BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori titik tetap adalah domain yang sangat luas dalam penelitian diberbagai bidang matematika, khususnya analisis dan topologi, yang telah berkembang pesat selama satu setengah abad terakhir [1]. Teori titik tetap juga menjadi alat dasar yang penting dalam berbagai bidang teoritis dan terapan seperti analisis nonlinear, persamaan diferensial, teori sistem dinamik, ekonomi matematika, dan pemodelan matematika [2]. Teori titik tetap pertama kali diperkenalkan oleh L. E. J. Bouwer [3] pada tahun 1912 yakni setiap pemetaan kontinu dari bola tertutup B^n dalam ruang Euklidean $\mathbb{R}^n$ ke dirinya sendiri memiliki setidaknya satu titik tetap. Hasil utama dari teori titik tetap metrik adalah prinsip pemetaan kontraksi Banach atau yang dikenal sebagai Teorema Titik Tetap Banach pertama kali diperkenalkan pada tahun 1922 [4]. Stevan Banach pada tahun 1922 menjamin adanya titik tetap tunggal pada pemetaan di ruang metrik serta memberikan metode untuk memperoleh titik tetap tersebut. Ada dua acara untuk memperluas prinsip pemetaan kontraksi Banach [5]. Yang pertama dengan memodifikasi pemetaan kontraktifnya, dan yang kedua dari ruangnya.

Banyak peneliti yang memperluas struktur ruang metrik baru seperti ruang metrik parsial, ruang *M*-metrik, ruang *M*-metrik terkontrol, ruang *rectangular M*-metrik dan perluasannya dll. Konsep ruang metrik parsial sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Matthews [6] Pada tahun 1994. Selanjutnya, Asadi, dkk [7] memperluas konsep ruang metrik parsial dengan memperkenalkan ruang *M*-metrik, memberikan beberapa contoh yang memperlihatkan bahwa definisi tersebut benar-benar merupakan perluasan dari ruang metrik parsial. Sementara itu, Altun, dkk [8] mengkaji struktur topologi ruang *M*-metrik yang menunjukkan bahwa topologi sekuensial lebih kuat dibanding dengan topologi yang dihasilkan oleh bola terbuka. Di sisi lain, pada tahun 2018 [9] Mlaiki dkk melakukan salah satu generalisasi dari ruang *b*-metrik. Mlaiki dkk memperkenalkan konsep ruang tipe metrik terkontrol dengan menerapkan fungsi kontrol pada pertidaksamaan segitiga. Ide ini menginspirasi peneliti lainnya untuk perluasan dari ruang metrik terkontrol, diantaranya Ahmad dkk [10] memperkenalkan kontraksi Reich dan kontraksi (α, F) pada ruang metrik terkontrol dan menetapkan beberapa hasil titik tetap yang baru, Abuloha dkk [11] memperkenalkan kelas fungsi baru yang dilambangkan dengan Ψ untuk membuktikan titik tetap pada ruang terkontrol, serta Shatanawi dkk [12] memperkenalkan beberapa generalisasi dari titik tetap pada ruang metrik terkontrol dengan kontraksi baru.

Suwais (2023) memperkenalkan konsep ruang *M*-metrik terkontrol, yang merupakan perluasan dari ruang *M*-metrik dan ruang metrik terkontrol dengan memodifikasi ketaksamaan segitiga dan menjaga kondisi simetris pada ruangnya [13]. Selain itu, Branciari [14] memperkenalkan jenis ruang metrik baru (misalnya, *rectangular*) dengan mengganti pertidaksamaan segitiga dengan pertidaksamaan serupa yang melibatkan empat titik atau lebih, bukan hanya tiga, serta menyempurnakan prinsip kontraksi Banach. Di sisi lain, Konsep *M*-metrik diperluas oleh Ozgur dkk [15] pada tahun 2018 memperluas ruang *rectangular* dan ruang *M*-metrik dengan memperkenalkan ruang *rectangular M*-metrik dan di dalamnya mencakup teorema titik tetap tertentu.

Namun, penggunaan aspek terkontrol pada ruang *rectangular M*-metrik belum dilakukan. Oleh karena itu, peneliti terinspirasi oleh Ozgur dkk dengan memperluas ruang *rectangular M*-metrik terkontrol. Berdasarkan hal tersebut, maka peneliti terinspirasi untuk mengambil judul **Teorema titik tetap dalam ruang *rectangular* tipe *M*-metrik terkontrol.**

1.2. Perumusan masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas, yaitu:

a. Mendefinisikan ruang *rectangular M*-metrik terkontrol.
b. Membuat teorema titik tetap pada ruang *rectangular M*-metrik terkontrol.
c. Membuat teorema aplikasi titik tetap pada ruang *rectangular M*-metrik terkontrol.

1.3. Tujuan dan Manfaat Penelitian

a. Tujuan Penelitian

   Tujuan penelitian ini yakni membuat teorema dan bukti yang terkait dengan keberadaan titik tetap yang tunggal dalam ruang *rectangular M*-metrik terkontrol serta aplikasinya.

b. Adapun manfaat dalam penelitian ini adalah:
   1) Sebagai pengembangan ilmu pengetahuan dalam hal ini pengembangan teori titik tetap di ruang *rectangular M*-metrik yang tergeneralisasi.
   2) Teorema yang diperoleh dari penelitian ini diharapkan dapat diaplikasikan dalam eksistensi dan ketunggalan solusi dalam menyelesaikan masalah pada persamaan diferensial, integral, persamaan diferensi, persamaan non-linear, dan lain sebagainya.

1.4. Teori

Subbab ini menyajikan konsep dasar yang dibutuhkan dalam penelitian ini, konsep dasar yang dimaksud yaitu, definisi ruang metrik, ruang metrik parsial, ruang *M*-metrik, ruang rectangular *M*-metrik, ruang metrik terkontrol, ruang *M*-Metrik terkontrol, titik tetap, dan fungsi kontraksi.

Definisi 1.4.1. Ruang Metrik [16] Diberikan X himpunan tak kosong dan misalkan $d : X^2 \to [0,\infty)$ fungsi. d disebut metrik pada X jika memenuhi:

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$,
(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Untuk setiap $x, y, z \in X$ dan pasangan (X, d) disebut *ruang metrik*.

Contoh 1.4.1 Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ dan fungsi $d : X^2 \to [0, \infty)$ yang didefinisikan

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

Untuk setiap $x = (x_1, x_2)\ dan\ y = (y_1, y_2) \in X = \mathbb{R}^2$.

Akan ditunjukkan d adalah metrik pada X.

Bukti.

Ambil $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),\ z = (z_1, z_2) \in X = \mathbb{R}^2$.

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0, |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow$ $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d(y,x)$.

(iii)
$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \\ &= |(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)| + |(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \\ &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Jadi, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Berdasarkan penjabaran di atas maka terbukti bahwa d merupakan metrik pada X dan (X, d) merupakan ruang metrik.

Berikut ini salah satu generalisasi dari ruang metrik yang diperkenalkan oleh Matthews pada tahun 1994 ebagai berikut.

Definisi 1.4.2. Ruang Metrik Parsial [6] Diberikan X himpunan tak kosong. Fungsi $p : X^2 \to [0, +\infty)$ dikatakan metrik parsial pada X jika memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$,

(ii) $p(x,x) \leq p(x,y)$,

(iii) $p(x,y) = p(y,x)$,

(iv) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$.

Untuk semua $x, y, z \in X$, (X, p) disebut *ruang metrik parsial*.

Tampak bahwa, ruang metrik adalah kejadian khusus dari ruang metrik parsial dengan cara mendefinisikan syarat $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y) = 0$.

Jadi, ruang metrik adalah ruang metrik parsial tetapi bukan sebaliknya. Hal ini dapat dilihat dalam contoh berikut.

Contoh 1.4.2. [17] Misalkan $X = [0, +\infty)$ dan fungsi $p : X^2 \to [0, +\infty)$ didefinisikan sebagai $p(x, y) = \max\{x, y\}$, untuk semua $x, y \in X$.

Bukti. (i) Akan dibuktikan $x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$.

$$x = y \Leftrightarrow p(x, x) = \max\{x, x\} = \max\{y, y\} = x.$$

(ii) Akan dibuktikan $p(x, x) \leq p(x, y)$.

$$p(x, x) = x \leq \max\{x, y\} = p(x, y).$$

(iii) Akan dibuktikan $p(x, y) = p(y, x)$.

$$p(x, y) = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = p(y, x).$$

(iv) Akan dibuktikan $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$.

$$\begin{aligned} p(x, z) + p(z, y) - p(z, z) &= \max\{x, z\} + \max\{z, y\} - \max\{z, z\} \\ &= \max\{x, z\} + \max\{z, y\} - z \geq \max\{x, y\} + z - z = \max\{x, y\} \\ &= p(x, y). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, (i), (ii), (iii), dan (iv) terbukti, berarti p adalah metrik parsial. Namun, hal ini tidak berlaku $p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Jadi, p bukan metrik.

Berikut ini merupakan definisi dasar dari beberapa generalisasi ruang metrik yang diperlukan. Asadi pada tahun 2014 mendefinisikan ruang *M*-metrik yang dijabarkan sebagai berikut.

Definisi 1.4.3. Ruang *M*-metrik [8] Misalkan fungsi $v : X^2 \to [0, \infty)$ di mana X adalah himpunan tak kosong. v disebut *M-metrik* jika memenuhi sifat-sifat berikut.

(i) $v(x, x) = v(y, y) = v(x, y) \Leftrightarrow x = y$,
(ii) $m_{x,y} \leq v(x, y)$,
(iii) $v(x, y) = v(y, x)$,
(iv) $(v(x, y) - m_{x,y}) \leq (v(x, t) - m_{x,t}) + (v(t, y) - m_{t,y})$.

Dengan $m_{x,y} := \min\{ v(x, x), v(y, y)\}$.
Untuk semua $x, y, t \in X$. (X, v) disebut *ruang M-metrik.*

Tampak bahwa, ruang metrik adalah kejadian khusus dari ruang *M*-metrik dengan cara mendefinisikan syarat $v(x, x) = v(y, y) = v(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Jadi, ruang metrik adalah ruang *M*-metrik tetapi bukan sebaliknya. Hal ini dapat dilihat dalam contoh berikut.

Contoh 1.4.3. [7] Misalkan $X := [0, \infty)$ dan misalkan $v(x,y) = \frac{x+y}{2}$ di X. Akan ditunjukkan $v(x,y)$ adalah *M*-metrik.

Bukti. (i) Akan dibuktikan $v(x,x) = v(y,y) = v(x,y) \Leftrightarrow x = y$.

$\Longleftarrow$ Jika $x = y$, maka:

$$v(x,x) = v(y,y) = \frac{x+x}{2} = x.$$

$\Longrightarrow$ Jika $v(x,x) = v(y,y) = v(x,y)$, maka

$$\frac{x+x}{2} = \frac{y+y}{2} \Leftrightarrow x = y$$

$$\frac{x+x}{2} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{x+y}{2}$$

$$x + y = 2x$$

$$y = x.$$

(ii) Akan dibuktikan $m_{x,y} \leq v(x,y)$.

Perhatikan bahwa $v(x,x) = x$ dan $v(y,y) = y$, berlaku:

$$m_{x,y} = \min\{x,y\}.$$

Karena $v(x,y) = \frac{x+y}{2}$ dan dengan menggunakan sifat dasar dari nilai rata-rata dan min, maka diperoleh:

$$v(x,y) = \frac{x+y}{2} \geq \frac{\min\{x,y\} + \min\{x,y\}}{2} \geq \frac{2(\min\{x,y\})}{2} = \min\{x,y\} = m_{x,y}.$$

(iii) Akan dibuktikan $v(x,y) = v(y,x)$.

Diperoleh:

$$v(x,y) = \frac{x+y}{2} = \frac{y+x}{2} = v(y,x).$$

(iv) Akan dibuktikan $(v(x,y) - m_{x,y}) \leq (v(x,t) - m_{x,t}) + (v(t,y) - m_{t,y})$.

Diperoleh:

$$\left(v(x,y) - m_{x,y}\right) = \frac{x+y}{2} - \min\{v(x,x), v(y,y)\} = \frac{x+y}{2} - \min\{x,y\}$$

dan

$$\left(v(x,t) - m_{x,t}\right) + \left(v(t,y) - m_{t,y}\right)$$

$$= \left(\frac{x+t}{2} - \min\{x,t\}\right) + \left(\frac{t+y}{2} - \min\{t,y\}\right).$$

Dengan menggunakan sifat aljabar dari min dan rata-rata, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\left(v(x,y) - m_{x,y}\right) &\geq \left(\frac{x+t}{2} - \min\{x,t\}\right) + \left(\frac{t+y}{2} - \min\{t,y\}\right)\\ &\geq (\min\{x,t\} - \min\{x,t\}) + (\min\{t,y\} - \min\{t,y\})\\ &\geq 0 = (\min\{x,y\} - \min\{x,y\}) = \left(v(x,y) - m_{x,y}\right).\end{aligned}$$

Oleh karena itu, (i), (ii), (iii), dan (iv) terbukti.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa (X,v) adalah ruang *M*-metrik. Namun, (X,v) bukan ruang metrik karena tidak berlaku pada $v(x,y) = \frac{x+y}{2} = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Dari contoh di atas, juga menunjukkan bahwa ruang *M*-metrik belum tentu ruang metrik parsial. Hal ini dapat dilihat bahwa tidak berlaku sifat $v(x,x) \leq v(x,y)$.

Selanjutnya diberikan salah satu dari generalisasi ruang *M*-metrik adalah ruang *rectangular M*-metrik yang diperkenalkan oleh Ozgur pada tahun 2018 yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.4.4. Ruang *Rectangular M*-metrik [15] Misalkan fungsi $v_r : X^2 \to [0,\infty)$ di mana X adalah himpunan tak kosong. v_r disebut *rectangular M*-metrik jika memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) $v_r(x,y) = m_{r_{x,y}} = \mu_{r_{x,y}} \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $m_{r_{x,y}} \leq v_r(x,y)$,

(iii) $v_r(x,y) = v_r(y,x)$,

(iv) $(v_r(x,y) - m_{r_{x,y}}) \leq (v_r(x,t) - m_{r_{x,t}}) + (v_r(t,u) - m_{r_{t,u}}) + (v_r(u,y) - m_{r_{u,y}})$.

Dengan $m_{r_{x,y}} := \min\{ v_r(x,x), v_r(y,y)\}$ dan $\mu_{r_{x,y}} := \max\{ v_r(x,x), v_r(y,y)\}$. Untuk semua $x, y \in X$ dan semua titik yang berbeda $t, u \in X \setminus \{x,y\}$. Pasangan (X, v_r) disebut *ruang rectangular M-metrik.*

Setiap ruang *M*-metrik adalah ruang *rectangular M*-metrik, namun tidak sebaliknya. Hal ini dapat dilihat dari contoh berikut.

Contoh 1.4.4. Misalkan $X = \mathbb{R}^+$, dan $v_r : X^2 \to R^+$ didefinisikan sebagai:

$$v_r(x,y) = \begin{cases} 2, & jika\ x = y \\ |x-y| + 1, & jika\ x \neq y \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Akan ditunjukkan (X, v_r) adalah ruang *rectangular* *M*-metrik.

Bukti. (i) $v_r(x,y) = m_{r_{x,y}} = \mu_{r_{x,y}} \Leftrightarrow x = y$ jelas terpenuhi.

(ii) Akan dibuktikan $m_{r_{x,y}} \leq v_r(x,y)$.

Dari definisi $v_r(x,y) = |x-y| + 1$, karena $|x-y| \geq 0$, sehingga

$$v_r(x,y) = |x-y| + 1 \geq 1 = \min\{\,(|x-x|+1), (|y-y|+1)\} = m_{r_{x,y}}.$$

(iii) Jelas bahwa $v_r(x,y) = v_r(y,x)$.

(iv) Akan dibuktikan $v_r(x,y) - m_{r_{x,y}} \leq \left(v_r(x,t) - m_{r_{x,t}}\right) + \left(v_r(t,u) - m_{r_{t,u}}\right) + \left(v_r(u,y) - m_{r_{u,y}}\right)$

$$v_r(x,y) - m_{r_{x,y}} = (|x-y|+1) - 1 = |x-y|$$

dan

$$\left(v_r(x,t) - m_{r_{x,t}}\right) + \left(v_r(t,u) - m_{r_{t,u}}\right) + \left(v_r(u,y) - m_{r_{u,y}}\right)$$

$$= (|x-t|) + (|t-u|) + (|u-y|) \geq |(x-t) + (t-u) + (u-y)| = |x-y|$$
$$= v_r(x,y) - m_{r_{x,y}}.$$

Dengan demikian, (i), (ii) (iii), dan (iv) terbukti. Dapat disimpulkan bahwa (X, v_r) adalah *ruang rectangular M-metrik.* Karena tidak berlaku syarat 1 pada M-metrik, maka (X, v_r) bukan *M*-metrik.

Berikut ini salah satu dari generalisasi dari ruang metrik yaitu ruang metrik terkontrol yang diperkenalkan oleh Mlaiki tahun 2018 yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.4.5. Ruang Metrik Terkontrol [9] Misalkan dua fungsi $s : X^2 \rightarrow [1, \infty)$ dan $v : X^2 \rightarrow [0, \infty)$ dengan X adalah himpunan tak kosong. v disebut *metrik terkontrol* jika memenuhi sifat-sifat berikut:

(v1) $v(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(v3) $v(x,y) = v(y,x)$,
(v4) $v(x,y) \leq s(x,t)v(x,t) + s(t,y)v(t,y)$.

Untuk semua $x, y, t \in X$, dan (X, v) disebut *ruang metrik terkontrol.*

Jika $s(x,y) = 1$ untuk setiap $x, y \in X$ maka v adalah metrik pada X. Berikut ini akan diberikan contoh ruang metrik terkontrol yang bukan ruang metrik.

Contoh 1.4.5. Misalkan $X = \mathbb{R}^+$, dua fungsi $s : X^2 \to [1, \infty)$ dan $v : X^2 \to [0, \infty)$ berturut-turut didefinisikan sebagai berikut.

$$s(x, y) = 2 + |x - y| \text{ dan } v\,(x, y) = |x - y|(2 + |x - y|).$$

untuk setiap $x, y \in X$. Akan ditunjukkan (X, v) adalah ruang metrik terkontrol.

Bukti. (v1) Akan dibuktikan $v(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$$v(x, y) = |x - y|(2 + |x - y|) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0, (2 + |x - y|) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(v2) $v(x, y) = |x - y|(2 + |x - y|) = |y - x|(2 + |y - x|) = v(y, x)$.

(v3) $v(x, y) \leq s(x, t)[v(x, t)] + s(t, y)[v(t, y)]$

$$= (2 + |x - t|)[|x - t|(2 + |x - t|)] + (2 + |t - y|)[|t - y|(2 + |t - y|)]$$

$$\geq [|x - t|(2 + |x - t|)] + [|t - y|(2 + |t - y|)]$$

$$= (|x - t| + |t - y|)\big((1 + |x - t|) + (1 + |t - y|)\big)$$

$$= |x - y|(2 + |t - y|) = v(x, y).$$

Jadi, v terbukti ruang metrik terkontrol pada X.

Berikut ini diberikan definisi ruang *M*-metrik terkontrol yang digeneralisasi dari ruang *M*-metrik dan ruang metrik terkontrol, yang diperkenalkan oleh Suwais pada tahun 2023 sebagai berikut.

Definisi 1.4.6. Ruang *M*-metrik Terkontrol [13] Misalkan dua fungsi $s : X^2 \to [1, \infty)$ dan $v : X^2 \to [0, \infty)$ dengan X adalah himpunan tak kosong. v disebut *M-metrik terkontrol* jika memenuhi sifat-sifat berikut:

(v1) $v(x, y) = m_{x,y} = \mu_{x,y} \Leftrightarrow x = y$,

(v2) $m_{x,y} \leq v(x, y)$,

(v3) $v(x, y) = v(y, x)$,

(v4) $v(x, y) - m_{x,y} \leq s(x, t)[v(x, t) - m_{x,t}] + s(t, y)[v(t, y) - m_{t,y}]$.

Dengan $m_{x,y} := \min\{\, v(x, x), v(y, y)\}$ dan $\mu_{x,y} := \max\{\, v(x, x), v(y, y)\}$.
Untuk semua $x, y, t \in X$, dan (X, v) disebut *ruang M-metrik terkontrol.*

Berikut ini akan diberikan contoh ruang *M*-metrik terkontrol.

Contoh 1.4.6. [13] Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan semua bilangan kompleks dan $A = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$, $B = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 2\} \subset \mathbb{C}$. Misalkan $X = A \cup B \cup \{0\}$ dan fungsi $s : X^2 \to [1, \infty)$ dan $v : X^2 \to [0, \infty)$ didefinisikan sebagai:

$$s(t, u) = |t||u| + 2$$

dan

$$v(t,u) = |t-u|,$$

masing-masing untuk semua $t,u \in X$. Dari [13] telah ditunjukkan bahwa (X,v) adalah *ruang M-metrik terkontrol.*

- Setiap ruang metrik terkontrol adalah ruang *M*-metrik terkontrol dengan mengambil $m_{x,y} = \mu_{x,y} = 0$.
- Jika mengambil fungsi $s : X^2 \to [1,\infty)$ dengan $s(x,y) = 1$, maka (X,v) merupakan ruang *M*-metrik.
- Setiap ruang *M*-metrik adalah ruang *M*-metrik terkontrol. Namun demikian, ruang *M*-metrik terkontrol belum tentu ruang M-metrik. Seperti pada Contoh 1.4.13.
- Jika $v(x,x) = 0$ untuk setiap $x \in X$, maka (X,v) adalah ruang metrik terkontrol. Namun demikian, tidak semua contoh ruang *M*-metrik terkontrol adalah ruang metrik terkontrol. Seperti pada Contoh 1.4.13

Contoh 1.4.7. Misalkan $X = \{1,2,3\}$ dan fungsi $s : X^2 \to [1,\infty)$ dan $v : X^2 \to [0,\infty)$ berturut-turut didefinisikan sebagai $s(x,y) = (x+y)^2$ dan

$$\begin{aligned} v(1,1) = v(2,2) = v(3,3) = 1, \\ v(1,2) = v(2,1) = 7, \\ v(1,3) = v(3,1) = 5, \\ v(2,3) = v(3,2) = 2, \end{aligned}$$

untuk setiap $x,y \in X$. Akan ditunjukkan bahwa (X,v) adalah ruang *M*-metrik terkontrol.

Bukti. (v1) Akan dibuktikan $v(x,y) = m_{x,y} = \mu_{x,y} \Leftrightarrow x = y$.

Jelas bahwa untuk $x \neq y$, yang diketahui $v(1,2) = 7$, $v(1,3) = 5$, $v(2,3) = 2$, semuanya lebih besar dari nilai identitas 1.

(v2) $m_{x,y} \leq v(x,y)$. Karena $m_{x,y} = 1$ untuk setiap $x \neq y$, berdasarkan yang diketahui bahwa $1 \leq 7$, $1 \leq 5$, $1 \leq 2$ semuanya bernilai benar.

(v3) $v(x,y) = v(y,x)$ jelas.

(v4) $v(x,y) - m_{x,y} \leq s(x,t)[v(x,t) - m_{x,t}] + s(t,y)[v(t,y) - m_{t,y}]$.

Kasus 1: $(x,y,t) = (1,2,3)$

$$v(1,2) - m_{1,2} = 7 - 1 = 6.$$

$$s(1,3)[v(1,3) - m_{1,3}] + s(3,2)[v(3,2) - m_{3,2}] = 16(4) + 25(1) = 89.$$

$6 \leq 89$, terpenuhi.

Kasus 2: $(x,t,y) = (1,3,2)$

$$v(1,3) - m_{1,3} = 5 - 1 = 4.$$

$$s(1,2)[v(1,2) - m_{1,2}] + s(2,3)[v(2,3) - m_{2,3}] = 9(6) + 25(1) = 79.$$

$4 \leq 79$, terpenuhi.

Kasus 3: $(y, t, x) = (2,3,1)$

$$v(2,3) - m_{2,3} = 2 - 1 = 1.$$

$$s(2,1)[v(2,1) - m_{2,1}] + s(1,3)[v(1,3) - m_{1,3}] = 9(6) + 16(4) = 118.$$

$1 \leq 118$, terpenuhi.

Jadi, (X, v) adalah ruang *M*-metrik terkontrol.

Akan tetapi, fungsi v bukan merupakan *M*-metrik. Karena jika diambil $x = 1,\ y = 2,\ t = 3$, maka diperoleh

$$6 = v(1,2) - m_{1,2} \leq s(1,3)\big[v(1,3) - m_{1,3}\big] + s(3,2)\big[v(3,2) - m_{3,2}\big] = 5,$$

kontradiksi. Oleh karena itu, syarat (v4) tidak terpenuhi, yaitu v bukan M-metrik. Selanjutnya, jika kita mengamati bahwa $v(1,1) = v(2,2) = v(3,3) = 1 \neq 0$. Akibatnya, syarat (v1) tidak terpenuhi. Dan demikian, v bukan metrik terkontrol.

Berikut ini diberikan proposisi yang terkait dengan sifat dari $\mu_{x,y}$ dan $m_{x,y}$ untuk v sebagai fungsi *M*-metrik terkontrol.

Proposisi 1.4.1 [13] Misalkan ruang *M*-metrik terkontrol, dinotasikan dengan (X, v) dan misalkan $x, t, u, y \in X$. Maka berlaku persamaan berikut ini:

(1) $\mu_{x,y} + m_{x,y} = v(x,x) + v(y,y) \geq 0$
(2) $\mu_{x,y} - m_{x,y} = |v(x,x) - v(y,y)| \geq 0$
(3) $\mu_{x,y} - m_{x,y} \leq s(x,t)[\mu_{x,t} - m_{x,t}] + s(t,y)[\mu_{t,y} - m_{t,y}]$

Berikut ini diberikan beberapa lemma yang akan digunakan dalam beberapa pembuktian teorema dalam menentukan titik tetap tunggal pada ruang M-metrik terkontrol.

Lemma 1.4.1 [13] Misalkan (X, v) ruang *M*-metrik terkontrol. Jika barisan $\{x_n\}$ di X konvergen ke x dan y dengan $x \neq y$, maka $v(x,y) - m_{x,y} = 0$.

Lemma 1.4.2 [13] Misalkan (X, v) ruang tipe *M*-metrik terkontrol dan $T: X \to X$ adalah fungsi sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in X$, berlaku

$$v(Tx, Ty) \leq kv(x,y), \text{ di mana } 0 < k < 1.$$

Misal $x_0 \in X$, barisan $\{x_n\}_{n\geq 0}$ didefinisikan $x_{n+1} = Tx_n$. Jika $x_n \to w$ saat $n \to \infty$, maka $Tx_n \to Tw$ saat $n \to \infty$.

Selanjutnya, diberikan teorema yang menunjukkan beberapa syarat cukup untuk membuktikan titik tetap tunggal pada ruang M-metrik terkontrol.

Teorema 1.4.1 [13] Misalkan (X, v) ruang *M*-metrik terkontrol dengan v-lengkap, dan $T: X \to X$ adalah fungsi sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in X$, berlaku

$$v(Tx, Ty) \leq kv(x, y), \text{ di mana } 0 < k < 1.$$

Misal $x_n = T^n x_0$ untuk $x_0 \in X$, berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{s(x_{n+1}, x_{n+2}) + s(x_{n+2}, x_{n+3})}{s(x_n, x_{n+1}) + s(x_{n+1}, x_{n+2})} s(x_{n+1}, x_m) < \frac{1}{k}$$

Jika untuk setiap $x \in X$, berlaku

$$\lim_{n\to\infty} s(x_n, x) \text{ dan } \lim_{n\to\infty} s(x, x_n) \text{ ada dan berhingga,}$$

maka T mempunyai titik tetap yang tunggal.

Berikut diberikan definisi yang mendukung dalam beberapa pembuktian teorema dalam menentukan titik tetap tunggal pada ruang *M*-metrik terkontrol.

Definisi 1.4.7. Titik Tetap [18] Misalkan X himpunan tak kosong, $v \in X$ disebut titik tetap dari fungsi $T : X \to X$ jika $Tv = v$.

Definisi 1.4.8. Fungsi Kontraksi [18] Diberikan (X, v) merupakan ruang *M*-metrik terkontrol. Maka fungsi $T : X \to X$ disebut fungsi kontraksi jika terdapat $\gamma \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$v_r(Tx, Ty) \leq \gamma v_r(x, y).$$

Contoh 1.4.8. Misalkan (X, v) ruang *M*-metrik terkontrol seperti pada Contoh 1.4.6. Didefinisikan fungsi $T : X \to X$ sebagai berikut:

$$T(x) = \frac{x+1}{4}$$

Akan ditunjukkan bahwa T adalah fungsi kontraksi.

Bukti.

Akan ditunjukkan T merupakan fungsi kontraksi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} v\big(T(x), T(y)\big) &= |T(x) - T(y)| \\ &= \left|\frac{x+1}{4} - \frac{y+1}{4}\right| \\ &= \frac{1}{4}|x - y| \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan bahwa konstanta kontraksi γ memenuhi:

$$v\big(T(x),T(y)\big)=\frac{1}{4}|x-y|\leq\ \gamma|x-y|$$

Karena $\frac{1}{4}<1$, dapat dipilih $\gamma=\frac{1}{4}$, maka diperoleh:

$$v\big(T(x),T(y)\big)\leq\gamma v(x,y)$$

Dengan demikian, T adalah fungsi kontraksi.

BAB II
METODE PENELITIAN

2.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan Juli 2024 s/d Desember 2024 di Universitas Hasanuddin.

2.2 Jenis Penelitian

Penelitian yang dilakukan merupakan jenis penelitian dasar atau murni. Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur, yaitu dengan membaca literatur-literatur yang berhubungan dengan teorema-teorema yang berkaitan dengan perkembangan ruang metrik maupun titik tetap.

2.3 Prosedur Pelaksanaan Penelitian

Agar tujuan dari penelitian ini dapat tercapai, maka dilakukan langkah-langkah berikut:

1. Mengumpulkan bahan atau materi yang berkaitan dengan ruang *rectangular M*-metrik terkontrol.
2. Mendefinisikan ruang *rectangular M*-metrik terkontrol.
3. Membuktikan proposisi atau lemma untuk mendukung teorema titik tetap pada ruang *rectangular M*-metrik terkontrol.
4. Membuktikan teorema titik tetap dalam ruang *rectangular M*-metrik terkontrol.
5. Membuktikan teorema aplikasi titik tetap pada ruang *rectangular M*-metrik terkontrol.

2.4 Alur kerja

Alur kerja dalam penelitian ini disajikan dalam bentuk diagram alir sebagai berikut: