

## BAB 1 PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan landasan teori.

### 1.1 Latar Belakang

Penyakit menular merupakan salah satu masalah kesehatan yang banyak ditemukan di berbagai negara berkembang. Salah satu penyakit menular yang memengaruhi kesehatan masyarakat di seluruh dunia adalah meningitis. Meningitis merupakan penyakit dengan morbiditas dan mortalitas tinggi termasuk di negara Indonesia. Jumlah kasus meningitis di Indonesia pada tahun 2012 adalah sebesar 12.010 pasien laki-laki dan 7.371 pasien wanita. Dari jumlah tersebut, 1025 pasien meninggal dunia. Menurut data nasional tahun 2013 menunjukkan bahwa jumlah pasien meningitis mencapai 40 orang, 7 diantaranya meninggal dunia. Sementara itu, pada tahun 2014 dilaporkan 36 pasien tertular meningitis di mana 67% pasien laki-laki dan sisanya adalah pasien wanita. Dari jumlah tersebut, 11 pasien dilaporkan meninggal dunia (Menkes RI, 2013).

Meningitis adalah peradangan pada meninges atau selaput pelindung yang menutupi otak dan sumsum tulang belakang. Kondisi ini biasanya disebabkan oleh bakteri, virus maupun protozoa dan berpotensi menimbulkan wabah. Peradangan pada meninges biasanya terjadi karena infeksi cairan yang mengelilingi otak dan sumsum tulang belakang (Abdullahi Baba dkk., 2020). Adapun meningitis bakteri dapat disebabkan oleh tiga bakteri diantaranya *Neisseria Meningitidis*, *Haemophilus Influenzae*, dan *Streptococcus Pneumoniae* (Asamoah dkk., 2018).

Gejala awal dari meningitis adalah demam dan akan muncul dengan sangat cepat gejala spesifik seperti muntah, sakit kepala, leher kaku, kejang, gangguan kesadaran, serta sensitif terhadap cahaya. Adapun meningitis terbagi atas dua kelompok usia berdasarkan penyebabnya, yaitu kelompok usia bayi baru lahir dan kelompok usia dewasa. Pada bayi baru lahir, meningitis disebabkan oleh bakteri *Escherichia Coli*, *Influenza*, *Streptococcus Group B* dan *Listeria Monocytogenes*. Sementara pada kelompok usia dewasa disebabkan oleh *Streptococcus Pneumonia*, *Listeria Monocytogenes*, *Streptococcus Aureus*, dan *Streptococcus* yang menyerang gigi (Adawiyah dkk., 2022). Penyakit menular ini memengaruhi sekitar 1,2 juta orang di seluruh dunia dan menyebabkan sekitar 135.000 kematian setiap tahunnya (Blyuss, 2016).

Meningitis merupakan masalah yang serius karena dapat menyebabkan komplikasi yang parah termasuk kerusakan neurologis permanen atau kematian sehingga membutuhkan pencegahan dan intervensi tepat waktu. Lebih jelasnya, Martínez dkk., (2013) menjelaskan bahwa penyakit meningitis menjadi lebih buruk jika tidak dicegah lebih awal, bahkan dengan pengobatan yang tepat, kemungkinan besar individu tersebut akan meninggal.

Banyaknya jumlah kasus dan penderita meningitis membuat penyakit ini menarik untuk dikaji khususnya melalui pendekatan model matematika. Model matematika merupakan salah satu cara untuk merepresentasikan persoalan kompleks ke dalam bentuk matematika. Model matematika merupakan abstraksi, penyederhanaan dan konstruksi matematika terkait bagian dari kenyataan dan didesain untuk tujuan khusus. Dengan demikian, model matematika harus merepresentasi situasi dari permasalahan yang diteliti. Model matematika dapat berupa persamaan atau sistem persamaan. Model ini diharapkan mampu merepresentasi hal-hal penting dan mengabaikan hal-hal yang tidak esensial. Dengan kata lain, pemodelan matematika merupakan suatu sistem persamaan yang merepresentasikan suatu permasalahan kompleks yang tengah diamati (Zadrak, 2018). Dengan demikian, dalam upaya memahami dinamika penyebaran penyakit, pendekatan matematis menjadi alat yang efektif untuk memodelkan dan menganalisis fenomena epidemiologis.

Beberapa penelitian telah mengkaji model penyebaran meningitis dan terbukti bahwa model matematika mampu membantu meningkatkan pemahaman terkait penularan dan pengendalian penyakit menular. Martínez dkk. (2013) membagi populasi menjadi lima kelas yang terdiri atas kelas rentan, terinfeksi dengan gejala, terinfeksi tanpa gejala, pembawa, sembuh/pulih, dan meninggal dengan menggunakan model matematika diskrit. Sebagai rujukan Shan & Zhu (2014) membahas tentang fungsi pemulihan tak linier dengan jumlah tempat tidur rumah sakit per 10.000 populasi pada model matematika SIR dengan kejadian jenuh standar. Penelitian tersebut menunjukkan dinamika kompleks yang menarik seperti bifurkasi mundur, bifurkasi *saddle-node*, bifurkasi *hopf*, dan bifurkasi tipe *Bogdanov-Takens* dimensi tiga. Penelitian lain dilakukan oleh Abdelrazec dkk., (2016) membahas tentang dinamika penyebaran demam berdarah dengan menggunakan laju pemulihan tak linier. Penelitian tersebut menghasilkan kesimpulan bahwa ternyata sumber daya yang terbatas berdampak pada sistem kesehatan dan pengendalian penyakit. Penelitian lain dilakukan oleh Ibrahim dan Sulma (2020) yang mempelajari tentang model matematika penyebaran penyakit meningitis yang mempertimbangkan lima kompartemen yaitu *susceptible* ( $S$ ), *carriers* ( $C$ ), *infected without symptoms* ( $I_A$ ) *infected with symptoms* ( $I_S$ ) dan *recovered* ( $R$ ) yang selanjutnya pada model tersebut diberikan vaksinasi, kampanye, dan pengobatan dalam mekanisme perubahan kompartemen dalam model. Adapun penelitian lain dilakukan oleh Asamoah dkk., (2020) menganalisis bifurkasi pada model epidemiologi meningitis dengan empat model kompartemen *susceptible* ( $S$ ), *carrier* ( $C$ ), *infected* ( $I$ ), dan *recovery* ( $R$ ). Studi literatur mengenai paragraf ini akan dikaji lebih lanjut pada subbab studi review penelitian sebelumnya.

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik memodifikasi model Asamoah dkk., (2020) dengan empat model kompartemen *susceptible* ( $S$ ), *carrier* ( $C$ ), *infected* ( $I$ ), dan *recovery* ( $R$ ) dengan menambahkan parameter vaksinasi serta pengobatan sebagai faktor kompleks yang terdapat dalam laju pemulihan tak linier

dan menganalisis kestabilan pada model penyebaran penyakit meningitis dengan judul :

### **Analisis Kestabilan pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Meningitis dengan Laju Pemulihan Tak Linier melalui Vaksinasi dan Pengobatan**

#### **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana mengembangkan model matematika penyebaran penyakit meningitis dengan laju pemulihan tak linier melalui vaksinasi dan pengobatan ?
2. Bagaimana menganalisis titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik pada model penyebaran penyakit meningitis dengan laju pemulihan tak linier melalui vaksinasi dan pengobatan ?
3. Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar dan sensitivitas parameter yang memengaruhi model ?
4. Bagaimana menganalisis terjadinya bifurkasi pada model penyebaran penyakit meningitis ?
5. Bagaimana menganalisis hasil simulasi kasus penyebaran penyakit meningitis ?

#### **1.3 Batasan Masalah**

Dalam penulisan skripsi ini diberikan asumsi awal yang dijadikan batasan masalah agar tidak menimbulkan penafsiran yang lebih luas, batasan masalah berdasarkan asumsi sebagai berikut :

1. Penyakit meningitis yang diteliti adalah penyakit yang disebabkan oleh virus atau bakteri.
2. Kompartemen pada penelitian ini terbagi atas 4 kelas yang terdiri atas *susceptible (S)* , *carrier (C)*, *infections (I)*, *recovery (R)*.
3. Program vaksinasi hanya diberikan pada individu dalam kompartemen *susceptible (S)* dan individu yang divaksinasi berpindah langsung ke kompartemen *recovery (R)*.

#### **1.4 Tujuan Penelitian**

Berikut ini merupakan tujuan dari penulisan skripsi ini yaitu :

1. Mengembangkan model matematika penyebaran penyakit meningitis dengan laju pemulihan tak linier melalui vaksinasi dan pengobatan.
2. Menganalisis titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik pada model penyebaran penyakit meningitis dengan laju pemulihan tak linier melalui vaksinasi dan pengobatan.
3. Menentukan bilangan reproduksi dasar dan sensitivitas parameter yang mempengaruhi model.
4. Menganalisis terjadinya bifurkasi pada model penyebaran penyakit meningitis.
5. Menganalisis hasil simulasi kasus penyebaran penyakit meningitis.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Secara umum dapat berkontribusi memberikan pemahaman di bidang matematika mengenai model matematika penyebaran penyakit meningitis dengan laju pemulihan tak linier melalui vaksinasi dan pengobatan.
2. Secara khusus dapat membantu instansi kesehatan dalam menangani penyebaran penyakit meningitis.

### 1.6 Landasan Teori

Pada sub bab ini diberikan beberapa teori yang menjadi dasar penelitian. Teori – teori ini mencakup konsep dasar persamaan diferensial, analisis titik kesetimbangan, analisis sensitivitas serta analisis bifurkasi untuk menyelidiki stabilitas sistem dinamis tak linier. Selain itu, dijelaskan pula parameter kunci dalam menentukan ambang batas penyebaran penyakit yaitu bilangan reproduksi dasar.

#### 1.6.1 Studi Review Penelitian Sebelumnya

Model matematika telah terbukti mampu meningkatkan pemahaman tentang transmisi dan pengendalian penyakit menular. Salah satunya adalah meningitis. Penelitian oleh Kribs-Zaleta & Velasco-Hern Andez (2001) menggunakan model matematika dan menunjukkan bahwa vaksinasi dapat memicu bifurkasi mundur. Penelitian lain juga dilakukan oleh Martcheva & Thieme (2003) bahwa salah satu mekanisme dalam menghasilkan bifurkasi mundur adalah adanya superinfeksi. Castillo-Chavez (2004) melakukan penelitian dengan menggunakan model matematika untuk menganalisis dinamika penularan penyakit meningitis. Peneliti menyatakan bahwa infeksi ulang eksogen dapat mengakibatkan bifurkasi mundur yang kemudian ditemukan dalam model matematika lain untuk penularan tuberkulosis. Martínez dkk., (2013) mempelajari dinamika transmisi *meningitis meningokokus* dengan membagi populasi ke dalam lima kelas yang terdiri atas kelas rentan, terinfeksi tanpa gejala, terinfeksi dengan gejala, pembawa (carrier), sembuh dan meninggal. Dalam menemukan cara mengendalikan epidemi meningitis, Miller dan Shahab (2018) mempelajari efektivitas biaya dari strategi imunisasi. Kemudian Asamoah dkk., (2018) mengkaji dinamika transmisi meningitis dengan model kompartemen *susceptible (S)*, *carrier (C)*, *infected (I)*, dan *recovery (R)* menggunakan kontrol vaksinasi dan pengobatan. Analisis mencakup stabilitas sistem dan efektivitas intervensi untuk mencegah wabah. Selain itu, peneliti juga menggunakan *sensitivity heat map* serta spektrum sensitivitas parameter untuk menguji sensitivitas dari kompartemen dan parameter. Hasil penelitian menunjukkan bahwa strategi terbaik mengendalikan epidemi meningitis adalah dengan adanya vaksinasi dan pengobatan karena adanya edukasi kesehatan masyarakat.

Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Musa pada tahun 2019 yang mengkaji tentang penyakit meningitis pada daerah tropis dan sub-tropis dengan menggunakan model matematika untuk mengeksplorasi dampak ketersediaan sumber daya medis yang terbatas terhadap dinamika transisi penyakit meningitis.

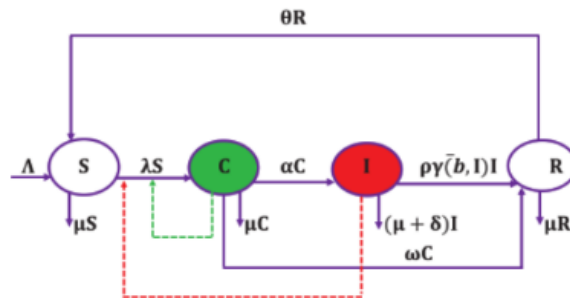
Peneliti memodelkan dinamika penyebaran meningitis dengan mempertimbangkan individu rentan ke dalam dua kelompok beresiko tinggi dan rendah. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penyediaan sumber daya medis yang memadai sangat penting untuk mengurangi kematian akibat penyakit meningitis terutama di wilayah di mana penyakit meningitis sering terjadi. Afifah & Noviani (2019) memodifikasi model matematika berbasis SCIR dengan empat kompartemen : *susceptible*( $S$ ), *carrier* ( $C$ ), *infected* ( $I$ ), dan *recovery* ( $R$ ) dan menambahkan dua variabel kontrol yaitu vaksinasi dan pengobatan. Peneliti menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, serta mengkaji kestabilan global menggunakan metode *Lyapunov*. Model ini menunjukkan efektivitas vaksinasi dalam mengendalikan penyebaran meningitis.

Abdullahi Baba dkk., (2020) melakukan penelitian terhadap dinamika penyakit meningitis yang baru muncul di Nigeria Utara dengan menggunakan model matematika yang terdiri atas enam kompartemen, yaitu *susceptible* ( $S$ ), *carrier of infection with respect strain 1* ( $C_1$ ), *carrier of infection with respect strain 2* ( $C_2$ ) , *ill individual with respect strain 1* ( $I_1$ ) , *ill individual with respect to strain 2* ( $I_2$ ) dan *recovered* ( $R$ ). Peneliti menganalisis pengaruh satu aliran pada dinamika aliran lainnya menggunakan Fungsi Lyapunov dan analisis kestabilan global. Rabiatur adawiyah (2020) melihat pengaruh dari perlakuan vaksinasi dan pengobatan dengan memperhatikan beberapa kompartemen yang terdiri atas *susceptible* ( $S$ ), *carrier* ( $C$ ), *infected without symptoms* ( $I_A$ ), *infected with symptoms* ( $I_S$ ), *recovery without disability* ( $R_1$ ) dan *recovery with disability* ( $R_2$ ) .

Kemudian Asamoah dkk., (2020) mengembangkan model empat variabel dinamika transmisi meningitis dengan memperkenalkan pemulihan tak linier dan menganalisis terjadinya bifurkasi. Penelitian tersebut mengungkapkan bahwa perubahan parameter tertentu dapat menyebabkan dinamika yang lebih rumit, termasuk potensi wabah berulang meski bilangan reproduksi dasar kurang dari satu. Peneliti juga mempelajari dampak dari terbatasnya antibiotik dan kapasitas perawatan di rumah sakit terhadap penyebaran penyakit meningitis.

### 1.6.2 Model Kompartemen

Model Kompartemen adalah suatu aliran yang mendeskripsikan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya . Terdapat beberapa kelas dalam sebuah kompartemen diantaranya adalah *susceptible* ( $S$ ) yakni individu yang sehat namun rentan terhadap penyakit, *carrier* ( $C$ ) atau individu yang terjangkit penyakit namun belum terdapat tanda atau gejala penyakitnya (masa inkubasi), *infected* ( $I$ ) yakni individu terinfeksi yang dapat menularkan penyakitnya, dan *recovered* ( $R$ ) yaitu individu yang kebal setelah terinfeksi atau tahap pemulihan.



**Gambar 1.** Contoh Model Matematika oleh Asamoah, dkk. 2020.

### 1.6.3 Dinamika Transmisi Penyakit Meningitis

Meningitis adalah penyakit yang berbahaya dan ditularkan oleh manusia ke manusia lainnya dengan cara perpindahan droplet pernafasan pada manusia yang terkena meningitis. Penyakit ini sebagian besar menyebar di masyarakat dan umumnya disebabkan oleh bakteri seperti *Listeria monocytogenes*, *Streptococcus pneumoniae*, *Streptococcus grup B*, *Neisseria meningitidis* dan *Haemophilus influenza* yang menyebar dari satu orang ke orang lain. Virus ini berkembang di bagian belakang hidung dan mulut, dan kemudian memasuki sistem pernafasan melalui bersin atau batuk. Penderita akan mengalami kematian bila tidak ditangani secara tepat. Adapun masa inkubasi dari virus tersebut adalah 10 (sepuluh hari). Pada masa inkubasi ini, penderita telah terinfeksi virus tetapi belum dapat menunjukkan gejala-gejala penyakit dan juga belum dapat menularkannya pada orang lain (Solomon, 2018).

Ada beberapa mikro-organisme yang berperan untuk menyebabkan penyakit meningitis di antara individual di kalangan masyarakat, di antaranya *Listeria monocytogenes*, *streptococcus pnemonia*, *steprococcus group B*, dan *haemophilias* yang merupakan penyakit transmisi. Penyakit ini terbagi atas beberapa individual berdasarkan kelompok usia. Beberapa virus atau bakteri terdapat pada bayi yang baru lahir, yaitu *steptococcus pneumonia*, grup *steptococcus*, *listeria monocytogenes*, *influenza type B* dan *escherichia coli*. Pada kelompok usia dewasa, meningitis menginfeksi melalui gigi.

Penyakit Meningitis tersebut disebabkan oleh *Streptococcus* dan *Neisseria meningitidis*. Penyakit yang dapat menyebabkan kematian ini, membunuh dengan waktu yang singkat individu yang tidak memiliki gejala dan diagnosa secara tepat (Rabiatul adawiyah, 2020). Tidak ada upaya pengobatan dan pengontrolan yang dapat mencegah kematian tersebut jika penyakit ini diketahui dengan waktu yang sudah terlambat (Abdullahi dkk., 2020).

### 1.6.4 Sistem *autonomous*

Sistem *autonomous* merupakan sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

dengan fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi kontinu serta tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas  $t$  (Boyce dan DiPrima, 2009).

### 1.6.5 Sistem Persamaan Diferensial Linear dan Tak Linier

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial adalah persamaan yang memiliki lebih dari satu persamaan yang harus konsisten dan trivial.

Diberikan sistem persamaan diferensial *autonomous* :

$$\dot{x} = f(x). \quad (2)$$

Sistem persamaan (2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Sistem Persamaan (3) dikatakan linier jika  $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$  masing-masing linier terhadap variabel bebas  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ .

Sistem persamaan diferensial tak linier adalah sistem persamaan diferensial biasa yang tak linier. Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan tak linier jika sistem terdiri atas lebih dari satu persamaan diferensial di mana hubungan antara variabel-variabel atau turunannya bersifat tak linier.

Diberikan sistem persamaan diferensial tak linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1^2 - 3x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Persamaan (4) merupakan sistem persamaan diferensial tak linier dengan variabel bebas  $t$  dan variabel tak bebas  $x_1$  dan  $x_2$ . Persamaan (4) dikatakan sistem persamaan diferensial tak linier karena memuat perkalian antara variabel tak bebas  $x_1$  dan  $x_2$  pada persamaan pertama, kemudian terdapat kuadrat dari variabel tak bebas  $x_1$  pada persamaan kedua.

### 1.6.6 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan dapat diperoleh ketika tidak ada perubahan pada suatu sistem seiring berjalannya waktu. Secara matematis, titik keseimbangan dapat didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 1** Suatu titik  $x^* \in R$  dikatakan titik keseimbangan dari  $\dot{x} = f(x), x \in R^n$  sedemikian sehingga  $f(x^*) = 0$  (Wiggins, 2003) .

Secara umum, model penyebaran penyakit mempunyai dua titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik penyakit.

Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya di dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit.

### 1.6.7 Linearisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sistem tak linier sulit diselesaikan dibandingkan sistem linier. Salah satu cara untuk menyelesaikan sistem tak linier adalah dengan melakukan linearisasi di sekitar titik kesetimbangan. Ini dilakukan dengan mengamati perilaku lokal pada sekitar titik kesetimbangan sistem. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa tak linier berikut :

$$\dot{x} = f(\bar{x}), x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

dengan  $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  adalah suatu fungsi bernilai vektor dalam  $t$  dan  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  merupakan suatu fungsi mulus yaitu fungsi yang memiliki turunan parsial pertama, kedua dan seterusnya yang kontinu pada domain ( $U$ ) yang tak terdefinisi pada sub-himpunan  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik kesetimbangan  $\bar{x}$ , maka sistem (5) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{x} = \dot{\eta} = J\eta + \varphi(\eta), \quad (6)$$

dengan  $J$  adalah matriks Jacobi yang dinyatakan sebagai berikut :

$$J = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Suku  $\bar{x}$  dan  $\varphi(\eta)$  merupakan suku berorde tinggi yang bersifat  $\lim_{\eta_i \rightarrow 0} \varphi(\eta_i) = 0$ , dengan  $\eta_i = x_i - \bar{x}_i$  dan  $J\eta$  pada sistem persamaan (6) disebut pelinearan sistem persamaan (5) (Tu, 1994). Kestabilan titik  $\bar{x}$  dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu  $\lambda$  yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik. :

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (7)$$

dengan  $I$  adalah matriks identitas. Dalam Tabel 1 diberikan beberapa jenis nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik (7).

**Tabel 1.** Jenis Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen.

| No | Nilai Eigen                 | Sifat Kestabilan |
|----|-----------------------------|------------------|
| 1  | $\lambda_i > \lambda_j > 0$ | Tidak Stabil     |
| 2  | $\lambda_i < \lambda_j < 0$ | Stabil Asimtotik |
| 3  | $\lambda_i < 0 < \lambda_j$ | Tidak Stabil     |

|   |                                          |                  |
|---|------------------------------------------|------------------|
| 4 | $\lambda_i = \lambda_j > 0$              | Tidak Stabil     |
| 5 | $\lambda_i = \lambda_j < 0$              | Stabil Asimtotik |
| 6 | $\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, r > 0$ | Tidak Stabil     |
| 7 | $\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, r < 0$ | Stabil Asimtotik |
| 8 | $\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic$        | Stabil           |

Sumber: (Boyce, 2012).

### 1.6.8 Teori Center Manifold

Teori *center manifold* digunakan untuk menentukan kestabilan lokal dari kesetimbangan nonhiperbolik. Kesetimbangan nonhiperbolik adalah kesetimbangan yang memiliki setidaknya satu nilai eigen dengan bagian riil nol.

**Teorema 1.** *Pandang sebuah sistem persamaan diferensial biasa yang bergantung pada parameter  $\beta$ , yaitu*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \beta), f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}). \quad (8)$$

Tanpa mengabaikan keadaan umum, diasumsikan bahwa  $\vec{0}$  adalah titik kesetimbangan sistem (8) untuk setiap nilai parameter  $\beta$ , sehingga  $f(\vec{0}, \beta) = 0$  untuk setiap  $\beta$ . Diasumsikan bahwa

- $A = D_x f(\vec{0}, 0) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{0}, 0) \right]$  merupakan matriks hasil linearisasi dari sistem (8) di sekitar titik kesetimbangan  $\vec{0}$  dengan  $\beta$  dianggap 0. Nol adalah nilai eigen sederhana dari  $A$  dan nilai eigen  $A$  yang lain memiliki bagian real negatif.
- Matriks  $A$  memiliki vektor eigen kanan nonnegatif  $w$  serta vektor eigen kiri  $v$  yang bersesuaian dengan nilai eigen nol. Misalkan  $f_k$  adalah komponen  $f$  ke  $k$  dan

$$a = \sum_{k,i,j=1}^n v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}, 0),$$

$$b = \sum_{k,i=1}^n v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \phi}(\vec{0}, 0).$$

Dinamik lokal sistem (8) di sekitar  $\vec{0}$  seluruhnya ditentukan oleh  $a$  dan  $b$ .

- $a > 0, b > 0$ . Ketika  $\beta < 0$  dengan  $|\beta| \ll 1, \vec{0}$  stabil asimtotik lokal dan terdapat suatu titik kesetimbangan positif tak stabil. Ketika  $0 < \beta \ll 1, \vec{0}$  tak stabil dan terdapat suatu titik kesetimbangan negatif stabil asimtotik

lokal.

2.  $a < 0, b < 0$ . Ketika  $\beta < 0$  dengan  $|\beta| \ll 1$ ,  $\vec{0}$  tak stabil. Ketika  $0 < \beta \ll 1$ ,  $\vec{0}$  stabil asimtotik lokal dan terdapat suatu titik kesetimbangan positif tak stabil.
3.  $a > 0, b < 0$ . Ketika  $\beta < 0$  dengan  $|\beta| \ll 1$ ,  $\vec{0}$  tak stabil dan terdapat suatu titik kesetimbangan negatif stabil asimtotik lokal. Ketika  $0 < \beta \ll 1$ ,  $\vec{0}$  stabil dan muncul suatu titik kesetimbangan positif tak stabil.
4.  $a < 0, b > 0$ . Ketika  $\beta$  berubah dari negatif menjadi positif,  $\vec{0}$  berubah kestabilannya dari stabil menjadi tak stabil. Begitu juga, suatu titik kesetimbangan negatif tak stabil berubah menjadi positif dan stabil asimtotik lokal. (Castillo-Chavez dan Song, 2004).

**Remark 1.** Syarat bahwa  $\mathbf{w}$  nonnegatif pada Teorema 1 tidak perlu dipenuhi. Ketika beberapa komponen dalam  $\mathbf{w}$  negatif, Teorema 1 masih dapat diterapkan. Jika  $x_0(j) = 0$  maka  $w_j > 0$  dan jika  $x_0(j) > 0$  maka  $w_j$  tidak perlu positif, dengan  $w_j$  dan  $x_0(j)$  didefinisikan sebagai komponen ke- $j$  dari  $\mathbf{w}$  dan  $x_0$ .  $x_0$  adalah titik kesetimbangan nonnegatif (biasanya  $x_0$  adalah titik kesetimbangan bebas penyakit) (Castillo Chavez-2004).

### 1.6.9 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria nilai eigen dapat digunakan untuk pengujian kestabilan. Namun, kadang ditemukan kesulitan dalam mencari jenis nilai eigen dari akar persamaan karakteristik terutama pada persamaan karakteristik berorde tinggi. Sehingga, untuk menjamin nilai akar persamaan karakteristik bernilai positif atau negatif, diperlukan suatu standar. Kriteria Routh-Hurwitz adalah salah satu kriteria yang efektif untuk menjamin jenis nilai eigen. Ini adalah metode untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan sistem dengan memperhatikan nilai koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akarnya secara langsung.

**Teorema 1** Diberikan suatu persamaan karakteristik :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (9)$$

dengan  $a_i, i = 1, \dots, n$  adalah bilangan real.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  merupakan  $n$  buah akar bernilai real atau kompleks yang memenuhi  $P(\lambda_i) = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Matriks Hurwitz dinotasikan dengan  $H_n$ , yang berisi koefisien-koefisien  $a_i$  dari persamaan karakteristik (9) yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1 > 0, \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \end{aligned}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & . & . & . \\ 1 & a_2 & a_4 & . & . & . \\ 0 & a_1 & a_3 & . & . & . \\ 0 & 1 & a_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan  $a_k = 0$ , saat  $i > n$ . Sistem autonomous berdimensi  $n$  stabil asimtotik jika dan hanya jika  $|Hk| > 0, k = 1, 2, \dots, n$ . Untuk  $n = 4$  persamaan 9 menjadi

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (10)$$

Akar persamaan (10) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

- i.  $a_1 > 0$ ,
- ii.  $a_3 > 0$ ,
- iii.  $a_4 > 0$ ,
- iv.  $a_1a_2 > a_3$  atau  $a_1a_2 - a_3 > 0$ ,
- v.  $a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4$  atau  $a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 > 0$ , (Murray, 2002).

### 1.6.10 Bilangan Reproduksi Dasar

Salah satu masalah yang menjadi perhatian paling penting tentang penyakit menular adalah kemampuannya untuk menyerang populasi. Banyak model epidemiologi memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) yang populasinya tetap tanpa penyakit. Model ini biasanya memiliki parameter ambang batas yang disebut sebagai bilangan reproduksi dasar  $R_0$ . Bilangan reproduksi dasar adalah jumlah perkiraan kasus sekunder yang terjadi dalam populasi rentan oleh individu terinfeksi. Jika  $R_0 < 1$ , maka  $E_0$  stabil asimtotik lokal dan penyakit tidak dapat menyerang populasi. Dalam hal ini rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu yang terinfeksi baru selama periode menular dan infeksi tidak dapat tumbuh. Sebaliknya, jika  $R_0 > 1$ , maka  $E_0$  tak stabil dan wabah selalu mungkin terjadi. Dalam hal ini setiap individu yang terinfeksi menghasilkan rata-rata lebih dari satu infeksi baru dan penyakit dapat menyerang populasi (Driessche dan Watmough, 2002).

Perhitungan bilangan reproduksi merupakan hasil dari linearisasi sistem persamaan diferensial yang berdasarkan titik kesetimbangan bebas penyakit. Metode yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar  $R_0$  adalah metode *Next Generation Matrix*. Metode ini dimulai dengan membagi model kompartemen penyebaran penyakit menjadi kelompok yang terinfeksi dan tidak terinfeksi. Suatu kompartemen disebut terinfeksi apabila terdapat individu-individu terinfeksi di dalamnya. Misalkan terdapat  $1, \dots, m, m+1, \dots, n$  kompartemen. Kompartemen pertama hingga  $m$  memuat individu terinfeksi dan kompartemen  $m+1$  hingga  $n$  memuat individu tidak terinfeksi. Model kompartemen yang memuat individu terinfeksi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\dot{x}_i' = F_i - V_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

dengan  $x_i$  menyatakan jumlah individu pada setiap kompartemen  $i$ .  $F_i$  menyatakan komponen pembentuk matriks  $F$  yang merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke- $i$ .  $F_i$  tidak boleh negatif dan infeksi baru hanya muncul dari populasi rentan.  $V_i$  menyatakan komponen pembentuk matriks  $V$  dan merupakan

perpindahan keluar atau masuk dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya. Jika  $V_i$  menyatakan perpindahan keluar maka  $V_i$  bernilai positif, sedangkan jika menyatakan perpindahan masuk  $V_i$  bernilai negatif. Didefinisikan  $DF$  dan  $DV$  adalah matriks  $m \times m$  sebagai berikut

$$DF = \left[ \frac{\partial F_i(E_0)}{\partial x_j} \right] \text{ dan } DV = \left[ \frac{\partial V_i(E_0)}{\partial x_j} \right], i, j = 1, \dots, m, \quad (12)$$

dengan  $E_0$  merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya *Next Generation Matrix* didefinisikan sebagai berikut

$$K = (DF)(DV)^{-1}.$$

Bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) yang diperoleh dapat ditulis

$$R_0 = \rho(K), \quad (13)$$

dengan  $\rho(K)$  merupakan spektral radius dari matriks  $K$  yang merupakan modulus maksimum nilai eigen (Brauer dan Castillo-Chavez, 2010).

### 1.6.11 Analisis Sensitivitas

Analisis Sensitivitas dilakukan untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai parameter terhadap bilangan reproduksi dasar dan titik tetap endemik khususnya kelas *Carrier (C)* dan *Infected (I)*.

**Definisi 3** *Normalisasi dari variabel  $v$  yang terdiferensial oleh parameter  $p$  menghasilkan normalisasi indeks sensitivitas yang didefinisikan sebagai berikut :*

$$c_p^v = \frac{\partial v}{\partial p} \times \frac{p}{v}, \quad (14)$$

dimana  $v$  merupakan variabel yang akan dianalisis dan  $p$  sebagai parameter (Alemneh & Alemu, 2021).

Menurut Definisi 3 indeks sensitivitas dapat dihitung berdasarkan konsep laju perubahan yang mengukur besar kecilnya perubahan tersebut. Dengan demikian, semakin besar nilai parameter indeks, semakin besar pengaruh parameter pada nilai variabel yang diukur.

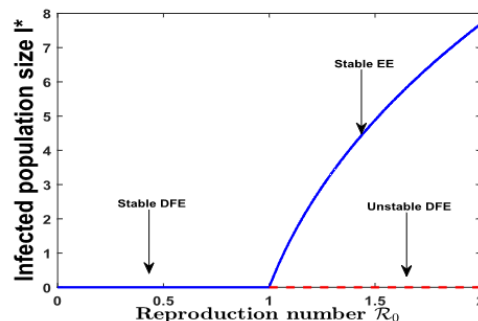
### 1.6.12 Analisis Bifurkasi

Dalam sistem dinamik tak linier sering dijumpai kestabilan pada sekitar titik kesetimbangan suatu sistem persamaan diferensial yang menunjukkan fenomena bifurkasi. Bifurkasi merupakan suatu kondisi dimana terjadinya perubahan jumlah titik kesetimbangan atau perubahan kestabilan pada sistem ketika melewati sebuah titik tertentu (Fajri dkk. 2020). Bifurkasi mengacu pada perubahan keadaan dinamik suatu persamaan atau sistem yang bergantung pada suatu parameter. Bifurkasi satu dimensi terdiri atas beberapa jenis diantaranya bifurkasi *saddle-node*, bifurkasi *transcritical*, dan bifurkasi *pitchfork* (Martin, Vickerman & Hickman, 2011).

Terdapat jenis bifurkasi lain pada beberapa model epidemiologi antara lain bifurkasi maju dan bifurkasi mundur. Bifurkasi ini mempunyai nilai ambang batas berdasarkan bilangan reproduksi dasar  $R_0$ . Tujuannya adalah untuk mengukur jumlah rata-rata dari kasus baru yang dihasilkan populasi rentan menuju populasi

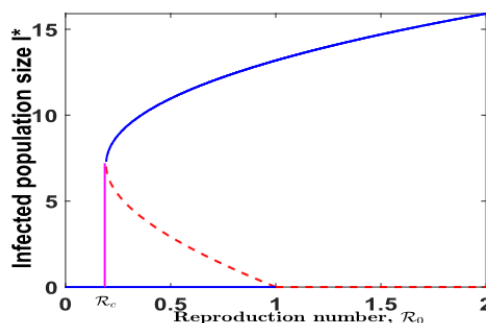
terinfeksi. Ketika  $R_0 < 1$  maka menandakan penyebaran penyakit tidak meluas (titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik). Sedangkan pada kasus lain ketika  $R_0 > 1$  terdapat titik kesetimbangan endemik yang stabil menandakan penyakit mengalami penyebaran. Untuk model epidemiologi yang menunjukkan bifurkasi maju, syarat  $R_0 < 1$  merupakan hal yang diperlukan dan cukup agar penyakit tidak menyebar. Hal tersebut dinamakan bifurkasi maju dengan karakteristik berikut :

- Tidak terdapat titik kesetimbangan positif di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit.
- Tingkat adanya penyakit rendah ketika  $R_0 < 1$ .



**Gambar 2.** Kurva Bifurkasi Maju oleh Asamoah, dkk. 2020.

Gambar 2 menunjukkan bahwa laju populasi terinfeksi rendah dan tidak akan menyebabkan penyebaran suatu penyakit yang meluas. Dalam hal ini titik kesetimbangan non endemik stabil asimtotik lokal ketika  $R_0 < 1$ . Model epidemiologi yang menunjukkan kurva bifurkasi maju, syarat  $R_0 < 1$  cukup untuk mengendalikan penyebaran suatu penyakit.



**Gambar 3.** Kurva Bifurkasi Mundur oleh Asamoah, dkk. 2020.

Gambar 3 menunjukkan terdapat stabilitas titik kesetimbangan endemik dan non endemik ketika  $R_0 < 1$ . Pada fenomena bifurkasi mundur ini, terjadi penyebaran penyakit saat  $R_0 < 1$ . Pada saat  $R_0 > 1$  transmisi penyakit semakin tinggi dan tidak dapat dikontrol, sehingga nilai  $R_0$  hanya dapat dikurangi sedikit namun tidak dapat menghilangkan penyebaran suatu penyakit (Gumel, 2012).

## BAB 2 METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menguraikan tentang metode yang digunakan dalam penelitian ini, yang mencakup prosedur penelitian serta menyajikan diagram alir yang dapat memberikan gambaran singkat dan sistematis mengenai langkah-langkah yang ditempuh dalam penelitian ini.

### 2.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur yang dilakukan dengan mengumpulkan dan mempelajari beberapa buku, jurnal atau literatur lainnya terkait model matematika Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Meningitis dengan Laju Pemulihan Tak Linier melalui Vaksinasi dan Pengobatan.

### 2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Lokasi penelitian bertempat di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Kota Makassar, Provinsi Sulawesi Selatan, yakni di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin. Waktu penelitian berlangsung mulai dari Agustus 2024.

### 2.3 Prosedur Penelitian

Prosedur dari penelitian ini akan disajikan secara rinci sebagai berikut :

1. Mengidentifikasi masalah dengan melakukan studi literatur dengan menelaah berbagai jurnal penelitian model matematika yang relevan, lebih spesifiknya yaitu model epidemi SCIR.
2. Mengembangkan model epidemi SCIR dengan mereduksi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap peristiwa atau kasus dalam model matematika dinamika penularan penyakit meningitis.
3. Melakukan normalisasi dimensi pada model untuk mempermudah analisis karena dapat memahami sifat-sifat dari model tanpa terpengaruh oleh satuan.
4. Menyelesaikan dan menginterpretasi model, setelah mengembangkan model selanjutnya perlu dianalisis secara matematika dengan mencari titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, bilangan reproduksi dasar, linearisasi dan analisis kestabilan, analisis sensitivitas serta analisis bifurkasi.
5. Melakukan analisis solusi numerik atau simulasi menggunakan matlab.
6. Menarik kesimpulan dari hasil yang diperoleh berdasarkan tujuan penelitian.

## 2.4 Diagram Alir

Alur dari penelitian ini disajikan dalam diagram alir berikut ini.

