

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf lahir dari solusi masalah jembatan Königsberg pada tahun 1736 yang di perkenalkan oleh seorang ahli matematika terkenal dari Swiss bernama Leonard Euler. Perkembangan besar teori graf terjadi pada tahun 1852 ketika matematikawan muda Inggris, Francis Guthrie, memperkenalkan sebuah permasalahan empat warna. Pada awal abad ke-20 ketika dikaji oleh Julius Petersen yang berasal dari Denmark, teori graf menjadi salah satu bidang kajian yang mengalami kemajuan yang luar biasa. Hal tersebut terjadi karena teori graf memiliki banyak topik yang menarik dan dapat diterapkan diberbagai bidang baik dalam bidang ilmu matematika maupun pada bidang ilmu lainnya. (Hasmawati, 2020)

Salah satu topik yang dikaji dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf pertama kali di perkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1964. Konsep ini mengalami perkembangan yang pesat pada tahun 1966, ketika Stewart memperkenalkan istilah pelabelan graceful. Pada tahun 1970, Kotzig dan Rosa memperluas kajian tersebut dengan mengeksplorasi konsep *magic labeling* dan *anti magic labeling*. Pada tahun 1990 Hartsfield dan Ringel memperkenalkan konsep *antimagic labeling* yang berfokus pada pelabelan total titik anti ajaib (*total vertex antimagic labeling*) dan pelabelan total sisi anti ajaib (*total edge antimagic labeling*). Selanjutnya, Bodendiek dan Walther pada tahun 1993 memperkenalkan konsep (a, d) antimagic labeling yaitu pelabelan dengan himpunan bobot titik atau bobot sisi yang membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal a dan nilai beda d .

Beberapa penelitian sebelumnya telah banyak mengangkat mengenai pelabelan (a, d) ajaib dan anti ajaib. Berdasarkan studi literatur terdapat beberapa peneliti yang membahas tentang pelabelan anti ajaib, seperti penelitian On $(a, d) - H$ antimagic coverings of graph (Inayah dkk, 2009). Penelitian ini memperkenalkan tentang sebuah gagasan pelabelan total $(a, d) - H - \text{antimagic}$ dan mempelajari sifat sifat dasar pelabelan tersebut serta memberikan contoh kumpulan graf yang memperoleh pelabelan. Berikutnya penelitian tentang "Pelabelan Total $(a, d) - C_3 - \text{Antiajaib Super}$ pada Graf Ular S_n " (Rezekiana dkk, 2016). Penelitian ini membahas tentang pelabelan total $(a, d) - C_3 - \text{anti ajaib super}$ pada graf ular S_n dimana $n \geq 3$ dengan menghasaalkan teorema-teorema yang menyatakan pelabelan total $(6n + 15, 4) - C_3 - \text{antiajaib super}$ pada graf ular S_n dan pelabelan total $(5n + 16, 6) - C_3 - \text{antiajaib super}$ pada graf ular S_n . Serta penelitian "Pelabelan Total Sisi ajaib Pada graf Anti-Fuzzy Bipolar mC_n " (Firmansa, 2023). Penelitian mendeskripsikan bahwa graf anti-fuzzy bipolar total sisi ajaib memiliki konstanta ajaibnya yaitu $m_0^p(G) = d \frac{5mn+3}{2}$ dan $m_0^n(G) = -d \frac{5mn+3}{2}$.

Berdasarkan penelitian dan studi literatur, pembahasan mengenai pelabelan selimut C_3 pada graf surya (C_n, C_3) belum ada. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian terhadap pelabelan selimut pada graf C_n dengan operasi amalgamasi sisi pada setiap sisi C_n terhadap sisi graf C_3 yang menghasilkan graf surya (C_n, C_3) . Selanjutnya penelitian ini akan dituangkan dalam bentuk skripsi dengan judul “**Pelabelan Selimut Segitiga Anti-Ajaib pada Graf Surya**”.

1.2. Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan pola pelabelan selimut- C_3 anti-ajaib pada graf surya (C_n, C_3) .

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan pola pelabelan selimut- C_3 anti-ajaib pada graf surya (C_n, C_3) .

1.4. Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya mengkaji pelabelan selimut- C_3 anti-ajaib pada graf surya (C_n, C_3) dengan nilai $n \geq 4$.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diharapkan dalam penelitian ini adalah dapat menambah pemahaman dan menjadi bahan sumber referensi dalam mengembangkan ilmu matematika diskrit khususnya pada bidang teori graf terkait dengan pelabelan selimut- C_3 . Selain itu, diharapkan penelitian ini dapat menjadi bahan referensi bagi penelitian selanjutnya yang relevan dengan penelitian ini.

1.6. Landasan Teori

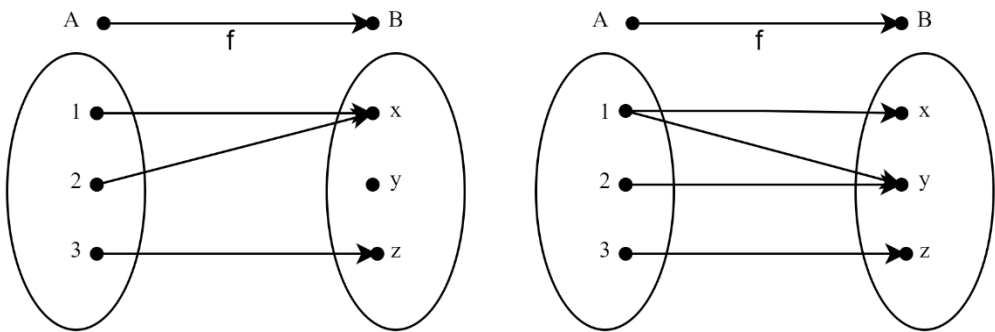
Landasan teori pada penelitian ini akan membahas tentang fungsi, konsep dasar graf, operasi dalam graf, jenis-jenis graf, dan pelabelan selimut pada graf.

1.6.1. Fungsi

Pada sub bab ini akan membahas tentang definisi fungsi, definisi fungsi injektif, definisi fungsi surjektif, dan definisi dari fungsi bijektif.

Definisi 1.1 Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B . Apabila f memetakan suatu $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$ dan ditulis dengan $f: x \rightarrow f(x)$, sedangkan x biasa disebut praperta dari $f(x)$. (Amir & Prasoso, 2016)

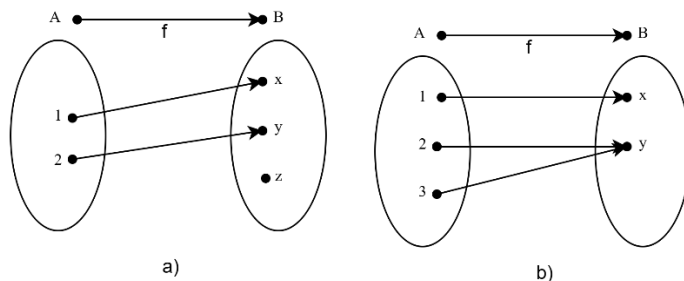
Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f , sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut



Gambar 1. a) Gambar Fungsi dan b) Gambar Bukan Fungsi.

Gambar 1. a) merupakan sebuah gambar fungsi karena terdapat relasi yang melibatkan dua himpunan A dan B dan pemasangan elemen A adalah tunggal. Sedangkan pada gambar 1. b) bukan merupakan fungsi karena ada elemen A yang di pasangan tidak secara tunggal dengan elemen himpunan B .

Definisi 1.2 Misalkan fungsi f menyatakan A dan B maka fungsi f disebut fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen berbeda di B . Selanjutnya, secara singkat dapat dikatakan bahwa $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq a'$ berakibat $f(a) \neq f(a')$ atau ekuivalen. Jika $f(a) = f(a')$ maka akibatnya $a = a'$. (Amir & Prasajo, 2016)

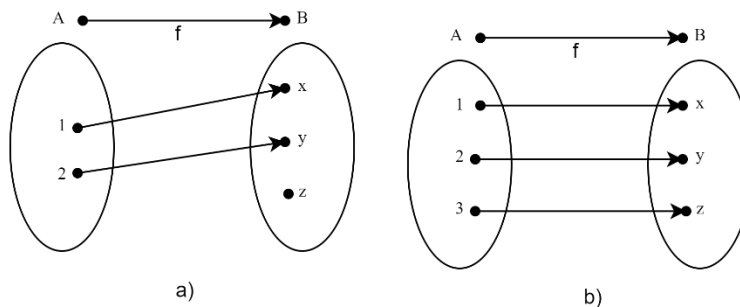


Gambar 2. a) Fungsi Injektif dan b) Bukan fungsi injektif.

Gambar 2. a) merupakan fungsi satu-satu (injektif) dikarenakan setiap elemen di A memiliki pasangan yang berbeda di B dan b) bukan merupakan fungsi injektif karena terdapat dua anggota himpunan A yang memiliki pasangan yang sama pada himpunan B .

Definisi 1.3 Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B , atau $f(A) \subset B$. Apabila

$f(A) = B$, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen dari A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau " f memetakan A Onto B ". (Amir & Prasajo, 2016)



Gambar 3. a) Bukan Surjektif dan b) Surjektif.

Gambar 3.(a) bukan merupakan fungsi surjektif, karena daerah hasil f tidak sama dengan kodomain dari f (himpunan B). Pada gambar 3.(b) merupakan fungsi surjektif karena daerah hasil f sama dengan kodomain dari f (himpunan B).

Definisi 1.4 Suatu pemetaan $f; A \rightarrow B$ sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan " f adalah fungsi yang bijektif". (Amir & Prasajo, 2016)

Diketahui pada Gambar 3 (b) merupakan fungsi injektif karena pada setiap domain yang berbeda memiliki pasangan yang berbeda. Gambar 3(b) juga merupakan fungsi surjektif karena daerah hasil f sama dengan kodomain dari f . Sehingga ketika fungsi injektif dan surjektif terpenuhi maka Gambar 3(b) merupakan fungsi bijektif.

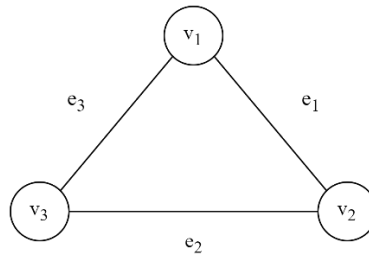
1.6.2. Konsep Dasar Graf

Pada bagian ini akan disajikan definisi graf dan berbagai istilah yang digunakan dalam graf.

Definisi 1.5 Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), (E(G)))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang elemen-elemennya disebut titik (vertex) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ disebut sisi (edge). Definisi ini menegaskan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Graf yang hanya terdiri dari titik tanpa sisi disebut graf trivial. (Hasmawati, 2020)

Titik pada suatu graf dapat diberi simbol berupa huruf ataupun angka, seperti $a, b, c, \dots$, atau bilangan asli $1, 2, 3, \dots$, ataupun gabungan huruf dan bilangan asli. Sisi pada graf dapat dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dituliskan dalam notasi uv

yaitu sisi yang menghubungkan titik u dan v . Dimana, jika e adalah sisi yang menghubungkan u dan v maka e dapat ditulis sebagai $e = uv$.



Gambar 4. Graf G .

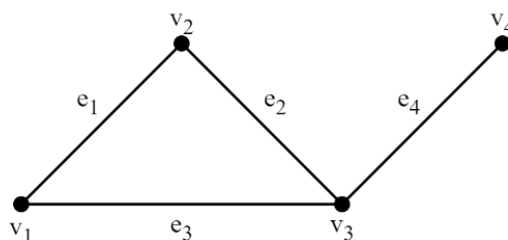
Berdasarkan Gambar 4, himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Maka pasangan himpunan $G = \{V(G), E(G)\}$ adalah graf karena $V(G)$ merupakan himpunan diskrit berhingga dan anggota $E(G)$ adalah elemen dari $V(G)$.

Definisi 1.6 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ himpunan sisi $E(G) = \{e_i : e_i = v_i v_j \text{ untuk suatu } ij\}$. Jalan Wl_k pada graf G dengan panjang k adalah barisan titik dan sisi. (Hasmawati.2020)

$$v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k \text{ dengan } e_i = v_i v_{i+1}, i = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Panjang suatu jalan adalah banyak sisi pada jalan tersebut. Ketika titik awal (v_0) dalam suatu jalan sama dengan titik akhirnya (v_n), maka disebut jalan tertutup. Jalan tertutup yang setiap titiknya berebeda di sebut siklus (*cycle*).

Definisi 1.7 Misal $G = (V, E)$ suatu graf. Maka $|V|$ disebut orde dari G dan $|E|$ disebut ukuran dari G . (Hasmawati, 2020)

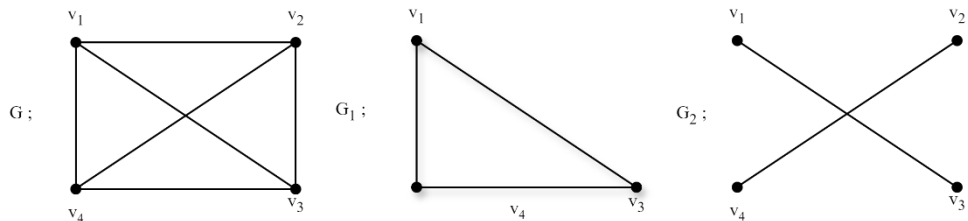


Gambar 5. Graf G .

Pada Gambar 5, graf G merupakan graf berorde empat dan memiliki ukuran empat.

Definisi 1.8 Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan $v \in V$. Derajat titik v adalah banyaknya sisi-sisi dari graf G yang terkait dengan v . Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $\deg(v)$. (Chatrand dkk, 1996)

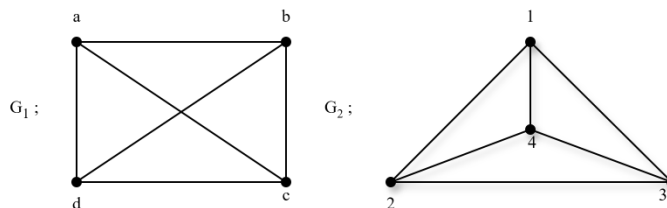
Definisi 1.9 Misalkan dua buah graf $H = (V(H), E(H))$ dan $G = (V(G), E(G))$. Graf H disebut subgraf dari G , jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. (Hasmawati, 2020)



Gambar 6. Subgraf.

Pada Gambar 6, dapat dilihat bahwa graf G_1 dan G_2 merupakan subgraf dari graf G dikarenakan $V(G_1) \subseteq V(G)$ dan $E(G_1) \subseteq E(G)$, juga $V(G_2) \subseteq V(G)$ dan $E(G_2) \subseteq E(G)$.

Definisi 1.10 Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan Isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan titik u dan v di G_1 , maka sisi e' juga harus bersisian dengan simpul u' dan v' di G_2 . (Maya, 2021)



Gambar 7. Graf Isomorfik.

Definisi 1.11 Suatu selimut dari G adalah suatu keluarga dari subgraf H yaitu $\{H_1, H_2, H_3, \dots, H_i\}$ sehingga setiap sisi $E(G)$ termuat pada salah satu subgraf $H_i, 1 \leq i \leq k$. Jika setiap H_i isomorfik dengan suatu graf H , maka H dikatakan suatu selimut- H dari G . Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut- H . (A.A.G Ngurah, 2010)

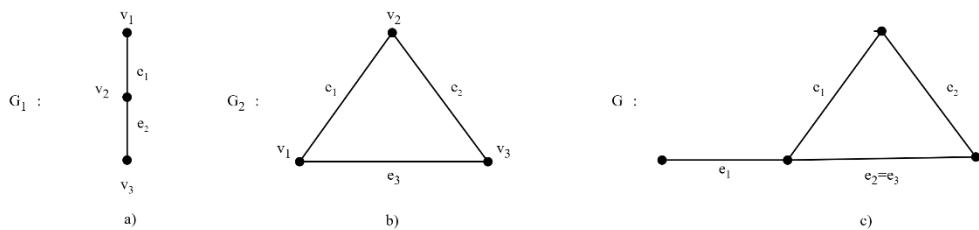
Definisi 1.12 Suatu selimut dari (C_n, C_3) adalah suatu keluarga dari subgraf C_3 yaitu $\{C_3^1, C_3^2, C_3^3, \dots, C_3^n\}$ sehingga setiap sisi $E(G)$ termuat pada salah satu subgraf $C_3^i, 1 \leq$

$i \leq n$. C_3 jika setiap C_3^i isomorfik dengan suatu graf C_3 , maka C_3 dikatakan suatu selimut $-C_3$ dari (C_n, C_3) .

1.6.3. Operasi dalam Graf.

Pada teori graf, terdapat beberapa operasi antara lain operasi jumlah, operasi kali, operasi amalgamasi, operasi korona, operasi comb, dan operasi subdivisi. Namun, pada skripsi ini terdapat satu operasi yang di gunakan yaitu operasi penggabungan yang terkhusus pada proses operasi amalgamasi sisi.

Definisi 1.13 Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf terhubung. Amalgamasi sisi dari graf G_1 dan G_2 dengan menggabungkan sisi $e \in E(G_1)$ dan sisi $f \in E(G_2)$, dinotasikan dengan $amal_s(G_1, G_2, e, f)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi e dari graf G_1 dan sisi f dari graf (G_2) menjadi satu sisi g , dimana g adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(G_1, G_2, e, f)$. (Hartiansyah & Darmaji, 2023) .



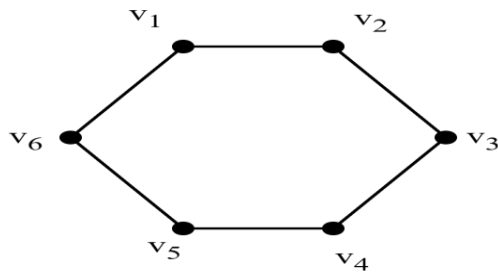
Gambar 8. a). Graf P_3 , b). Graf C_3 , dan c). Graf $Amal_s(P_3, C_3, e_2, e_3)$.

Berdasarkan Gambar 7, diketahui terdapat graf terhubung yaitu graf P_3 dan C_3 , yang dimana Amalgamasi sisi dari graf tersebut yaitu dengan menggabungkan sisi $e_2 \in E(P_3)$ dan sisi $e_3 \in E(C_3)$ yang menghasilkan graf hasil $amal_s(P_3, C_3, e_2, e_3)$.

1.6.4. Jenis-Jenis Graf

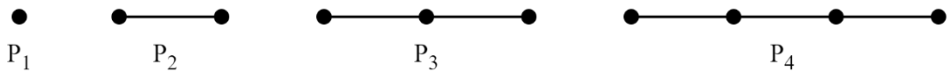
Pada kajian teori graf terdapat berbagai macam jenis graf khusus, diantaranya adalah graf lengkap, graf cycle, graf lintasan, graf bunga matahari dan graf lainnya. Pada studi kasus dalam penulisan ini graf yang akan dibahas adalah graf cycle, graf lintasan, dan graf bunga matahari.

Definisi 1.14 Graf cycle C_n , dengan Panjang n adalah graf dengan n titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$. (Ringel & Hartsfield, 1994)



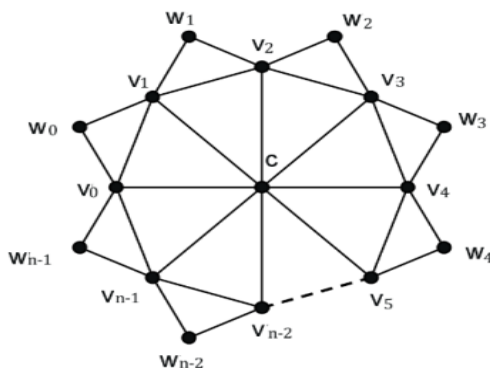
Gambar 9. Graf Siklus.

Definisi 1.15 *Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan n vertex dilambangkan oleh P_n . (Damayanti,2011)*



Gambar 10. Graf Lintasan.

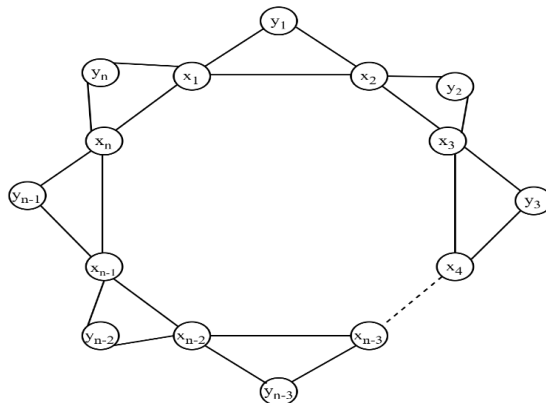
Definisi 1.16 *Misalkan W_n adalah graf roda dengan titik pusat c . Siklus pada W_n berorde n dengan label : $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Graf bunga matahari dapat diperoleh dengan menambahkan n titik sebut : $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ kemudian w_i dikaitkan deengan sisi ke v_i , dan v_{i+1} untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. (Hasmawati,2020)*



Gambar 11. Graf Bunga Matahari.

Definisi 1.17 *Misalkan C_n merupakan graf cycle dengan sikus C_n berorde n dengan titik : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan sisi : $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_1$. Graf Surya dapat diperoleh dengan*

menambahkan n titik yaitu $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ kemudian y_i dikaitkan dengan titik ujung sisi ke x_i , dan x_{i+1} untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Graf surya dinotasikan dengan (C_n, C_3) .



Gambar 12. Graf Surya.

1.6.5. Pelabelan Selimut $(a, d) - H - \text{Antiajaib}$.

Salah satu topik dalam teori graf yaitu pelabelan graf. Khususnya pelabelan selimut $(a, d) - H - \text{antiajaib}$ yang digunakan pada skripsi ini. Pada sub bab ini, akan dibahas definisi dan contoh sederhana dari pelabelan selimut anti ajaib.

Definisi 1.18 Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf sederhana yang memuat selimut- H dengan $|V(G)| = v_G, |E(G)| = e_G, |V(H)| = v_H, |E(H)| = e_H$ dan $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v_G + e_G\}$. Jika f merupakan fungsi bijeksi sedemikian sehingga untuk setiap subgraf H' dari G isomorfik dengan H , dan bobot dari semua subgraf membentuk suatu barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d\}$, maka G memiliki pelabelan selimut $(a, d) - H - \text{antiajaib}$ dengan a dan d adalah bilangan bulat positif dan t adalah banyak subgraf dari G .

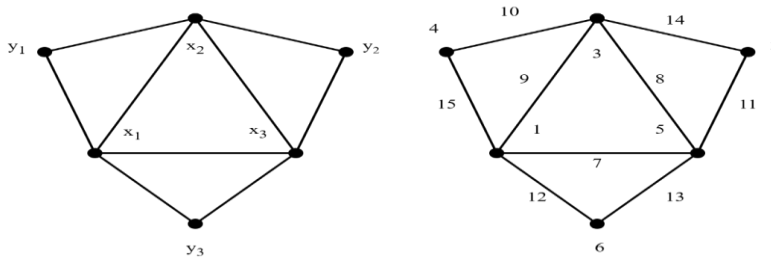
$g(H') = \text{bobot dari } H'$

$$g(H') = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$$

Dalam kasus pelabelan selmut C_3 $g(H')$ di notasikan dengan $g(C_3^i)$. (Inayah dkk, 2009)

Contoh

Berikut contoh pelabelan yang memenuhi $(a, d) - C_3 - \text{Antiajaib}$ pada graf Surya (C_3, C_3) .



Gambar 13. Pelabelan selimut C_3 anti ajaib pada graf Surya (C_3, C_3) .

Perhatikan pada Gambar 13 graf Surya (C_3, C_3) , memiliki selimut C_3 yaitu

$$C_3^1 = x_1, x_1y_1, y_1, y_1x_2, x_2, x_2x_1$$

$$C_3^2 = x_2, x_2y_2, y_2, y_2x_3, x_3, x_3x_2$$

$$C_3^3 = x_3, x_3y_3, y_3, y_3x_1, x_1, x_1x_3$$

Pada Gambar 13, graf surya (C_3, C_3) dengan himpunan titiknya adalah $V(G) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ dan himpunan sisinya adalah $E(G) = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, y_1x_2, y_2x_3, y_3x_1, x_2x_1, x_3x_2, x_1x_3)$.

Berdasarkan fungsi pelabelan pada graf Surya (C_3, C_3) seperti pada Gambar 13 diperoleh bahwa fungsi pelabelan tersebut bijeksi dan bobot setiap C_3 dan (C_3, C_3) adalah

$$\begin{aligned} g(C_3^1) &= f(x_1) + f(x_1y_1) + f(y_1) + f(y_1x_2) + f(x_2) + f(x_2x_1) \\ &= 1 + 15 + 4 + 10 + 3 + 9 = 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(C_3^2) &= f(x_2) + f(x_2y_2) + f(y_2) + f(y_2x_3) + f(x_3) + f(x_3x_2) \\ &= 3 + 14 + 2 + 11 + 5 + 8 = 43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(C_3^3) &= f(x_3) + f(x_3y_3) + f(y_3) + f(y_3x_1) + f(x_1) + f(x_1x_3) \\ &= 5 + 13 + 6 + 12 + 1 + 7 = 44 \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa bobot selimut C_3 membentuk barisan aritmatika dengan $a = 42$ dan $d = 1$.

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

2.1. Waktu dan Tempat.

Penelitian ini dilakukan sejak September 2024, penelitian ini menggunakan sumber literatur yang tersedia secara langsung di perpustakaan resmi, serta beberapa yang tersedia di internet.

2.2. Jenis Penelitian.

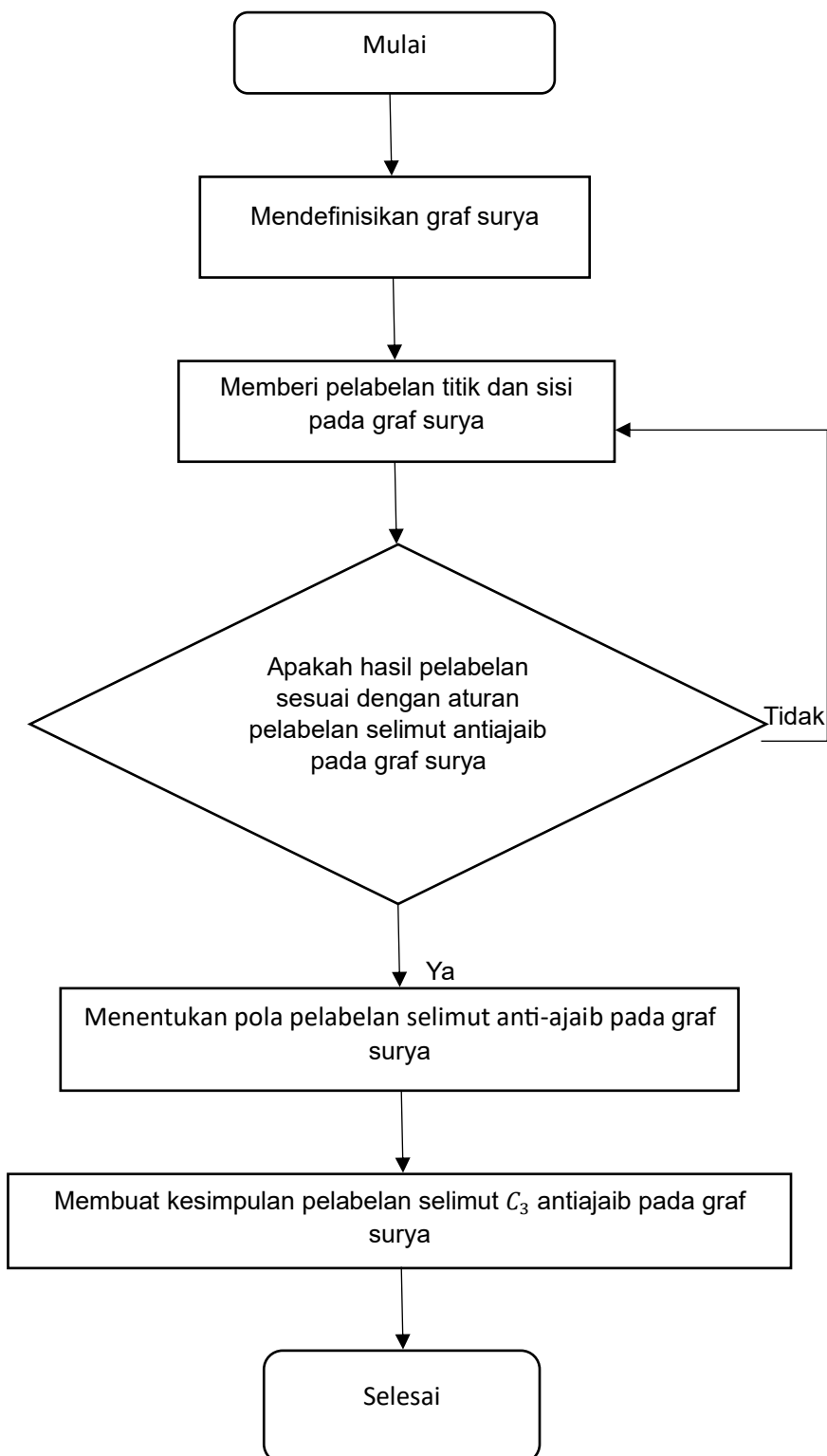
Metode penelitian yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah metode penelitian pustaka (*Library Research*) yaitu dengan mengumpulkan bahan penelitian melalui buku, jurnal media online, ataupun hasil penelitian orang lain yang berhubungan dengan tugas akhir ini.

2.3. Tahapan Penelitian.

Tahapan pada penelitian ini antara lain :

1. Mendefinisikan graf surya .
2. Memberi pelabelan titik dan sisi pada graf surya.
3. Jika hasil pelabelan sesuai dengan aturan pelabelan selimut antiajaib pada graf surya maka penelitian dilanjutkan ke tahap selanjutnya. Apabila hasil pelabelan dilakukan tidak sesuai dengan aturan pelabelan selimut antiajaib pada graf surya maka tahapan kembali ke tahap kedua.
4. Menentukan pola pelabelan selimut antiajaib pada graf surya.
5. Membentuk kesimpulan pelabelan selimut C_3 antiajaib pada graf surya.

Berikut tahapan tahapan penelitian yang dibuat dalam bentuk diagram alir.



Gambar 14. Diagram Alir.

