BILANGAN DOMINASI JARAK TIGA PADA GRAF HASIL KORONA ANTARA GRAF LINTASAN DENGAN SEBARANG GRAF DAN KAITANNYA DENGAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

RESKI NASIATI

H011191024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGTAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2023

BILANGAN DOMINASI JARAK TIGA PADA GRAF LINTASAN KORONA SEBARANG GRAF DAN KAITANNYA DENGAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

RESKI NASIATI

H011191024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Reski Nasiati
NIM	: H011191024
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Bilangan Dominasi Jarak Tiga pada Graf Lintasan Korona Sebarang Graf dan Kaitannya dengan Graf Lintasan

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 30 Mei 2023

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL
5D3AKX436488218

Reski Nasiati
NIM. H011191024

LEMBAR PENGESAHAN

BILANGAN DOMINASI JARAK TIGA PADA GRAF LINTASAN KORONA SEBARANG GRAF DAN KAITANNYA DENGAN GRAF LINTASAN

Disusun dan diajukan oleh

RESKI NASIATI
H011191024

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 30 Mei 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.
NIP. 19641231 199003 2 007

Pembimbing Pertama,

Jusmawati Massalesse
NIP. 19680601 199512 2 001

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul **"Bilangan Dominasi Jarak Tiga pada Graf Lintasan Korona Sebarang Graf dan Kaitannya dengan Graf Lintasan"** sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasehat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, izinkan penulis mengucapkan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada kedua orang tua penulis, Ayah **Hasrul** dan Ibu **Dzi Marfu'atin** yang telah dengan sabar membesarkan dan mendidik penulis, serta memberikan dukungan do'a dan materi, sehingga penulis bisa mencapai di titik ini. Mampu menyelesaikan pendidikan di perguruan tinggi dan mendapat gelar yang insyaAllah dapat dimanfaatkan penulis di kemudian hari. Terima kasih kepada kedua adik penulis **Abdun Muhtadi** dan **Muh. Munsir Hadi**, serta seluruh keluarga yang telah memberi doa dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin sekaligus Penguji serta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama

menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta para **Staf Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.

3. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si** selaku Pembimbing Utama dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S,Si., M.Si** selaku Pembimbing Pertama yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan banyak waktu di tengah kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc** selaku Penguji sekaligus Pembimbing Akademik seama penulis menempuh pendidik S1. Penulis ucapkan terima kasih telah banyak memberi nasihat, saran dan masukan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini serta waktu yang telah diberikan dalam membimbing penulis dalam segala hal terkait penyelesaian studi S1 penulis.
5. Keluarga besar **Halija** dan **Djamaluddin Saleh** yang telah menerima penulis untuk tinggal bersama dan selalu memberikan bantuan, dukungan serta masukan kepada penulis.
6. Keluarga besar **Eppe** dan **Imam Mawardi** yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan perkuliahan penulis.
7. Kakak **Ica** dan **Wulan** yang telah membersamai penulis dalam perantauan serta memberikan masukan dalam ranah dunia perkuliahan.
8. Keluarga besar **SMA Negeri 2 Luwu Utara** yang menjadi tempat penulis memulai masa pembentukan jati diri dan mengenal banyak hal, serta terkhusus kepada Sahabat **KOMPAS** yang selalu mempercayai penulis dan memberikan dukungan kepada penulis.
9. Sahabat **POL19ON** terkasih yang telah mengisi hari-hari penulis selama menempuh pendidikan di jenjang perkuliahan, membantu, dan memberikan pengalaman berharga yang tak terhingga nilainya.
10. Teman-teman **Matematika 2019** yang telah memberi warna-warni masa perkuliahan, khususnya **Muh. Rozzaq Hamidi** yang telah banyak membantu dan memberikan masukan kepada penulis dalam penyelesaian studi penulis.

11. Sahabat **B3/1, Nisa, Dilong, Sakinah, Mumu,** dan **Azizah** yang telah menemani penulis dalam keadaan apapun dan selalu memberikan dukungan, serta selalu ada ketika penulis membutuhkan bantuan.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibdah dan mendapat balasan dari Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 30 Mei 2023

Reski Nasiati

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Reski Nasiati

NIM : H011191024

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Bilangan Dominasi Jarak Tiga pada Graf Lintasan Korona Sebarang Graf dan Kaitannya dengan Graf Lintasan

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 30 Mei 2023

Yang menyatakan,

Reski Nasiati

ABSTRAK

Graf G adalah pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi (*edge*). Himpunan dominasi jarak tiga adalah himpunan bagian S dari himpunan titik graf G dengan setiap titik di $V(G)\backslash S$ terhubung dan berada dalam jarak maksimal tiga dari paling sedikit satu titik anggota S. Bilangan dominasi jarak tiga dari graf G dinotasikan dengan $\gamma_3(G)$ yakni kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak tiga. Pada skripsi ini akan ditentukan bilangan dominasi jarak tiga pada graf lintasan korona sebarang graf dan kaitannya dengan graf lintasan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $\gamma_3(P_n \odot C_m) = k$, dengan $5k - 4 \leq n \leq 5k$ atau $\gamma_3(P_n \odot H_m) = \left\lfloor \frac{n+4}{5} \right\rfloor$ atau $\gamma_3(P_n \odot H_m) = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ dan $\gamma_3(P_n \odot H_m) = \gamma_2(P_n)$.

Kata Kunci : *teori graf, himpunan dominasi, graf hasil korona, graf lintasan, jarak.*

Judul	: Bilangan Dominasi Jarak Tiga pada Graf Lintasan Korona Sebarang Graf dan Kaitanya dengan Graf Lintasan
Nama	: Reski Nasiati
NIM	: H011191024
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

The graph G is a pair of sets $(V(G), E(G))$ where $V(G)$ is a finite set whose elements are called vertices, and $E(G)$ is the set of pairs of elements of $V(G)$ which is called edge. A three-distance dominating set is a subset S of the vertex set of a graph G with every vertex in $V(G)\setminus S$ connected and within a maximum distance of three from at least one vertex element S. The three-distance dominating number of a graph G is denoted by $\gamma_3(G)$ which is the minimum cardinality of the three-distance dominating sets. In this thesis, we will determine the three-distance dominance number on the corona path graph of any graph and its relation to the path graph. The results show that $\gamma_3(P_n \odot H_m) = k$, with $5k - 4 \leq n \leq 5k$ and $\gamma_3(P_n \odot H_m) = \gamma_2(P_n)$.

Keywords: *graph theory, dominance set, corona result graph, path graph, distance.*

Title : The three-distance dominating number of the corona path graph of any graph and its relation to the path graph.

Name : Reski Nasiati

Student ID : H011191024

Study Program : Mathematics

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Graf secara umum didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik *(vertex)* dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan dari anggota-anggota $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi *(edge)*.

Salah satu kajian dalam teori graf adalah himpunan dominasi. Konsep himpunan dominasi dimulai sejak sekitar tahun 1850 ketika penggemar catur Eropa mempelajari masalah tentang dominasi ratu. Dalam masalah ini bilangan dominasi digunakan untuk menentukan berapa banyaknya ratu yang ditempatkan pada papan catur berukuran 8×8 sedemikian sehingga setiap persegi dapat didominasi oleh ratu untuk menyerang dengan satu langkah. Dalam teori graf, jumlah minimun ratu tersebut dinamakan bilangan dominasi dari sebuah himpunan dominasi dengan ratu direpresentasikan sebagai titik dan jalur perpindahan antara kotak pada papan catur sebagai sisi. Sejak saat itu, himpunan dominasi digunakan untuk banyak aplikasi yang berbeda, diantaranya untuk memodelkan keterkaitan pada jaringan komunikasi komputer, teori jejaring sosial, dan masalah serupa lainnya.

Penelitian terkait himpunan dominasi berkembang cukup pesat. Pada tahun 1962 dengan mempublikasikan bukunya, Ore memperkenalkan definisi himpunan dominasi sebagai sebuah himpuan bagian D dari $V(G)$ untuk suatu graf G, dengan setiap titik di luar D merupakan ujung beberapa sisi dari sebuah titik di D. Banyak definisi lain bermunculan sejak saat itu dari beberapa ahli seperti Chartand dan Lesniak (1996), Haynes dkk (1998) dan lainnya. Dari definisi-definisi yang ada tersebut melahirkan definisi yang paling umum digunakan dari himpunan dominasi, yakni misalkan $G = (V, E)$ merupakan suatu graf. Himpunan bagian S dari V merupakan himpunan dominasi dari G jika untuk setiap titik di $V \backslash S$ bertetangga dengan minimal satu titik di S. Kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi disebut sebagai bilangan dominasi. Bilangan dominasi dinotasikan sebagai $\gamma(G)$.

Penelitian terkait bilangan dominasi dari beberapa graf tertentu telah banyak dikaji sebelumnya oleh banyak peneliti, misalnya Bilangan Dominasi dari graf-graf khusus dan hasil operasinya oleh Dwi Agustin R. W., dkk (2014) diperoleh beberapa hasil diantaranya bilangan dominasi pada graf lintasan (P_n), graf siklus (C_n), graf lengkap (K_n), penjumlahan graf $K_3 + C_n$ dan $K_3 + P_n$, perkalian graf $C_n \times P_n$, korona $C_n \odot K_n$, dan shackle graf $K_{n,n}$. Pada tahun 2015 Reni Umilasari melakukan penelitian terkait bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi korona dan comb untuk graf lintasan (P_m), graf lingkaran (C_n), dan graf bintang (S_m). Selanjutnya pada tahun 2016 Wicha Dwi Vikade meneliti bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona, amalgamasi, *shackle,* dan join untuk sebarang graf diperoleh hasil bahwa $\gamma_2(G \odot H) = \gamma_1(G)$. Kemudian pada tahun 2017 telah dilakukan penelitian mengenai bilangan dominasi jarak-2 graf jahangir $(J_{n,m})$ oleh Yayuk Wahyuni, dkk.

Dari hasil penulusuran literatur yang telah dilakukan penulis, penelitian terkait bilangan dominasi jarak tiga untuk graf hasil korona graf lintasan dengan sebarang graf belum ada dan dari hasil-hasil penelitian oleh peneliti terdahulu ditemukan bahwa bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua untuk graf hasil korona antara graf G dengan graf H keduanya berkaitan dengan graf G. Oleh sebab itu, penulis bermaksud untuk melakukan penelitian dan mengkaji bilangan dominasi jarak tiga pada graf hasil korona antara graf lintasan dengan sebarang graf H dan menganalisa bagaimana kaitannya dengan graf lintasan.

I.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana mengonstruksi himpunan dominasi jarak tiga pada graf hasil korona antara graf lintasan dengan graf H.
2. Bagaimana menentukan bilangan dominasi jarak tiga pada graf hasil korona antara graf lintasan dengan graf H.
3. Bagaimana kaitan antara bilangan dominasi jarak tiga pada korona graf lintasan dan graf H dengan graf lintasan.

I.3 Batasan Masalah

Masalah pada penelitian terkait bilangan dominasi jarak tiga yang akan dilakukan penulis dibatasi pada graf hasil korona antara graf lintasan berorde n untuk $n \geq 2$ dengan graf H yang terhubung antara lain adalah graf siklus dan graf lengkap.

I.4. Tujuan Penelitian

1. Menentukan bilangan dominasi jarak tiga pada graf hasil korona antara graf lintasan dengan graf H.
2. Menganalisa kaitan antara bilangan dominasi jarak tiga pada korona graf lintasan dan graf H dengan graf lintasan.

I.5. Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan penulis dan pembaca terkait penentuan bilangan dominasi jarak tiga khususnya pada graf korona antara graf lintasan dengan graf terhubung. Selain itu, hasil penelitian ini juga diharapkan dapat menambah hasil penelitian terkait bilangan dominasi yang telah ditemukan peneliti terdahulu sehingga dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian yang terkait bilangan dominasi jarak tiga khususnya pada graf korona antara graf lintasan dengan graf terhubung.

I.6. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari lima bab. Masing-masing bab akan dibagi ke dalam beberapa subbab. Adapun rincian sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang pemaparan konsep dasar materi-materi dalam teori graf mencakup definisi, istilah, teorema dan contoh yang berkaitan dengan topik akan diteliti.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi tentang metode penelitian, waktu dan tempat penelitian, serta rancangan penelitian.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan disajikan pembahasan dari hasil yang telah diperoleh yakni bilangan dominasi dari graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf roda.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini akan disajikan kesimpulan dari hasil penelitian yang telah diperoleh dan saran untuk peneliti selanjutnya dalam mengembangkan penelitian yang berkaitan dengan topik dalam tugas akhir ini

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai konsep dasar graf mencakup jenis-jenis graf dan operasinya serta definisi dan istilah-istilah yang biasa digunakan dalam menentukan bilangan dominasi suatu graf. Pada bab ini juga disajikan hasil-hasil dari penelitian terdahulu yang berkaitan dengan bilangan dominasi.

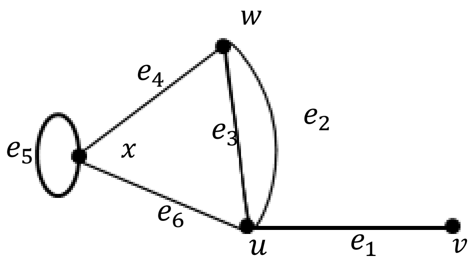
II.1. Terminologi Dasar Graf

Terminologi dasar graf pada Subbab II.1 ini membahas tentang definisi, notasi, dan istilah dalam teori graf yang digunakan pada penulisan ini. Seperti definisi graf secara umum, notasi titik dan sisi yang digunakan dalam penulisan, dan beberapa istilah seperti orde, kardinalitas, bertetangga, dan jarak yang banyak disebutkan dalam penulisan.

Definisi 2.1.1 Graf G didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik *(vertex)* dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan dari anggota-anggota $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi *(edge)*.

Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a, b, c, d, \dots, v, w, \dots$, dengan bilangan asli $1,2,3, \dots$, atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v dinyatakan dengan pasangan (uv) atau dilambangkan dengan $e_1, e_2, \dots$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v, maka e dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$ atau uv yang menyatakan sisi yang menghubungkan titik u dan titik v. (Rinaldi Munir,2010).

Contoh 2.1.1 Misalkan graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $(u, v) = e_1, (u, w) = e_2, (w, u) = e_3, (w, x) = e_4, (x, x) = e_5, (x, u) = e_6$ maka himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Graf G digambarkan sebagai berikut.



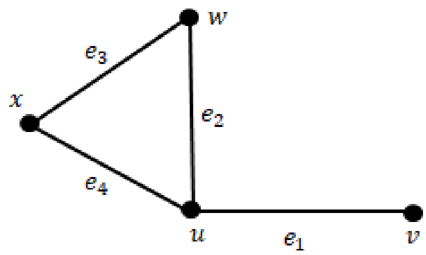
Gambar 2.1.1 Graf G

Pasangan $(u, v) = e_1 \in E(G)$ adalah suatu sisi pada graf G yang bisa saja $u = v$, $(u, v) = (v, u)$, atau $(u, v) \neq (v, u)$ sehingga sangat mungkin anggota dari $E(G)$ terdiri atas beberapa anggota yang simbolnya sama, misalnya $e_1 = (u, v), e_2 = (u, v)$, dan seterusnya, namun $e_1 \neq e_2$. Sisi e_1 dan e_2 yang demikian disebut sisi-sisi paralel. Himpunan $V(G)$ atau $E(G)$ bisa tak berhingga dan sisi e_1 disebut **lup** jika $u = v$. Jika himpunan $V(G)$ atau himpunan $E(G)$ merupakan himpunan tak berhingga, maka graf G disebut **graf tak berhingga.** Jika sisi-sisi $uv \neq vu$ dan masing-masing diberi arah berbentuk tanda panah, maka graf G disebut **graf berarah (*digraph*). Orde** *(order)* dari graf G dinyatakan dengan simbol p yakni banyaknya anggota dari $V(G)$ atau banyaknya titik pada G. **Ukuran** *(size)* dari G dinyatakan dengan simbol q yakni banyaknya anggota dari $E(G)$ atau banyaknya sisi pada G. **Kardinalitas** suatu himpunan adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut, biasanya dinyatakan dengan simbol "| |". Jadi apabila $p(G)$ adalah orde pada graf G dan $q(G)$ adalah ukuran dari graf G, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$.

Definisi 2.1.2 Graf sederhana G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, di mana $V(G)$ adalah himpunan berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (*vertex)*, dan $V(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak berurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi *(edge).*

Dengan kata lain, graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki lup dan sisi ganda/paralel.

Contoh 2.1.2 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x\}$. Misalkan $(u, v) = e_1, (u, w) = e_2, (w, x) = e_3, (u, x) = e_4$ maka himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Graf G digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.1.2 Graf G

Karena graf G tidak memiliki lup maupun sisi ganda maka graf G merupakan graf sederhana.

Definisi 2.1.3 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $e \in E(G)$. Jika $e = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa :

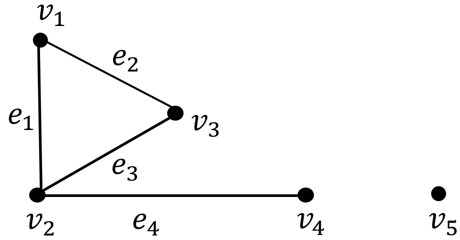
1. Titik v_i **bertetangga** dengan titik v_j.
2. Sisi e **terkait** dengan titik v_i, demikian pula untuk titik v_j.

   Sisi yang terkait dengan titik yang berderajat satu disebut dengan sisi pendant.

Definisi 2.1.4 Graf G dikatakan **graf terhubung** *(connected)* jika untuk setiap dua titik u dan v selalu terdapat lintasan atau sisi yang memuat atau menghubungkan titik u dan titik v.

Berdasarkan Definisi 2.1.4 maka Gambar 2.1.2 merupakan graf terhubung.

Contoh 2.1.4 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, misalkan $(v_1 v_2) = e_1, (v_1 v_3) = e_2, (v_2 v_3) = e_3, (v_2 v_4) = e_4$ maka himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Graf G digambarkan sebagai berikut.

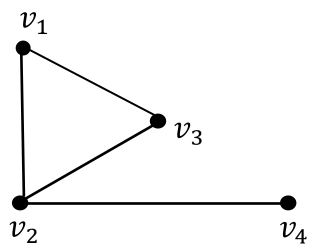


Gambar 2.1.4 Graf G tidak terhubung

Karena terdapat dua titik yaitu v_4 dan v_5 yang tidak dimuat atau dihubungkan oleh suatu lintasan atau sisi, maka graf G bukan merupakan graf terhubung.

Definisi 2.1.5 Jarak dari titik u ke titik v dalam graf G dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah jumlah sisi atau panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Jika G tidak memiliki lintasan dari u ke v, maka didefinisikan $d(u, v) = \infty$ (Alfarisi, 2017).

Contoh 2.1.5 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) =$ dan himpunan sisi $E(G) =$ dengan ilustrasi seperti pada Gambar 2.1.5 berikut.

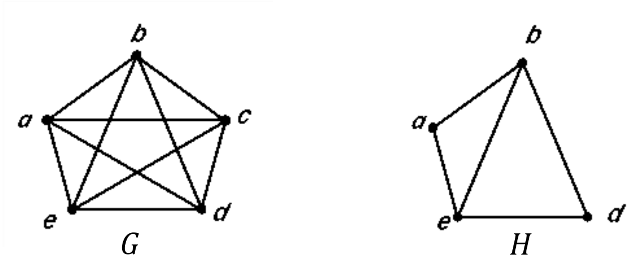


Gambar 2.1.5 Graf G

diperoleh lintasan yang menghubungkan titik v_1 dengan titik v_4 adalah $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_4, v_4$ dengan jumlah sisi atau panjang lintasannya adalah dua dan $v_1, v_1v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_4, v_4$ dengan panjang lintasan tiga. Berdasarkan Definisi 2.1.5, maka jarak dari titik v_1 ke titik v_4 adalah $d(v_1, v_4) = 2$.

Definisi 2.1.6 Suatu graf H disebut subgraf dari graf G jika $V(H) \neq \emptyset$, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

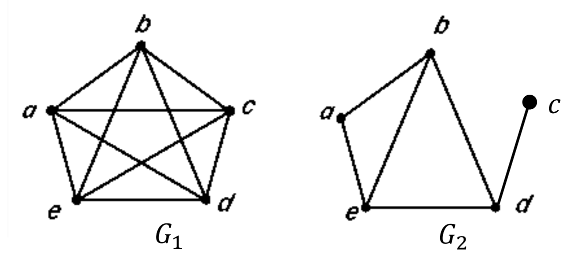
Contoh 2.1.6 Misalkan $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{ab, ac, ad, ae, ba, bc, bd,$
$be, ca, cb, cd, ce, da, db, dc, de, ea, eb, ec, ed\}$. Kemudian diberikan graf H dengan $V(H) = \{a, b, d, e\}$ dan $E(H) = \{ab, ae, ba, bd, be, db, de, ea, eb, ed\}$. Karena $(H) \neq \emptyset$, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, maka graf H merupakan subgraf dari graf G



Gambar 2.1.5 Graf H subgraf dari graf G

Jika $V(H) = V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, maka H dikatakan sebagai subgraf perentang dari G.

Karena $V(G_2) = V(G_1)$ dan $E(G_2) \subseteq E(G_1)$ pada Gambar 2.1.6 berikut, maka dapat dikatakan bahwa G_2 merupakan subgraf perentang dari G_1.



Gambar 2.1.6 Graf G_2 subgraf perentang dari G_1

II.2. Jenis - Jenis Graf

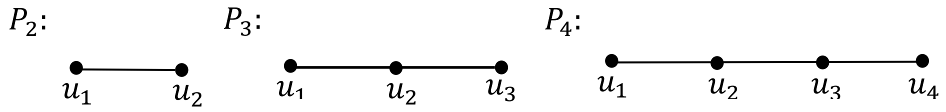
Jenis-jenis graf yang dibahas pada Subbab II.2. ini adalah jenis-jenis graf yang terkait dengan materi penelitian skripsi ini antara lain adalah graf lintasan, graf siklus, graf roda, graf lengkap, graf matahari, graf bintang, dan graf jahangir.

Definisi 2.2.1 Graf Lintasan *(Path Graph)*. Graf lintasan dengan n titik (P_n) adalah graf dengan himpunan titik $V(P_n) = \{v_i\,; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{v_i\, v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dengan derajat kedua titik ujung hanya satu dan titik lainnya berderajat dua berada pada satu lintasan *(Diestel*,2005*)*.

Derajat suatu titik pada graf adalah jumlah sisi yang terhubung dengan titik tersebut.

Contoh 2.2.1 Misalkan diberikan $V(P_2) = \{u_1, u_2\}$ dengan $E(P_2) = \{u_1u_2\}$. Kemudian $V(P_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dengan $E(P_3) = \{u_1u_2, u_2u_3\}$ dan $V(P_4) =$

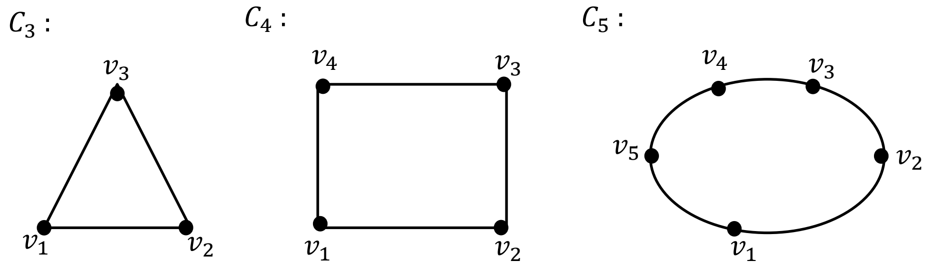
$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dengan $E(P_4) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\}$, maka P_2, P_3, dan P_4 digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2.1 Graf lintasan P_2, P_3, dan P_4

Definisi 2.2.2 Graf Siklus *(Cycle Graph)*. Misalkan P_n adalah graf lintasan berorde n dengan panjang $n-1$, maka graf siklus C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup (v_n v_1)$.

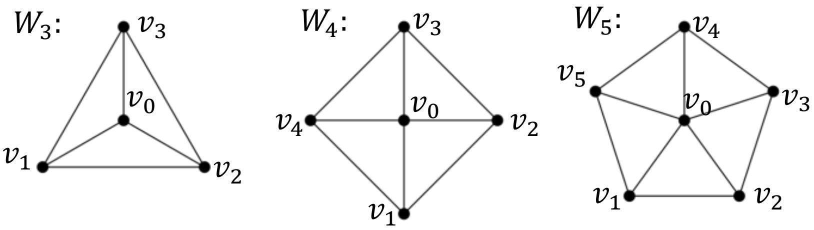
Contoh 2.2.2 Misalkan diberikan graf dengan himpunan titik $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\} = V(P_3)$ maka himpunan sisi $E(C_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$. Kemudian graf dengan himpunan titik $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dengan himpunan sisi $E(C_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$. Dan graf dengan himpunan titik $V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dengan himpunan sisi $E(C_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$. Sehingga graf C_3, C_4, dan C_5 digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2.2 Graf siklus C_3, C_4, dan C_5

Definisi 2.2.3 Graf Roda *(Wheel Graph)* adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x, dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n+1$ dinotasikan dengan W_n.

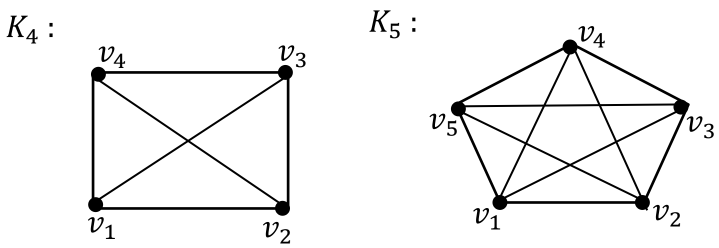
Contoh 2.2.3 Diberikan graf W_3 dengan himpunan titik $V(W_3) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(W_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3\}$. Graf W_4 dengan himpunan titik $V(W_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(W_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4\}$. Graf W_5 dengan himpunan titik $V(W_5) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(W_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_0v_5\}$. Maka graf W_3, W_4, dan W_5 digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2.3 Graf roda W_3, W_4, dan W_5

Definisi 2.2.4 Graf lengkap *(Complete Graph)* dengan n titik dinotasikan dengan K_n adalah graf sederhana yang setiap dua titiknya bertetangga atau dengan kata lain untuk setiap $u, v \in V(G)$ berlaku $(u, v) \in E(G)$.

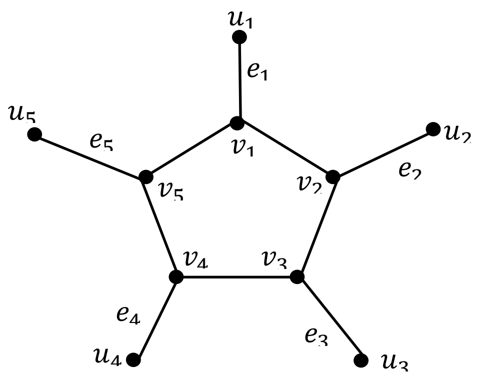
Contoh 2.2.4 Diberikan graf lengkap K_4 dengan himpunan titik $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(K_4) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Graf K_5 dengan himpunan titik $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(K_5) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$. Graf K_4 dan K_5 digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2.4 Graf lengkap K_4 dan K_5

Definisi 2.2.5 Graf matahari *(Sun Graph)* $SU_n, n \geq 3$ adalah graf berorde $2n$ yang diperoleh dengan mengaitkan n sisi pendant ke graf siklus C_n (Wallis,2000 dan Anitha dan Lekshmi,2008).

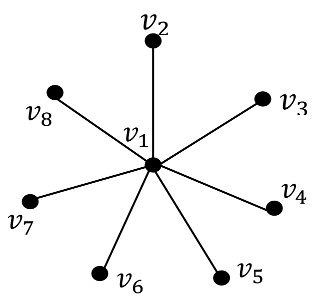
Contoh 2.2.5 Misalkan graf C_5 dengan himpunan titik $V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(C_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$. Diberikan sisi pendant yang terkait dengan titik $u_i; i = 1,2,3,4,5$ terhubung dengan masing-masing titik anggota C_5 maka graf tersebut membentuk graf matahari SU_5 yang digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2.5 Graf matahari SU_5

Definisi 2.2.6 Graf bintang *(star graph)* berorde n dinotasikan dengan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik berderajat satu.

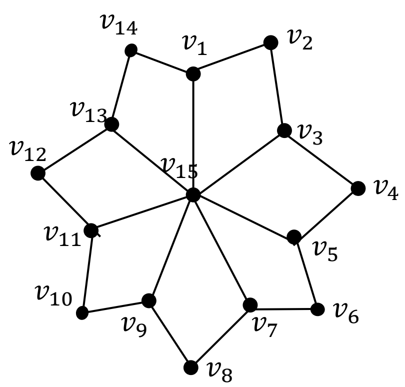
Contoh 2.2.6 Diberikan graf S_8 dengan himpunan titik $V(S_8) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan himpunan sisi $E(S_8) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8\}$. Graf S_8 digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2.6 Graf bintang S_8

Definisi 2.2.7 Graf jahangir $J_{n,m}$ untuk $m \geq 3$ adalah suatu graf dengan $nm + 1$ titik yang diperoleh melalui penambahan satu titik dan titik tersebut bertetangga dengan m titik pada siklus C_{nm} yang berjarak n dari titik yang satu ke titik yang lain.

Contoh 2.2.7 Diberikan graf jahangir $J_{2,7}$ dengan himpunan titik $V(J_{2,7}) = \{v_i; i = 1 \leq i \leq 15\}$ dan himpunan sisi $E(J_{2,7}) = \{(v_i v_{i+1}) \cup v_{14}v_1 \cup (v_{15}v_j) ; 1 \leq i \leq 13, j\ ganjil \leq 13.$



Gambar 2.2.7 Graf jahangir $J_{2,7}$

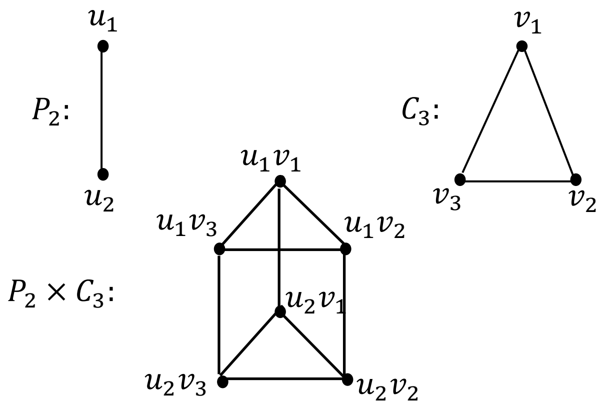
II.3. Operasi dalam Graf

Dalam teori graf dikenal beberapa jenis operasi, antara lain operasi gabung, operasi jumlah, operasi kali, operasi amalgamasi, operasi subdivisi, operasi korona, operasi comb, dan operasi shackle. Akan tetapi, operasi yang akan dibahas dalam penulisan ini hanyalah operasi kali dan operasi korona.

Definisi 2.3.1 Perkalian graf. Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Maka graf kali antara G dan H dinotasikan dengan $G \times H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \times H) = \{xy | x = u_1v_1, y = u_2v_2 ; u_1 = u_2$ dan $v_1v_2 \in E(H)$ atau v_1v_2 dan $u_1u_2 \in E(G)\}$.

Contoh 2.3.1 Diberikan graf P_2 dengan himpunan titik $V(P_2) = \{u_1, u_2\}$ dan himpunan sisi $E(P_2) = \{u_1u_2\}$. Graf C_3 dengan himpunan titik $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(C_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$. Maka diperoleh graf kali $P_2 \times C_3$ dengan himpunan titik $V(P_2 \times C_3) = \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2,$

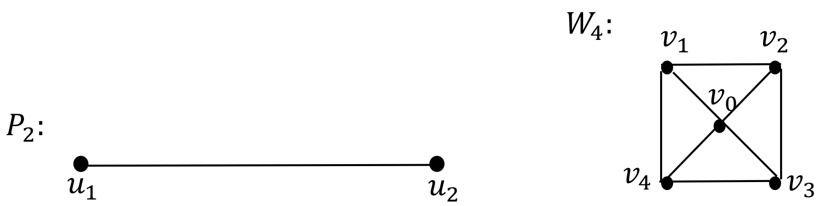
$u_2v_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_2 \times C_3) = \{xx, xy, yy | x = u_1v_j, y = u_2v_j\}$. Graf $P_2 \times C_3$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.3.1 Graf $P_2 \times C_3$

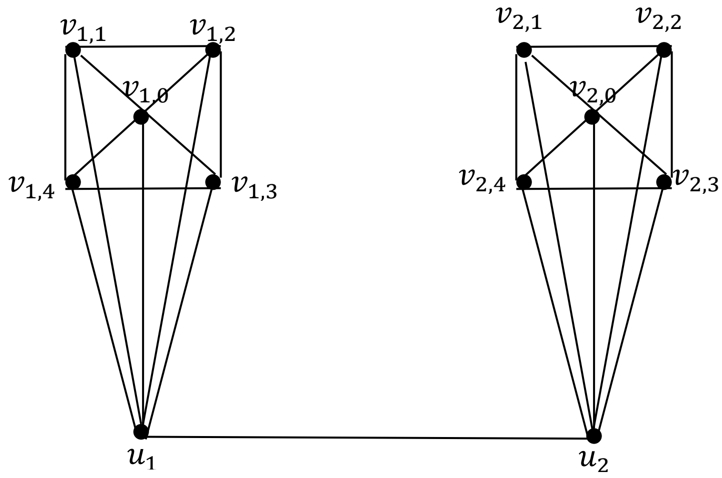
Definisi 2.3.2 Korona graf. Misalkan G adalah graf terhubung berorde n dan H adalah graf terhubung berorde m. Korona dari dua graf G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sebanyak n kali, namakan $H_1, H_2, H_3 \dots, H_n$, dan mengaitkan setiap titik v_i di G dengan setiap titik di graf $H_i, i = 1,2,3, \dots, n$.

Contoh 2.3.2 Diberikan graf P_2 dan W_4 dengan himpunan titik $V(P_2) = \{u_1, u_2\}$, $V(W_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(P_2) = \{u_1u_2\}$, $E(W_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4\}$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.3.2 Graf lintasan P_2 dan graf roda W_4

Operasi korona dari P_2 dan W_4 diperoleh dengan menggandakan graf graf W_4 sebanyak dua kali, kemudian setiap titik di P_2 dikaitkan dengan masing-masing titik di W_4 hasil penggandaan. Graf $P_2 \odot W_4$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.3.3 Graf korona $P_2 \odot W_4$

Operasi korona memiliki sifat tidak komutatif. Hal ini dikarenakan untuk $G \odot H$ berarti graf H sebagai graf kedua harus digandakan sebanyak jumlah titik di graf G, kemudian untuk titik ke-i dari G dihubungkan dengan setiap titik di H_i sesuai dengan Definisi 2.3.5.

Sifat lain yang dimiliki graf hasil operasi korona, misalkan diberikan dua buah graf G dan H, maka graf hasil operasi korona $G \odot H$, memenuhi:

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} V(H_i)$$

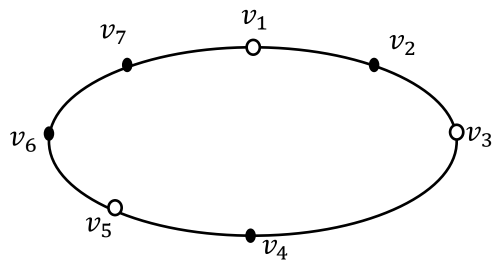
$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} E(H_i) \cup \{iu_i | u_i \in V(H_i)\}$$

dengan H_i adalah penggandaan dari graf H(Landerius Maro, 2017).

II.4. Himpunan Dominasi

Definisi 2.4.1 Himpunan dominasi jarak satu. Misalkan $G = (V, E)$ merupakan suatu graf. Himpunan bagian S dari V merupakan himpunan dominasi dari G jika untuk setiap titik di $V \backslash S$ bertetangga dengan minimal satu titik di S. Kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi disebut sebagai bilangan dominasi, dinotasikan sebagai $\gamma_1(G)$ (Rofiah dan Dafik, 2014). Dengan syarat bahwa $S \neq \emptyset$.

Contoh 2.4.1 Diberikan graf lingkaran berorde 7 (C_7) berikut dengan titik yang berwarna putih adalah anggota himpunan dominasinya.



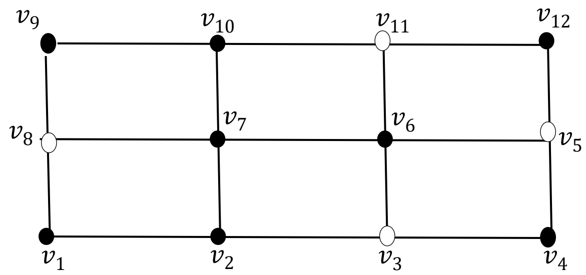
Gambar 2.4.2 Graf lingkaran berorde 7 (C_7)

Diambil himpunan $S = \{v_1, v_3, v_5\} \subseteq V(C_7) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Akan ditunjukkan bahwa S merupakan himpunan dominasi jarak satu. Untuk setiap $v_i \in V(C_7)\backslash S$ dengan $i = [1,7]$, v_i bertetangga dengan $v_1 \in S$ dengan $i = 2,7$ dan bertetangga dengan $v_5 \in S$ untuk $i = 2,6$. Hal ini berarti bahwa $\gamma_1(C_7) \leq 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_1(C_7) \geq 3$ yaitu dengan menunjukkan bahwa tidak ada himpunan bagian yang memuat dua titik merupakan himpunan dominasi dari C_7.

Misalkan $S' = \{v_1, v_3\} \subseteq V(C_7)$, maka S' bukan merupakan himpunan dominasi karena terdapat $v_6 \in V(C_7)\backslash S'$ tidak bertetangga dengan satupun anggota himpunan S'. Misalkan $S' = \{v_1, v_4\} \subseteq V(C_7)$, terdapat $v_6 \in V(C_7)\backslash S'$ tidak bertetangga dengan v_1 maupun v_3 sedemikian sehingga S' bukan merupakan himpunan dominasi. Dan seterusnya, untuk $S' = \{v_1, v_i\}$, terdapat $v_{i+2} \in V(C_7)\backslash S'$ dengan $i = 2,3,4$ dan $v_{i-2} \in V(C_7)\backslash S'$ untuk $i = 5,6$ tidak bertetangga dengan v_1 maupun v_i sedemikian sehingga S' bukan merupakan himpunan dominasi. Untuk $S' = \{v_2, v_i\}$ terdapat $v_{i+2} \in V(C_7)\backslash S'$ dengan $i = 3,4,5$ dan $v_{i-2} \in V(C_7)\backslash S'$ untuk $i = 6,7$ tidak bertetangga dengan v_2 maupun v_i sedemikian sehingga S' bukan merupakan himpunan dominasi. Untuk $S' = \{v_3, v_i\}$ terdapat $v_{i+2} \in V(C_7)\backslash S'$ dengan $i = 4,5$, $v_{i-2} \in V(C_7)\backslash S'$ untuk $i = 7$ dan $v_1 \in V(C_7)\backslash S'$ untuk $i = 6$ tidak bertetangga dengan v_3 maupun v_i sedemikian sehingga S' bukan merupakan himpunan dominasi. Untuk $S' = \{v_4, v_i\}$ terdapat $v_2 \in V(C_7)\backslash S'$ dengan $i = 5,6,7$ tidak bertetangga dengan v_4 maupun v_i sedemikian sehingga S' bukan merupakan himpunan dominasi. Untuk

$S' = \{v_5, v_i\}$ terdapat $v_2 \in V(C_7)\backslash S'$ dengan $i = 6{,}7$ tidak bertetangga dengan v_5 maupun v_i sedemikian sehingga S' bukan merupakan himpunan dominasi. Untuk $S' = \{v_6, v_7\}$ terdapat $v_2 \in V(C_7)\backslash S'$ tidak bertetangga dengan v_6 maupun v_7 sedemikian sehingga S' bukan merupakan himpunan dominasi. Karena tidak ada himpunan S' dengan dua anggota yang merupakan himpunan dominasi dari C_7 maka terbukti bahwa $\gamma_1(C_7) \geq 3$. Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa $\gamma_1(C_7) = 3$.

Contoh 2.4.2 Diberikan graf $P_3 \times P_4$ berikut dengan titik yang berwarna putih adalah anggota himpunan dominasinya.



Gambar 2.4.1 Graf $P_3 \times P_4$

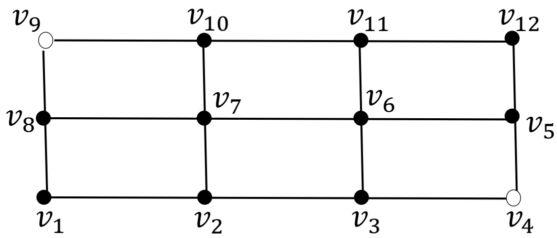
Misalkan $S = \{v_3, v_5, v_8, v_{11}\}$, S membentuk himpunan dominasi karena semua titik selain anggota S bertetangga dengan salah satu titik anggota S. Sehingga dapat ditulis $\gamma_1(P_3 \times P_4) \leq 4$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $|S| = 4$ adalah yang paling minimum yaitu dengan membuktikan $\gamma_1(P_3 \times P_4) \geq 4$. Untuk membuktikan bahwa $\gamma_1(P_3 \times P_4) \geq 4$, maka akan ditunjukkan bahwa tidak ada himpunan dominasi dengan tiga titik di graf $P_3 \times P_4$.

Asumsikan bahwa graf $P_3 \times P_4$ memiliki himpunan dominasi S dengan tiga titik. Misalkan $S' = \{v_3, v_5, v_{11}\}$, terdapat $x \in V(P_3 \times P_4)\backslash S'$ dengan $x = v_1, v_8$, v_9 tidak bertetangga dengan anggota-anggota himpunan S', yang mana hal ini tidak memenuhi Definisi 2.4.1. Sehingga S' harus memuat v_8 agar untuk setiap titik $x \in V(P_3 \times P_4)\backslash S'$ dapat bertetangga dengan salah satu anggota himpunan S'. Berlaku untuk S' dengan $|S'| = 3$ yang lain di mana akan selalu terdapat $v'_i \in V(P_3 \times P_4)\backslash S'$ dan $v_i \in S'$ sedemikian sehingga $d(v'_i, v_i) > 1$ atau dengan kata lain tidak saling bertetangga maka $\gamma_1(P_3 \times P_4) \geq 4$ terbukti. Sehingga dapat disimpulkan $\gamma_1(P_3 \times P_4) = 4$.

Untuk menunjukkan bahwa $\gamma(G) = k$, untuk sebarang graf G, maka perlu ditentukan himpunan dominasi untuk G dengan k titik (hal ini berarti bahwa $\gamma(G) \leq k$), kemudian selanjutnya, kita harus memverifikasi bahwa setiap himpunan dominasi dari G harus mengandung paling sedikit k titik (menunjukkan bahwa $\gamma(G) \geq k$) (Chartrand dan Zhang, 2005).

Definisi 2.4.2 Himpunan dominasi jarak dua adalah himpunan bagian S dari himpunan titik graf G $(V(G))$ dengan setiap titik anggota $V \backslash S$ terhubung dan berada dalam jarak maksimal dua dari paling sedikit satu titik anggota S (Yayuk Wahyuni, dkk, 2017).

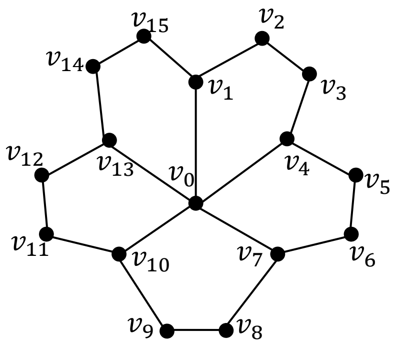
Contoh 2.4.3 Diberikan graf $P_3 \times P_4$ berikut dengan titik yang berwarna putih adalah anggota himpunan dominasi jarak dua.



Gambar 2.4.3 Graf $P_3 \times P_4$

Himpunan $S = \{v_4, v_9\}$ membentuk himpunan dominasi jarak dua dari graf $P_3 \times P_4$, hal ini berarti bahwa $\gamma_2(P_3 \times P_4) \leq 2$. Selanjutnya untuk membuktikan bahwa $\gamma_2(P_3 \times P_4) \geq 2$ akan ditunjukkan bahwa tidak ada himpunan dominasi jarak dua dengan satu titik di graf $P_3 \times P_4$. Misalkan $S' = \{v_i\}$, maka terdapat $v_{12} \in V \backslash S'$ sedemikian sehingga $d(v_i, v_{12}) > 2$ untuk $i = 1,2,3,7,8,9$ dan terdapat $v_1 \in V \backslash S'$ sehingga $d(v_i, v_1) > 2$ untuk $i = 4,5,6,10,11,12$. Dengan demikian S' bukan merupakan himpunan dominasi jarak dua karena tidak memenuhi Definisi 2.4.2 sehingga $\gamma_2(P_3 \times P_4) \geq 2$ terbukti. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan bahwa $\gamma_2(P_3 \times P_4) = 2$.

Contoh 2.4.4 Diberikan graf jahangir $J_{3,5}$, akan dicari bilangan dominasi jarak dua dari graf jahangir $J_{3,5}$ sebagai berikut.

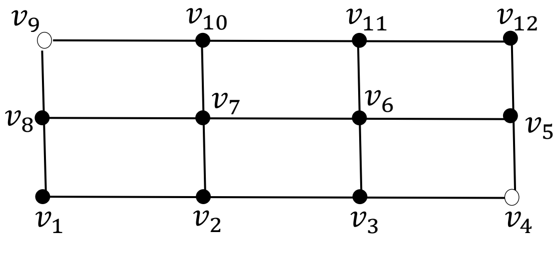


Gambar 2.4.4 Graf $(J_{3,5})$

Diambil $S = \{v_0\} \subseteq V((J_{3,5})$. Semua titik yang berderajat tiga terhubung dengan v_0, sedang titik yang berderajat dua mempunyai jarak dua dengan v_0. Ini menunjukkan bahwa S merupakan himpunan dominasi jarak-2 pada graf $(J_{3,5})$, sekaligus merupakan himpunan dominasi minimum karena syarat $S \neq \emptyset$ sehingga $S \geq 1$. Oleh sebab itu dapat disimpulkan bahwa bilangan dominasi jarak-2 dari graf $(J_{3,5})$ adalah satu atau dapat dituliskan $\gamma_2\big((J_{3,5}\big) = 1$.

Definisi 2.4.3 Himpunan dominasi jarak tiga adalah himpunan bagian S dari himpunan titik graf G $(V(G))$ dengan setiap titik di $V(G)\backslash S$ terhubung dan berada dalam jarak maksimal tiga dari paling sedikit satu titik anggota S. Bilangan dominasi jarak tiga dari graf G dinotasikan dengan $\gamma_3(G)$ yakni kardinalitas minimum dari himpunan dominasi.

Contoh 2.4.5 Diberikan graf $P_3 \times P_4$ berikut dengan titik yang berwarna putih adalah anggota himpunan dominasi jarak tiganya.



Gambar 2.4.5 Graf $P_3 \times P_4$

Diambil $S = \{v_4, v_9\}$. S merupakan himpunan dominasi jarak tiga karena semua titik selain anggota S terhubung dengan salah satu titik di S dan berada pada jarak kurang dari sama dengan tiga. Sehingga dapat ditulis $\gamma_3(P_3 \times P_4) \leq 2$. Selanjutnya untuk membuktikan bahwa $\gamma_3(P_3 \times P_4) \geq 2$ akan ditunjukkan bahwa tidak ada himpunan dominasi jarak tiga dengan satu titik di graf $P_3 \times P_4$. Misalkan $S' = \{v_i\}$ maka terdapat $v_{12} \in V(P_3 \times P_4)\backslash S'$ sehingga $d(v_i, v_{12}) > 3$ untuk $i = 1,2,8$, terdapat $v_9 \in V(P_3 \times P_4)\backslash S'$ sehingga $d(v_i, v_9) > 3$ untuk $i = 3,4,5$, terdapat $v_1 \in V(P_3 \times P_4)\backslash S'$ sehingga $d(v_i, v_1) > 3$ untuk $i = 11,12$. Sementara untuk $S' = \{v_6\}$ diperoleh bahwa $d(v_6, v_i) \leq 3$ untuk $i = 1,2, \dots ,12$ yang mana hal ini memenuhi Definisi 2.4.3 sedemikian sehingga $\gamma_3(P_3 \times P_4) \geq 2$ tidak terbukti. Karena diperoleh himpunan dominasi jarak tiga dengan satu titik maka dapat dituliskan $\gamma_3(P_3 \times P_4) \leq 1$ dan syarat $S \neq \emptyset$ hal ini berarti $\gamma_3(P_3 \times P_4) \geq 1$. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan bahwa $\gamma_3(P_3 \times P_4) = 1$.

Dari Contoh 2.4.2, Contoh 2.4.3 dan Contoh 2.4.5 dapat dinyatakan bahwa untuk graf yang sama, bilangan dominasi jarak satu dan bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf belum tentu merupakan bilangan dominasi jarak tiga dari graf tersebut.

Beberapa peneliti terdahulu telah menentukan himpunan dominasi jarak satu pada berbagai macam graf. Hasil-hasil penelitian tersebut termuat dalam Tabel 2.4.1 berikut.

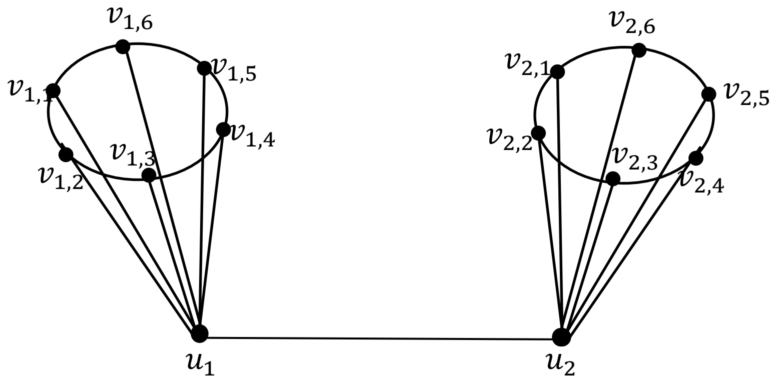
Tabel 2.4.1 Hasil Penelitian Terdahulu dari Bilangan Dominasi

Graf *(G)*	$\boldsymbol{\gamma(G)}$	**Keterangan**
Path graph (P_n), $n \geq 1$	$\gamma_1(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{3}, n \equiv 0(mod\ 3) \\ \frac{n+2}{3}, n \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{n+1}{3}, n \equiv 2(mod\ 3) \end{cases}$	Leomarich F. Casnillo, (2020)
Path graph (P_n), $n \geq 3, k \geq 1$	$\gamma_k(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$	Randy Davila, dkk (2006)
$G_n \odot H_m$	$\gamma_1(G_n \odot H_m) = n$	Go, Carmelito E. (2011)
	$\gamma_2(G_n \odot H_m) = \gamma_1(G_n)$	Vikade, W. D. (2016).

Pada Tabel 2.4.1 telah diketahui bilangan dominasi jarak satu dari graf lintasan (P_n). Selanjutnya graf lintasan akan dioperasi koronakan dengan beberapa graf dan dicari bilangan dominasi jarak tiga dari graf hasil korona tersebut. Dari hasil tersebut, dilakukan perumuman formula untuk bilangan dominasi jarak tiga pada korona graf lintasan P_n terhadap sebarang graf H. Kemudian akan dianalisa bagaimana kaitan antara bilangan dominasi jarak tiga pada korona graf lintasan P_n terhadap sebarang graf H dengan graf lintasan P_n.

Sebagai contoh akan ditentukan bilangan dominasi jarak tiga untuk graf hasil korona antara graf lintasan orde dua (P_2) dengan graf lingkaran C_m dan graf lintasan orde tiga (P_3) dengan graf lengkap K_m.

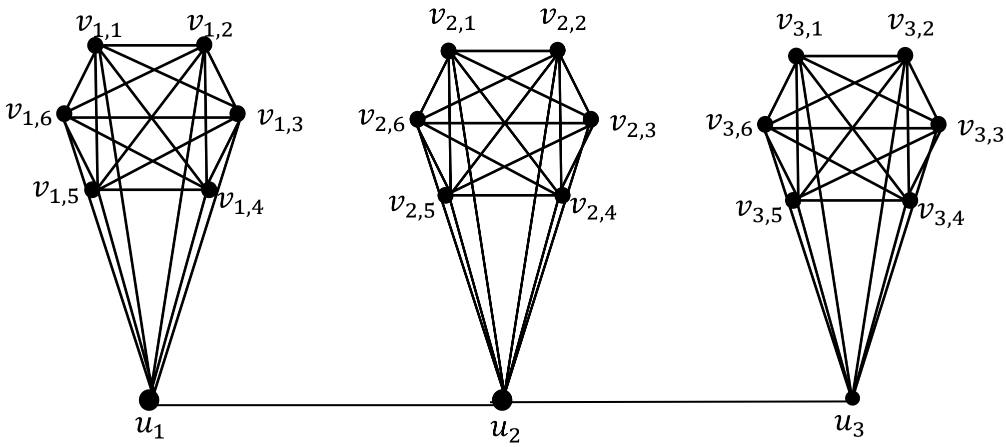
Contoh 2.4.5 Penentuan bilangan dominasi jarak tiga pada graf hasil korona antara graf lintasan berorde dua dengan graf lingkaran $(P_2 \odot C_6)$.



Gambar 2.4.6 Graf $P_2 \odot C_6$

Diambil $S = \{u_1\}$. Karena setiap titik di $VP_2 \odot C_6)\backslash S$ terhubung dengan u_1 dan jarak paling jauh adalah kurang dari tiga maka himpunan bagian S membentuk himpunan dominasi jarak tiga sekaligus merupakan himpunan dominasi paling minimum karena syarat $S \neq \emptyset$. Sedemikian sehingga dapat disimpulkan bahwa $\gamma_3(P_2 \odot C_6) = 1$.

Contoh 2.4.6 Penentuan bilangan dominasi jarak tiga pada graf hasil korona antara graf lintasan berorde tiga dengan graf lengkap $(P_3 \odot K_6)$.



Gambar 2.4.7 Graf $P_3 \odot K_6$

Diambil $S = \{u_2\} \subseteq V(P_3 \odot K_6)$. Karena semua titik anggota $V(P_3 \odot K_6)\backslash S$ terhubung dengan u_2 dengan jarak titik paling jauh terhadap u_2 kurang dari tiga, maka S merupakan himpunan dominasi jarak tiga dalam hal ini dapat ditulis $\gamma_3(P_3 \odot K_6) \leq 1$ dan syarat bahwa $S \neq \emptyset$ hal ini berarti himpunan dominasi jarak tiga S merupakan himpunan dominasi jarak tig dengan kardinaitas yang paling minimum atau dapat ditulis $\gamma_3(P_3 \odot K_6) \geq 1$. Sedemikian sehingga dapat disimpulkan bahwa $\gamma_3(P_3 \odot K_6) = 1$.

Dari Contoh 2.4.5 dan Contoh 2.4.6 diperoleh bahwa $\gamma_3(P_2 \odot C_6) = \gamma_3(P_3 \odot K_6)$ yaitu 1. Namun, belum dapat ditentukan bahwa hasil tersebut berlaku untuk semua graf lintasan P_n terhadap graf H berorde sama. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini akan dikaji lebih lanjut lagi bilangan dominasi jarak tiga pada graf korona lintasan dengan beberapa graf H untuk orde yang berbeda-beda sehingga dapat ditemukan formula umum yang dapat digunakan untuk menentukan bilangan dominasi jarak tiga pada graf korona lintasan dengan sebarang graf H. Selanjutnya akan dianalisa bagaimana kaitan antara formula yang telah ditemukan dengan graf lintasan P_n.