BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pewarnaan adalah salah satu topik yang banyak di minati peneliti bidang kombinatorika karena memiliki banyak aplikasi terhadap kehidupan sehari-hari. Pewarnaan pada graf G adalah pemetaan warna-warna ke titik atau sisi dari G sedemikian hingga titik atau sisi yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Pewarnaan graf terbagi menjadi beberapa, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Konsep pewarnaan sisi dapat diterapkan salah satunya pada masalah penjadwalan. Konsep pewarnaan terus mengalami perkembangan, salah satu konsep dari pewarnaan adalah tentang terhubung pelangi.

Sebuah graf G dikatakan terhubung pelangi jika untuk setiap dua titik u, v di $V(G)$ terhubung oleh lintasan pelangi $u - v$. Suatu lintasan yang disimbolkan P pada suatu graf G akan disebut sebagai lintasan pelangi jika untuk setiap sisi pada lintasan P memiliki pewarnaan yang berbeda (Hader,2020).

Terhubung pelangi terdiri dari 2 jenis diantaranya terhubung pelangi sisi dan terhubung pelangi titik. Terhubung pelangi sisi didefinisikan sebagai pewarnaan sisi pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh sisi-sisi yang memiliki warna yang berbeda, sedangkan terhubung pelangi titik didefinisikan pewarnaan titik pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. salah satu konsep dari pewarnaan sisi adalah penentuan bilangan terhubung pelangi pada sebuah graf G yang disimbolkan $rc(G)$. Bilangan terhubung pelangi sisi disimbolkan $rc(G)$ bilangan warna terkecil pada sisi yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi terhubung pelangi sisi (Krivelevich,2010)

Beberapa peneliti yang mengkaji bilangan terhubung pelangi antara lain Ainul Rhofiq Tridissuwedhy pada tahun 2013, diantara berapa kesimpulannya diperoleh bilangan terhubung pelangi untuk graf Helm Tertutup yang disimbolkan cH_n yaitu:

$$rc(cH_n) = \begin{cases} 2, & jika\ n = 3 \\ 3, & jika\ 4 \leq n \leq 5 \\ 4, & jika\ n \geq 6 \end{cases}$$

Pada tahun 2022, Khairun Nisa Humolungo dkk, mencari bilangan terhubung pelangi pada graf hasil operasi korona antara graf Antiprisma (AP_m) dimana $m \geq 3$ dan graf lengkap (K_4) dan diperoleh:

$$diam(G) = \begin{cases} m + 1, & untuk\ m = 3, \\ m, & untuk\ m = 4\ dan\ m = 5, \\ m - 1, & untuk\ m = 6\ dan\ m = 7, \end{cases}$$

$$rc(G) = 2m$$

Dan pada tahun 2019, Irvania Sukma Kumala meneliti bilangan terhubung pelangi pada graf bunga $\left(B_{W_m,K_n}\right)$ untuk $m \geq 5$, $n \geq 3$ dan graf lemon (Le_n) untuk $n \geq 3$ diperoleh formula:

$$rc\left(B_{W_m,K_n}\right) = \begin{cases} 3, & untuk\ m = 3\ atau\ m = 4 \\ 4, & untuk\ m \geq 5 \end{cases}$$

$$rc(Le_n) = \begin{cases} 2, & untuk\ n = 3\ atau\ n = 4 \\ 3, & untuk\ n \geq 5 \end{cases}$$

Dari beberapa penelitian tersebut, telah dibahas mengenai bilangan terhubung pelangi pada graf hasil operasi korona antara graf Antiprisma (AP_m) dimana $m \geq 3$ dan graf lengkap (K_4), dan juga graf lemon (Le_n). Oleh karena itu, penulis akan melakukan penelitian lebih lanjut mengenai beberapa graf tersebut dengan meneliti bilangan terhubung pelangi pada graf hasil operasi korona antara graf G dan graf aprisma (AP_n) dimana G adalah graf Le_3 dan C_n untuk $n \geq 3$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah yang diberikan dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagaimana struktur dan label sisi pada graf $Le_3 \odot AP_n$ dan graf $C_n \odot AP_n$, $n \geq 3$.
2. Bagaimana penentuan bilangan terhubung pelangi pada graf $Le_3 \odot AP_n$ dan graf $C_n \odot AP_n,\ n \geq 3$.

1.3 Batasan Masalah

Agar pembahasan tidak meluas, maka penelitian ini dibatasi pada graf $G \odot AP_n$, $n \geq 3$. Dimana G adalah graf lemon dengan $n = 3$ yang dinotasikan (Le_3) dan graf siklus berorde n yang dinotasikan (C_n) dengan $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan penelitian ini yaitu :

1. Mengonstruksi struktur dan label graf $Le_3 \odot AP_n$ dan graf $C_n \odot AP_n,\ n \geq 3$.
2. Menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf $Le_3 \odot AP_n$ dan graf $C_n \odot AP_n,\ n \geq 3$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Dapat digunakan sebagai bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

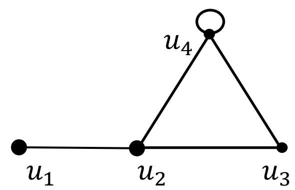
2. Mempertegas keilmuan matematika terkait bilangan terhubung pelangi dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.
3. Dapat menjadi referensi penelitian selanjutnya terkait bidang Teori Graf.

1.6 Graf dan Istilah-Istilah Pada Graf

Definisi 1.6.1 Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E) dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ adalah himpunan hingga dan tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik $(vertex)$ dan $E(G) = \{v_i v_j : i, j \in [1, n]\}$ adalah himpunan pasangan tak terurut dari anggota-anggota $V(G)$ yang berbeda disebut sisi $(edge)$ (Chartrand,1996).

Titik-titik pada graf dapat dinomori dengan huruf dan bilangan asli atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dan v dinyatakan dengan (u, v) atau dinyatakan dengan e_1, e_2, e_3, ... dan seterusnya. Jika e adalah sisi yang menghubungkan u dan v maka e dapat dinyatakan sebagai $e = (u, v)$.

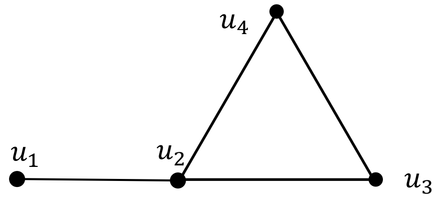
Contoh 1.6.1 Misalkan himpunan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4, u_4u_4\}$. Maka pasangan himpunan $G = \{V(G), E(G)\}$ adalah graf sebab $V(G)$ merupakan himpunan diskrit berhingga dan anggota $E(G)$ adalah elemen dari $V(G)$. Bentuk dari graf G adalah seperti pada Gambar 1.6.1



Gambar 1.6.1 Gambar Graf G

Definisi 1.6.2 Graf sederhana G adalah pasangan $V(G), E(G)$ dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik $(vertex)$, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi $(edge)$ (Hasmawati,2020).

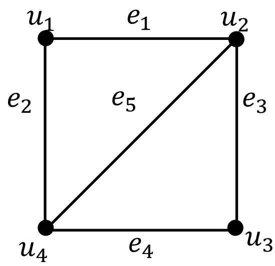
Contoh 1.6.2 Misalkan himpunan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4\}$. Maka pasangan himpunan $G = \{V(G), E(G)\}$ adalah graf sebab $V(G)$ merupakan himpunan diskrit berhingga dan anggota $E(G)$ adalah elemen dari $V(G)$. Bentuk graf G dapat dilihat pada Gambar 1.6.



Gambar 1.6.2 Graf Sederhana G

Pada Gambar 1.6.2 terlihat bahwa himpunan titik $V(G)$ memenuhi definisi dari graf sederhana, yaitu $V(G)$ ada (tidak kosong) dan berhingga serta untuk setiap pasangan terurut $u_i u_j$ pada $E(G)$ tidak memuat $u_i = u_j$ dimana $i, j \in \{1,2,3,4\}$. Maka dari itu G merupakan salah satu contoh dari graf sederhana.

Jumlah titik pada suatu graf disebut juga *order* dan dinotasikan $|V(G)|$ dan jumlah sisi pada graf disebut *size* atau dinotasikan $|E(G)|$. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



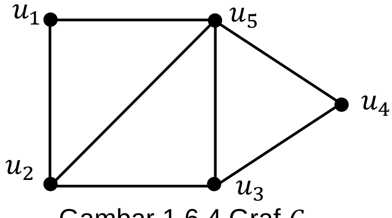
Gambar 1.6.3 Graf G_1 dengan order 4 dan size 5

Pada gambar 1.6.3 diketahui bahwa himpunan titik $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ maka memiliki jumlah titik sebanyak 4 yaitu $|V(G_1)| = 4$ dan himpunan sisi $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ sehingga jumlah sisi sebanyak 5 atau dinotasikan dengan $|E(G_1)| = 5$.

Dua buah titik akan dikatakan bertetangga jika terdapat sisi yang menempel dengan kedua titiknya. Misalkan untuk sebarang $e_n = (v_i, v_j)$ dapat dikatakan e bersisian dengan titik v_i dan titik v_j. Pada Gambar 1.6.3 diketahui $e_1 = (u_1, u_2)$ adalah sebuah sisi. Maka didapat bahwa e_1 bersisian dengan u_1, dan e_1 juga bersisian dengan u_2, serta u_1 bertetangga dengan u_2. Disimpulkan pula e_1 tidak bersisian dengan u_3 serta u_1 tidak bertetangga dengan u_3.

Definisi 1.6.3 Misalkan G adalah graf. Lintasan dari u ke v pada G adalah jalan dari u ke v dimana tidak terjadi pengulangan sisi maupun titik. Lintasan dari u ke v disebut lintasan $u - v$ (Gross,2019).

Contoh 1.6.3 Graf G_2 pada Gambar 1.6.4 merupakan graf yang memuat lintasan.

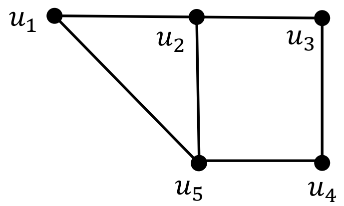


Gambar 1.6.4 Graf G_2

Berdasarkan Gambar 1.6.4, untuk setiap dua titik u_2 dan u_4, terdapat $u_2u_3u_4$, $u_2u_5u_4$, dan $u_2u_1u_5u_4$ yang memuat lintasan $u_2 - u_4$.

Definisi 1.6.4 Misalkan u dan v adalah sebarang titik berbeda pada graf G. Maka graf G dikatakan graf terhubung, jika terdapat lintasan dari u ke v (Chartrand,1996).

Contoh 1.6.4 Graf G_2 pada Gambar 1.6.4 merupakan graf terhubung



Gambar 1.6.5 Graf Terhubung G_3

Berdasarkan Gambar 1.6.5 untuk setiap dua titik u dan v pada graf G_3 terdapat lintasan dari titik u ke v, maka graf G_3 merupakan graf terhubung. Seperti yang ditunjukkan pada Tabel 1.1

Tabel 1. 1 Lintasan $u - v$ pada graf G_3

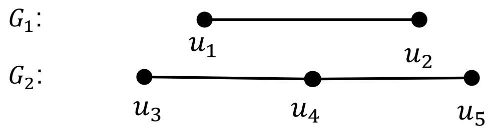
Lintasan $\boldsymbol{u-v}$					
Titik $\boldsymbol{u}$	Titik v				
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$\boldsymbol{u_1}$		u_1u_2	$u_1u_2u_3$	$u_1u_5u_4$	u_1u_5
$\boldsymbol{u_2}$	u_2u_1		u_2u_3	$u_2u_5u_4$	u_2u_5
$\boldsymbol{u_3}$	$u_3u_2u_1$	u_3u_2		u_3u_4	$u_3u_4u_5$
$\boldsymbol{u_4}$	$u_4u_5u_1$	$u_4u_5u_2$	u_4u_3		u_4u_5
$\boldsymbol{u_5}$	u_5u_1	u_5u_2	$u_5u_4u_3$	u_5u_4	

1.7 Operasi Dalam Graf

Pada subbab ini akan dibahas beberapa operasi pada graf. Operasi pada graf digunakan untuk membantu mengonstruksi graf baru dan mendefinisikan jenis graf tertentu. Terdapat beberapa operasi yang dikenal dalam teori graf, diantaranya adalah operasi gabung, operasi tambah, operasi kali, operasi amalgamasi, operasi subdivisi, dan operasi korona (Hasmawati,2020).

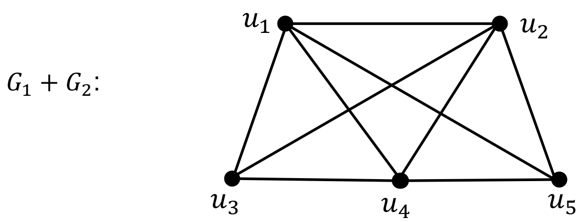
Definisi 1.7.1 Misalkan G_1 adalah graf dengan himpunan $V(G_1)$ dan himpunan sisi $E(G_1)$ dan G_2 adalah graf dengan himpunan titik $V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_2)$, maka graf tambah antara G_1 dan G_2 ditulis $G_1 + G_2$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv: \forall\, u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ (Hasmawati,2020).

Contoh 1.7.1 Misalkan graf G_1 adalah graf dengan $V(G_1) = \{u_1, u_2\}$ dan $E(G_1) = \{u_1u_2\}$, serta G_2 adalah graf dengan $V(G_2) = \{u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(G_2) = \{u_3u_4, u_4u_5\}$.



Gambar 1.7.1 Graf G_1 dan Graf G_2

Dioperasikan menggunakan operasi tambah menghasilkan graf $G_1 + G_2$ dengan $V(G_1 + G_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan himpunan sisi $E(G_1 + G_2) = \{u_1u_2, u_3u_4, u_4u_5\} \cup \{u_1u_3, u_1u_4, u_1u_5, u_2u_3, u_2u_4, u_2u_5\}$.

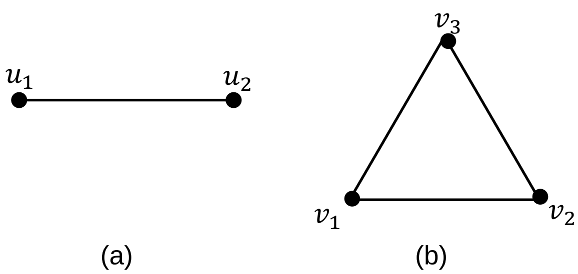


Gambar 1.7.2 Graf $G_1 + G_2$

Definisi 1.7.2 Misalkan G adalah graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m. Graf korona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sebanyak n kali namakan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ dan mengaitkan titik v_i di G dengan setiap titik di graf $H_i, i = 1,2, \ldots, n$.(Hasmawati,2020)

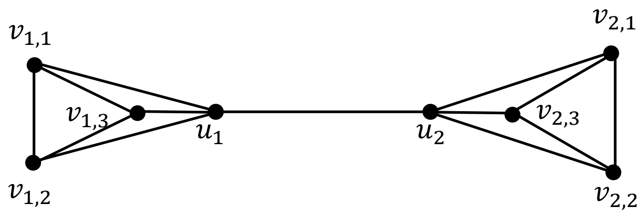
Contoh 1.7.2 diberikan graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{u_1, u_2\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{u_1u_2\}$ dan graf H adalah graf dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$

dan $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$.



Gambar 1.7.3 (a) Graf G dan (b) graf H

Berdasarkan Definisi 1.7.2 diperoleh gambar hasil korona dari graf G dan graf H yang dapat dilihat pada gambar berikut.



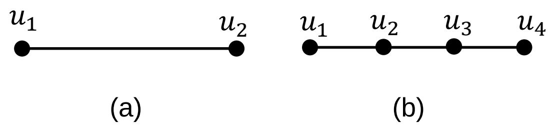
Gambar 1.7.4 Graf Korona $G \odot H$

1.8 Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini akan dibahas mengenai jenis-jenis graf. Pada teori graf dikenal beberapa Jenis-jenis graf diantaranya adalah graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, graf roda, graf bintang, graf kipas, graf bunga, graf Jahangir, dan sebagainya.

Definisi 1.8.1 Graf lintasan adalah graf yang hanya terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n, dimana $n \geq 2$, yang terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi (Harris,2000).

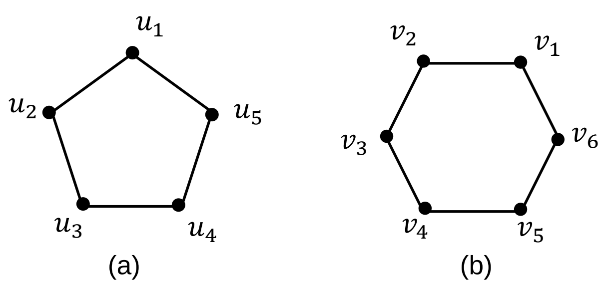
Contoh 1.8.1 Berikut adalah contoh dari graf lintasan



Gambar 1.8.1 (a) Graf P_2 dan (b) Graf P_4

Definisi 1.8.2 Misalkan $P_n: v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots\ v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n - 1$. Siklus C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$ (Hasmawati,2020).

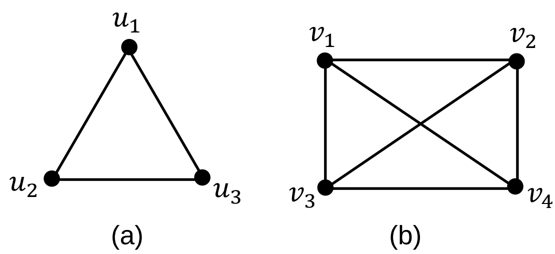
Contoh 1.8.2 Berikut adalah beberapa contoh graf siklus:



Gambar 1.8.2 (a) Siklus C_5 dan (b) Siklus C_6

Definisi 1.8.3 Graf lengkap (*Complete graph*) adalah graf sederhana dimana setiap dua titiknya bertetangga atau dengan kata lain untuk setiap $u, v \in V(G)$ berlaku untuk setiap $uv \in E(G)$. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n (Hasmawati,2020).

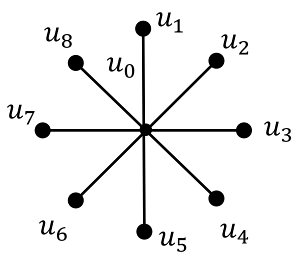
Contoh 1.8.3 Beberapa contoh graf lengkap disajikan seperti gambar di bawah ini.



Gambar 1.8.3 Graf Lengkap (a) K_3 dan (b) K_4

Definisi 1.8.4 Graf bintang S_n berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempuyai satu titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ berderajat satu. Titik yang berderajat $n-1$ disebut titik sentral (Hasmawati,2020).

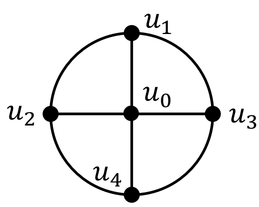
Contoh 1.8.4 Berikut adalah gambar graf bintang S_9:



Gambar 1.8.4 Graf Bintang S_9

Definisi 1.8.5 Graf roda (*Wheel*) adalah graf yang dikonstruksi dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x dan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus $(K_1 + C_n)$. Graf roda berorde $n+1$ dinotasikan dengan W_n (Hasmawati,2020).

Contoh 1.8.5 Berikut adalah gambar dari graf roda



Gambar 1.8.5 Graf Roda W_4

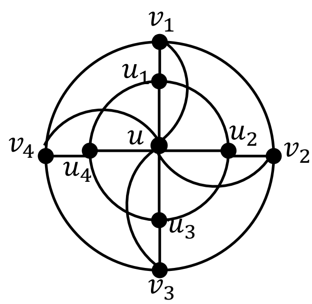
Definisi 1.8.6 Graf lemon berorde $2n+1$ adalah graf yang dikonstruksi dari graf Helm H_n dengan menghubungkan u dan v_i, serta menghubungkan v_i dengan v_{i+1} dan v_{i-1} untuk setiap $i \in [1,n], v_{n+1} = v_1, v_0 = v_n$. Graf lemon berorde $2n+1$ dinotasikan dengan Le_n (Kumala,2019).

Himpunan titik dan himpunan sisi dari Le_n didefinisikan sebagai berikut.

$V(Le_n) = \{u\} \cup \{u_i | i \in [1,n]\} \cup \{v_i | i \in [1,n]\}$.

$$E(Le_n) = \{u_i u_{i+1} | i \in [1,n], u_{n+1} = u_1\} \cup \{v_i v_{i+1} | i \in [1,n], v_{n+1} = v_1\} \cup \{u_i v_i | i \in [1,n]\} \cup \{u_i u | i \in [1,n]\} \cup \{v_i u | i \in [1,n]\}.$$

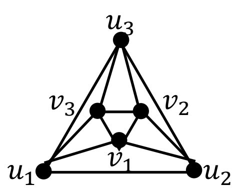
Contoh 1.8.6 Berikut adalah gambar dari graf lemon



Gambar 1.8.6 Graf Le_4

Definisi 1.8.7 Graf Antiprisma adalah sebuah graf yang terbentuk dari gabungan dua buah graf, yaitu graf sikel luar dan graf sikel dalam yang berorde m titik, Dimana setiap titik yang berhadapan saling terhubung langsung. Graf Antiprisma dengan m buah titik dilambangkan dengan AP_m. Graf Antiprisma mempunyai titik sebanyak $2m$ dan sisi sebanyak $4m$, Dimana $m \geq 3$ (Fitriani,2021).

Contoh 1.8.7 Berikut adalah gambar dari graf Antiprisma



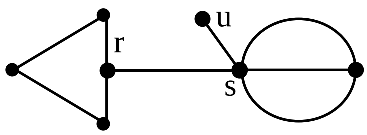
Gambar 1.8.7 Graf AP_3

1.9 Blok

Salah satu istilah pada teori graf yaitu blok. Graf yang memuat titik-titik potong, kemudian dipartisi menjadi beberapa subgraf terhubung yang tidak memuat titik potong, maka subgraf tersebut disebut juga blok. Sebelum mendefinisikan blok perlu diketahui istilah graf nonseparable.

Definisi 1.9.1 Graf Nonseparable adalah graf terhubung nontrivial yang tidak memiliki titik potong, seperti graf siklus, graf lengkap, dan graf roda (Hasmawati,2020).

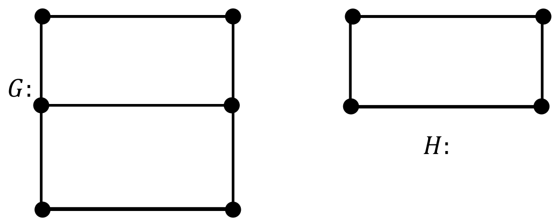
Contoh 1.9.1 Perhatikan Gambar 1.9.1, Graf G bukan merupakan Graf Nonseparable karena terdapat titik potong dan jembatan.



Gambar 1.9.1 Graf Bukan *Nonseparable*

Definisi 1.9.2 Misalkan G dan H adalah graf. Jika $H \subset G$, Maka H disebut subgraf sejati dari graf G (Hasmawati,2020).

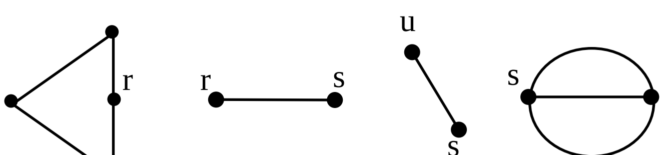
Contoh 1.9.2 Perhatikan Gambar 1.9.1 Graf H adalah subgraf sejati dari graf G.



Gambar 1.9.2 Subgraf Sejati

Definisi 1.9.3 Misalkan H adalah subgraf nonseparable dari graf G. Jika subgraf H bukan subgraf sejati dari sembarang subgraf nonseparable lainnya dari G, maka subgraf H disebut blok pada graf G (Hasmawati,2020).

Contoh 1.9.3 Subgraf-subgraf berikut merupakan blok-blok graf G pada Gambar 1.9.1

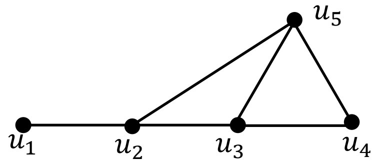


Gambar 1.9.3 Blok-blok Graf G

1.10 Diameter pada Graf

Definisi 1.10.1 Graf G dikatakan eksentrisitas suatu titik $u \in V(G)$, dinotasikan dengan $e(u)$ adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari u ke setiap titik di G, dengan kata lain $e(u) = maks\{d(u,v): u, v \in V(G)\}$ (Gross,2019).

Contoh 1.10.1 Misalkan Graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_5, u_3u_4, u_3u_5, u_4u_5\}$.



Gambar 1.10.1 Graf G

Tabel 1. 2 Eksentrisitas dari dua titik $u - v$

Titik $\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{d(u,v)}$ Titik v: u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$\boldsymbol{e(u)}$
$\boldsymbol{u_1}$		1	2	3	2	3
$\boldsymbol{u_2}$	1		1	2	1	2
$\boldsymbol{u_3}$	2	1		1	1	2
$\boldsymbol{u_4}$	3	2	1		1	3
$\boldsymbol{u_5}$	2	1	1	1		2

Berdasarkan Tabel 1.2 diperoleh $e(u_1) = e(u_4) = 3$, dan $e(u_2) = e(u_3) = e(u_5) = 2$.

Definisi 1.10.2 (Gross,2019) Diameter dari graf G, dinotasikan $diam(G)$ adalah maksimum jarak dari seluruh pasang titik di graf G atau dapat dituliskan

$$diam(G) = maks\{e(u): u \in V(G)\}$$

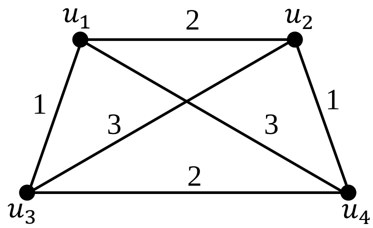
Contoh 1.10.2 Graf pada Gambar 1.10.1 diketahui $e(u_1) = e(u_4) = 3$, dan $e(u_2) = e(u_3) = e(u_5) = 2$, sehingga $diam(G) = maks\{e(u)\} = 3$

1.11 Pewarnaan pada Graf

Pewarnaan pada graf dibedakan menjadi tiga, diantaranya pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan peta. Namun, pada penelitian ini menggunakan pewarnaan sisi.

Definisi 1.11.1 Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian warna pada sisi-sisi di graf sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga (terhubung langsung) memiliki warna yang berbeda (Munir,2010).

Contoh 1.11.1 Graf G pada Gambar 1.11.1 merupakan graf dengan pewarnaan sisi-3 dengan himpunan warna $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3\}$.

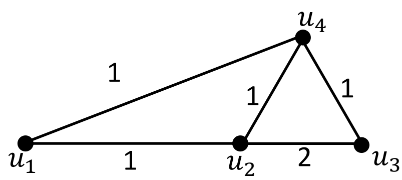


Gambar 1.11.1 Graf G dengan pewarnaan sisi-3

1.12 Bilangan Terhubung Pelangi

Definisi 1.12.1 Misalkan graf G adalah graf terhubung yang non-trivial dan k adalah sebuah bilangan bulat positif. Misalkan sisi pada graf G diwarnai sebanyak k warna, Dimana sisi yang bertetangga dapat diwarnai sama. Lintasan terpendek dari titik u ke titik v di G disebut lintasan Pelangi (*rainbow path*) jika sisi-sisi pada lintasan tersebut mempunyai warna yang berlainan (Chartrand,2008).

Contoh 1.12.1 Misalkan Graf A dengan himpunan titik $V(A) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan himpunan sisi $E(A) = \{u_1u_2, u_1u_4, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4\}$.



Gambar 1.12.1 Graf A

Berdasarkan Gambar 1.12.1, untuk setiap titik u dan v terdapat lintasan Pelangi yang disajikan pada Tabel 1.3 berikut:

Tabel 1. 3 Lintasan Pelangi $u - v$ pada Graf A

	Lintasan Pelangi $\boldsymbol{u - v}$			
Titik $\boldsymbol{u}$	Titik v			
	u_1	u_2	u_3	u_4
$\boldsymbol{u_1}$		u_1, u_2	u_1, u_2, u_3	u_1, u_4
$\boldsymbol{u_2}$	u_2, u_1		u_2, u_3	u_2, u_4
$\boldsymbol{u_3}$	u_3, u_2, u_1	u_3, u_2		u_3, u_4
$\boldsymbol{u_4}$	u_4, u_1	u_4, u_2	u_4, u_3	

Definisi 1.12.2 Misalkan graf G adalah graf terhubung tak trivial dan k adalah sebuah bilangan bulat positif. Didefinisikan pewarnaan sisi $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, k\}$, Graf G dengan pewarnaan sisi c disebut terhubung Pelangi (*rainbow connection*), jika untuk setiap pasangan titik $u, v \in G$ terdapat lintasan Pelangi (*rainbow path*) (Chartrand,2008).

Contoh 1.12.2 Graf G pada Gambar 1.12.1 dikatakan terhubung Pelangi, karena menurut Tabel 1.3 setiap dua titik u dan v di G terdapat lintasan Pelangi $u - v$.

Definisi 1.12.3 Misalkan graf G adalah graf pewarnaan sisi pada G dikatakan pewarnaan Pelangi (*rainbow coloring*), jika pewarnaan itu menyebabkan graf G terhubung Pelangi (*rainbow connection*) (Chartrand,2008).

Contoh 1.12.3 Graf G pada Gambar 1.12.1 dengan pewarnaan sisi-2 merupakan pewarnaan Pelangi karena menyebabkan G terhubung Pelangi.

Definisi 1.12.4 Misalkan graf G adalah graf terhubung tak trivial dan k adalah bilangan bulat positif terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf menjadi terhubung Pelangi (*rainbow connection*). Pewarnaan Pelangi (*rainbow coloring*) yang menggunakan k warna disebut pewarnaan-k Pelangi, maka k disebut bilangan terhubung Pelangi yang dinotasikan dengan $rc(G)$ (Chartrand,2008).

Contoh 1.12.4 Graf G pada Gambar 1.12.1 dengan pewarnaan sisi-2 merupakan pewarnaan-2 pelangi karena dengan memberikan 2 warna pada sisi graf G menyebabkan G terhubung Pelangi, maka $rc(G) = 2$.

Teorema 1.12.1 misalkan G adalah graf terhubung tak trivial, maka $rc(G) \geq diam(G)$ (Chartrand,2008).

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian Pustaka (*library search).* Metode penelitian Pustaka adalah sebuah metode penelitian yang dilakukan dengan cara membaca literatur-literatur yang telah ada sebelumnya dan menjadikannya sumber data dalam penelitian serta memastikan penelitian yang dilakukan belum diteliti oleh para peneliti sebelumnya.

2.2 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan sejak tanggal 25 Agustus 2024. Penelitian dilakukan secara daring dan luring. Penelitian ini menggunakan sumber literatur yang tersedia secara langsung di perpustakaan resmi dan laboratorium matematik Universitas Hasanuddin serta beberapa yang tersedia di internet.

2.3 Prosedur Penelitian

Akan dijabarkan secara rinci prosedur penelitian sebagai berikut.

1. Mengumpulkan Data
   Peneliti mencari dan mengumpulkan data dari beberapa literatur literatur yang telah diterbitkan sebelumnya. Literatur yang dimaksud berupa buku, jurnal, artikel, skripsi, hingga sumber-sumber sains lainnya yang berhubungan dengan topik yang sedang dikaji. Juga tak luput dari literatur yang disampaikan secara verbal oleh dosen Matematika Universitas Hasanuddin.
2. Penentuan Spesifikasi Penelitian
   Setelah dilakukan pengumpulan data, selanjutnya akan dilakukan spesifikasi penelitian. Spesifikasi yang dimaksud adalah penentuan bilangan terhubung pelangi dari suatu graf. Adapun jenis graf yang akan diteliti adalah graf $Le_3 \odot AP_n$ dan $C_n \odot AP_n$, untuk $n \geq 3$.
3. Analisis Data
   Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.
   a) Mendefinisikan dan menggambarkan graf $Le_3 \odot AP_n$ dan $C_n \odot AP_n$.
   b) Memberikan pewarnaan sisi pada graf $Le_3 \odot AP_n$ dan $C_n \odot AP_n$.
   c) Menentukan bilangan terhubung Pelangi pada graf $Le_3 \odot AP_n$ dan $C_n \odot AP_n$.
   d) Merumuskan kesimpulan terkait bilangan terhubung Pelangi pada graf $Le_3 \odot AP_n$ dan $C_n \odot AP_n$.

2.4 Alur Penelitian

Berikut alur penelitian ini :