penskalaan menggunakan Persamaan (6) dan Persamaan (7).
4. Mengortogonalisasikan variabel independen dengan mengalikan variabel independen dengan vektor eigen yang ortogonal.
5. Menentukan penduga awal menggunakan MKT.
6. Menduga parameter Robust menggunakan *MM-estimator.* Adapun tahapannya sebagai berikut.
   a. Mengestimasi parameter dengan metode *robust S-estimator*
      a) Menghitung nilai residual $e_i = y_i - \hat{y}_i$ dari MKT
      b) Menghitung $\hat{\sigma}_s$ menggunakan Persamaan
      c) Menghitung nilai $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_s}$
      d) Menghitung pembobot awal w_i menggunakan pembobot *Tukey Bisquare* sesuai dengan Persamaan
      e) Menduga $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_s$ menggunakan pembobot w_i
      f) Mengulangi langkah hingga $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_s$ konvergen.
   b. Menghitung nilai residual $e_i = y_i - \hat{y}_i$ dari $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_s$
   c. Menghitung $\hat{\sigma}_M$ dengan menggunakan Persamaan
   d. Menghitung nilai $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_M}$
   e. Menghitung pembobot w_i menggunakan pembobot *Tukey Bisquare* sesuai dengan Persamaan
   f. Menduga $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM}$ menggunakan pembobot w_i sehingga diperoleh nilai residual baru
   g. Menghitung nilai residual baru dari langkah (f) sebagai residual langkah (b) sehingga diperoleh nilai $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM}$ yang baru
   h. Iterasi diulang hingga $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{MM}$ konvergen
7. Menentukan tetapan bias α_{MM} menggunakan Persamaan (35).
8. Menduga koefisien regresi dengan menggunakan *robust modified jackknife ridge* menggunakan Persamaan (36).
9. Mentransformasikan $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{RMJRR}$ ke dalam $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RMJRR}$ menggunakan Persamaan (37)
10. Mentransformasikan persamaan regresi ke bentuk awal tanpa pemusatan dan penskalaan menggunakan Persamaan (9) dan Persamaan (10).
11. Melakukan uji signifikansi parameter model *Robust* MJRR secara simultan dan parsial menggunakan Persamaan (38) dan Persamaan (39)
12. Menghitung koefisien determinasi untuk mengetahui kebaikan model dalam menjelaskan pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen menggunakan Persamaan (41).
13. Menginterpretasikan model yang telah diperoleh dan menarik kesimpulan.