PEWARNAAN KLASTER PADA HIPERGRAF

SKRIPSI

Fitri Sahadatun Nita

H011191084

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2023

PEWARNAAN KLASTER PADA HIPERGRAF

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Stdi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Fitri Sahadatun Nita
H011191084

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MEI 2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fitri Sahadatun Nita

Nim : H011191084

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya yang berjudul

Pewarnaan Klastaer Pada Hipergraf

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa tulisan skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 23 Mei 2023

Yang menyatakan,

10000 METERAI TEMPEL 2C8FFAKX477836404

Fitri Sahadatun Nita
NIM . H011191084

LEMBARAN PENGESAHAN

PEWARNAAN KLASTER PADA HIPERGRAF

Disusun dan diajukan oleh

FITRI SAHADATUN NITA

H011191084

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal. 23 Mei 2023

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.	Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.
NIP. 19580802 198403 1 002	NIP. 19680601 199512 2 001

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA

iii

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul "**Pewarnaan Klaster Pada Hipergraf**", sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasehat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, izinkan penulis mengucapkan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada kedua orang tua penulis, Bapak **Abdullah** dan Ibu **ST. Aminah** yang telah sabar membesarkan dan mendidik penulis, serta memberi dukungan do'a dan materi, sehingga penulis bisa mencapai di titik ini dan mampu menyelesaikan pendidikan di perguruan tinggi dan mendapat gelar yang insyaAllah dapat dimanfaatkan penulis di kemudian hari. Terima kasih kepada kakak saya **Sudra dan Yan** serta seluruh keluarga yang telah memebri do'a dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** Selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si**. selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswi di Program Studi Matematika serta **Para Staff Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.

3. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** Selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan banyak waktu di tengah kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** dan **Jeriko Gormantara, S.Si.,M.Si.** selaku Tim Penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Teman-teman seperjuangan Prodi **Matematika 2019** telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.
6. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapatkan balasan dari Allah SWT . Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 23 Mei 2023

Fitri Sahadatun Nita

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMISI

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fitri Sahadatun Nita

Nim : H011191084

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif *(Non-exclusive Royalty- Free Right)* atas** karya ilmiah saya yang berjudul :

Pewarnaan Klaster Pada Hipergraf

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak cipta.

Demikan pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 23 Mei 2023

Yang menyatakan,

Fitri Sahadatun Nita

ABSTRAK

Misalkan H adalah hipergraf, dimana sisi dapat menghubungkan lebih dari dua titik. Pewarnaan hipergraf adalah memberi warna pada titik-titik sehingga setiap sisi mempunyai paling sedikit dua warna yang berbeda. Hipergraf klaster G adalah pengembangan dari hipergraf dimana suatu sisi dapat menghubungkan lebih dari dua titik klaster. Pewarnaan hipergaf klaster, dinotasikan $\chi(G)$ adalah memberi warna pada titik-titik dimana suatu sisi yang menghubungkan lebih dari dua titik diberi minimal dua warna yang berbeda sedangkan pewarnaan kuat diberi warna yang semuanya berbeda, dinotasikan $\chi_s(G)$. Penelitian ini akan dipaparkan terkait pewarnaan klaster pada hipergraf dan contoh penerapannya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa lintasan dari hipergraf klaster, $\chi(G) = 2$ dan $\chi_s(G) = maks\ |E_i|$ sedangkan *cycle*, $\chi_s(G) = maks\ |E_i|$ dengan $|E_i| \geq 3$ dan jika panjang *cycle* genap, $\chi_s(G) = 2$, panjang *cycle* ganjil, $\chi_s(G) = 3$. Contoh penerapan pewarnaan hipergraf klaster pada data B3 dengan 33 jenis B3 dan dapat dioptimalkan menjadi 4 tempat penyimpanan yang berbeda.

Kata Kunci: Hipergraf, hipergraf klaster, pewarnaan hipergraf, pewarnaan hipergraf klaster.

Judul : Pewarnaan Klaster Pada Hipergraf

Nama : Fitri Sahadatun Nita

Nim : H011191084

Program Studi : Matematika

ABSTRACT

Let H be a hypergraph, where edges can connect more than two vertexs. Hypergraph coloring is coloring the vertexs so that each side has at least two different colors. Cluster hypergraph G is the development of a hypergraph where an edge can connect more than two cluster vertexs. Cluster hypergave coloring, denoted $\chi(G)$ *is to color the vertexs where an edge that connects more than two vertexs is given at least two different colors, while strong coloring is given all different colors, denoted* $\chi_s(G)$. *This research will describe cluster coloring on hypergraphs and examples of it's application. The results show that the path of the cluster hypergraph,* $\chi(G) = 2$ *and* $\chi_s\ (G) = \max|E_i|$ *while cycle,* $\chi_s\ (G) = \max|E_i|$ *with* $|E_i| \geq 3$ *and if the cycle length is even,* $\chi(G) = 2$*, cycle length is odd,* $\chi(G) = 3$. *Example of applying cluster hypergraph coloring to B3 data with 33 types of B3 and can be optimized into 4 different storage areas.*

Keywords: *Hypergraph, cluster hypergraph, coloring hypergraph, coloring cluster hypergraph.*

Title : Cluster Coloring Of Hypergraph

Name : Fitri Sahadatun Nita

Student ID : H011191084

Study Program : Mathematics

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali Pada halaman
$\mathcal{X}(G)$	Bilangan kromatik	5
H	Hipergraf	9
$n(H)$	Himpunan titik hipergraf	9
$m(H)$	Himpunan sisi hipergraf	9
$deg(x)$	Derajat titik hipergraf	11
$N(x)$	Adjacent titik	12
$F(H)$	Himpunan flag	14
W	Jalan	17
V_X	Titik klaster	23
$d(V)$	Derajat titik hipergraf klaster	25
$k(E_i)$	Ukuran sisi hipergraf klaster	26
$\alpha(H)$	Bilangan stabilitas	45
$\gamma(G)$	Bilangan kromatik kuat	45

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pada tahun 1736 Euler memperkenalkan teori graf yang awalnya merupakan penyelesaian masalah jembatan Konigsberg di Eropa. Kemudian pada tahun 1973 C. Berge seorang matematikawan Prancis menemukan istilah hipergraf. Hipergraf adalah generalisasi dari graf dimana sisi pada hipergraf dapat menghubungkan lebih dari dua titik. Beberapa pokok bahasan dalam hipergraf, salah satunya adalah pewarnaan hipergraf. Pewarnaan-*k* hipergraf adalah pewarnaan titik dengan warna-warna dari himpunan bilangan bulat *k* dimana setiap *hiperedge* mempunyai paling sedikit dua warna yang berbeda. Pada tahun 2020 Samanta, Muhiuddin dkk pertama kali memperkenalkan terkait hipergraf klaster. Hipergraf klaster adalah pengembangan dari hipergraf dimana sebuah sisi dapat menghubungkan lebih dari dua titik klaster. Pewarnaan-*k* hipergraf klaster adalah pewarnaan titik maksimal dimana suatu sisi yang menghubungkan lebih dari dua titik diberi minimal dua warna yang berbeda. Hipergraf dapat merepresentasikan permasalahan di berbagai bidang. Hipergraf dapat digunakan untuk merepresentasikan interaksi sosial individu atau kelompok digambarkan dengan titik sedangkan hubungannya digambarkan dengan *hyperedge* (Rahayuningsih, 2011).

Banyak peneliti telah membahas pewarnaan hipergraf. Berikut diberikan tabel terkait kronologi kontribusi beberapa peneliti yang telah membahas pewarnaan hipergraf.

No.	Peneliti	Tahun	Kontribusi
1.	Baranyai	1977	Pewarnaan sisi pada

			hipergraf lengkap
2.	Chang dan Lawler	1987	Catatan pewarnaan sisi hipergraf dan konjektur dari Erdos, Faber, Lovasz
3.	Vishwanathan	2002	Pewarnaan-2 hipergraf seragam-*k*
4.	Agnarsson dan Halld´orsson	2004	Pewarnaan kuat hipergraf
5.	Haxell dan Vertraete	2010	Daftar pewarnaan hipergraf
6.	Frieze dan Mubayi	2013	Pewarnaan hipergraf sederhana
7.	Brandt	2015	Hipergraf berpotongan dan dekomposisi dari hipergraf seragam lengkap
8.	Obszarki dan Jastrzebski	2016	Pewarnaan sisi dari hipergraf seragam-3
9.	Li dan Zhang	2018	Pewarnaan polikromatik dan dekomposisi dari hipergraf
10.	Akhmejanova dan Shabanov	2019	Pewarnaan hipergraf dengan kardinalitas terbatas dari perpotongan sisi
11.	Samanta, Muhiuddin dkk	2020	Pendekatan Matematika pada Representasi Kompetisi: Hipergraf Klaster Kompetisi
12	Samanta, Lee	2020	Konsep pewarnan klaster

	dkk		hipergraf dengan aplikasinya

Kesenjangan dari kronologi yang diteliti pada tahun 2020 oleh Samanta, Muhiuddin dkk yang berjudul "Pendekatan Matematika pada Representasi Kompetisi: Hipergraf Klaster Kompetisi" telah dikembangkan oleh Samanta, Lee dkk terkait konsep pewarnaan klaster hipergraf dengan contoh kecil dari ilustrasi penyebaran Covid-19 di dunia. Berdasarkan hasil yang dikemukakan oleh Samanta, Lee dkk, maka penulis akan mengembangkan hasil penelitian tersebut dengan contoh penerapan pada kasus yang berbeda. Untuk itu, penulis tertarik mengambil judul **Pewarnaan Klaster Pada Hipergraf.**

I.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah di uraikan maka rumusan masalah penelitian ini adalah

1. Mendeskripsikan pewarnaan klaster pada hipergraf.
2. Memberikan penerapan pewarnaan klaster hipergraf pada data bahan berbahaya dan beracun (B3).

I.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah mendeskripsikan pewarnaan hipergraf klaster dan sifat-sifatnya dan menerapkannnya pada data bahan berbahaya dan beracun (B3).

I.4 Manfaat Penelitian

1. Untuk menambah pemahaman dan penguasaan peminat graf tentang pewarnaan hipergraf.
2. Untuk mempermudah proses klastering dari suatu data yang akan diproses

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi.

Definisi 2.1.1 (Rahayuningsih, 2011). Graf adalah pasangan himpunan (X, E),), dinotasikan $G = (X, E)$, X adalah himpunan berhingga yang setiap unsurnya disebut titik (vertex) dan E adalah himpunan pasangan-pasangan dari anggota X disebut sisi (edge).

Himpunan dari titik-titik X dapat ditulis dengan X={x_1, x_2 ..., x_n} dan himpunan sisi-sisi E dapat ditulis dengan E={e_1, e_2 ..., e_m}. Misalkan, titik x_1 dan x_2, dihubungkan dengan sebuah sisi e_1, maka x_1 dan x_2 disebut bertetangga (*adjacent*), x_1 dan e_1 serta e_1 dan x_2 disebut terkait langsung (*incident*).

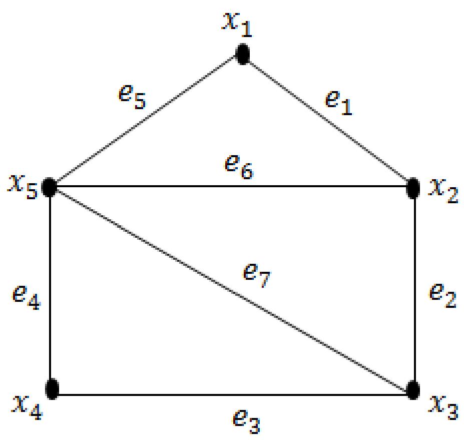
Contoh 2.1.1 Diberikan graf $G = (X, E)$ dengan X dan E sebagai berikut.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_5\}\}$

$\quad = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Graf $G = (X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.1-1 Graf G

Pada Gambar 2.1.1 dapat diamati bahwa n=5 titik dan m=7 sisi.

Definisi 2.1.3 (Munir, 2010). Pewarnaan titik adalah memberi warna pada titik-titik di dalam graf sedemikian sehingga setiap dua titik bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Jumlah minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik disebut bilangan kromatik graf G, disimbolkan dengan $\mathcal{X}(G)$. Suatu graf G yang mempunyai bilangan kromatik k dilambangkan dengan $\mathcal{X}(G) = k$.

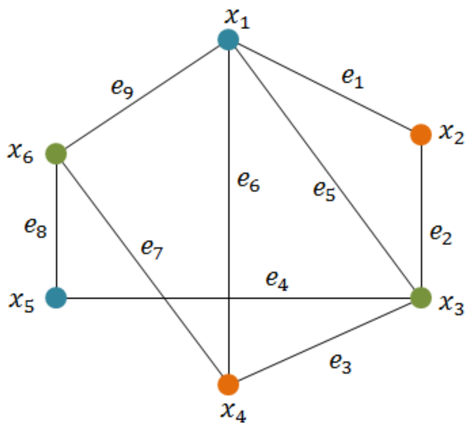
Contoh 2.1.3 Diberikan graf $G = (X, E)$ dengan X dan E sebagai berikut.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_5\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_3, x_5\},$

$\{x_5, x_6\}, \{x_1, x_6\}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}.$

Graf $G = (X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.1-2 Pewarnaan-3 pada Graf G

Graf G pada Gambar 2.1-2 merupakan graf dengan pewarnaan titik yang memiliki bilangan kromatik tiga, dinotasikan $\mathcal{X}(G_2) = 3$.

Definisi 2.1.4 (Rahayuningsih, 2011). Pewarnaan sisi adalah memberi warna pada sisi-sisi di dalam graf sedemikian sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda.

Jumlah minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai sisi disebut bilangan kromatik graf G, disimbolkan dengan $\mathcal{X}'(G)$. Suatu graf G yang mempunyai bilangan kromatik k dilambangkan dengan $\mathcal{X}'(G) = k$.

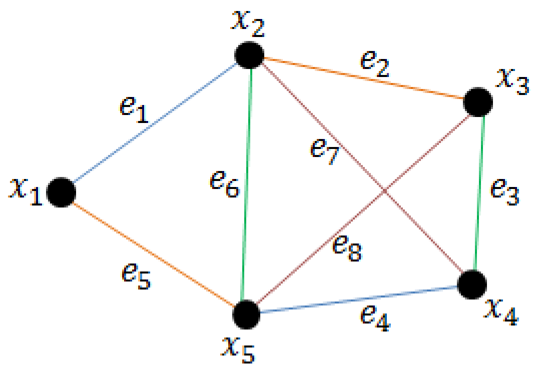
Contoh 2.1.4 Diberikan graf $G = (X, E)$ dengan X dan E sebagai berikut.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_5\}, \{x_2, x_4\},$

$\{x_3, x_5\}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

Graf $G = (X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.1-3 Pewarnaan-4 pada Graf G

Graf G pada Gambar 2.1-3 merupakan graf dengan pewarnaan sisi yang memiliki bilangan kromatik empat, dinotasikan $\mathcal{X}'(G_3) = 4$.

II.2 Himpunan

Teori himpunan pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan yang bernama Georg Cantor pada akhir abad ke-19.

Definisi 2.2.1 (Darwanto, 2020). Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang berbeda.

Objek yang terdapat dalam himpunan disebut elemen atau anggota. Salah satu cara dalam menyajikan himpunan adalah dengan cara enumerasi yaitu menuliskan semua elemen himpunan yang bersangkutan dan diberi dua tanda kurung kurawal.

Contoh 2.2.1 Contoh-contoh himpunan yaitu:

$X = \{a, \{a, b\}, c, d\}$

$X = \{a, \{a\}, \{b\}, c, d\}$

$Z = \{\{a, b, c\}, \{ c, d\}, e\}$

Definisi 2.2.2 (Darwanto, 2020). Kardinal dari sebuah himpunan (*cardinality of the set*) adalah jumlah dari elemen yang berbeda dari sebuah himpunan.

Kardinalitas himpunan dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$, dengan A merupakan sebuah himpunan.

Contoh 2.2.2 Misal $A = \{1,2,3,5\}$ dan $B = \{2,3,5,7,9\}$ maka $|A| = 4$ dan $|B| = 5$.

Definisi 2.2.3 (Darwanto, 2020). Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A itu sendiri.

Dari definisi diatas, dapat dinotasikan $P(A) = \{B: B \subseteq A\}$. Sedangkan jumlah elemen dari himpunan kuasa adalah $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Contoh 2.2.3 Misal $A = \{1,2,3\}$, maka $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Definisi 2.2.4 (Darwanto, 2020). Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong $A_1, A_2, \ldots$ dari A sedemikian hingga $A_1 \cup A_2, \ldots = A$ dan himpunan bagian A_i saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$.

Contoh 2.2.4 Misal $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ maka $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e, f\}, \{g, h, i\}, j\}$.

II.3 Hipergraf

Hipergraf pertama kali diperkenalkan oleh C. Berge pada tahun 1970. Hipergraf merupakan generalisasi dari graf dimana sisi pada hipergraf dapat menghubungkan lebih dari dua titik.

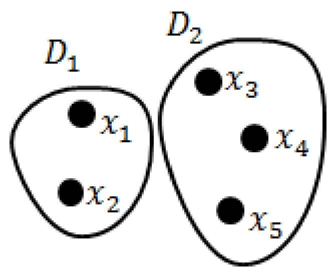
Definisi 2.3.1 (Berge, 1973). Misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari titik-titik. *Hyperedge* adalah kurva tertutup yang memuat himpunan bagian dari X. *Hyperedge* dinotasikan dengan $D_i, i = 1,2, \ldots, m$.

Contoh 2.3.1 Diberikan *hyperedge* dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$D = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}\} = \{D_1, D_2\}$.

Hyperedge D dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3-1 *Hyperedge D*

Karena $\{x_1, x_2\} \in X$, maka $\{x_1, x_2\}$ merupakan *hyperedge*, dinotasikan dengan D_1 dan $\{x_3, x_4, x_5\} \in X$, maka $\{x_3, x_4, x_5\}$ merupakan *hyperedge*, dinotasikan dengan D_2.

Definisi 2.3.2 (Berge, 1973). Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari titik-titik dan $D = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ adalah himpunan *hyperedge*, maka $H = (X, D)$ disebut hipergraf.

Hyperedge dapat disebut sebagai sisi pada hipergraf. Himpunan titik dari hipergraf H, dinotasikan $X(H)$ dan himpunan sisi D, dinotasikan $D(H)$. Banyaknya anggota pada himpunan X, dinotasikan $n(H)$ disebut order dari hipergraf dan banyaknya anggota pada himpunan D, dinotasikan $m(H)$ disebut ukuran dari hipergraf. Hipergraf dikatakan sederhana jika $D_i \nsubseteq D_j$ untuk $i \neq j$ dan banyaknya anggota dari irisan setiap dua sisi yang berbeda maksimal satu.

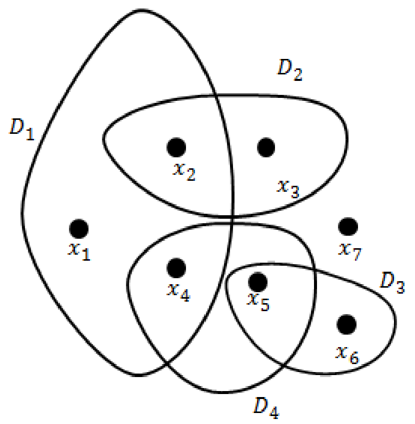
Contoh 2.3.2 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

$D = \{\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_5, x_6\}, \{ x_4, x_5\}\}$

$\quad = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}.$

Hipergraf $H = (X, D)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3-2 Hipergraf sederhana H

Hipergraf pada gambar diatas merupakan hipergraf sederhana karena tidak terdapat sisi yang memuat sisi lainnya dan banyaknya anggota dari irisan setiap dua sisi yang berbeda maksimal satu, x_2 merupakan anggota irisan dari D_1 dan D_2, x_4 merupakan anggota irisan dari D_1 dan D_4 dan x_5 merupakan anggota irisan dari D_3 dan D_4.

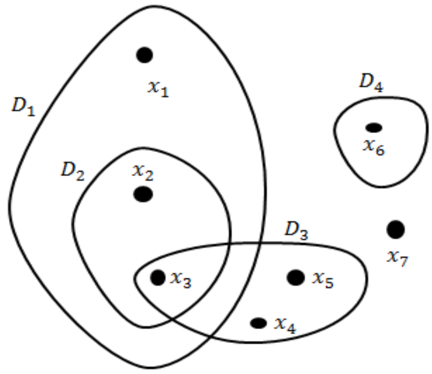
Contoh 2.3.3 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

$D = \left\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{ x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{ x_6\}\right\}$

$\quad = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}.$

Hipergraf $H = (X, D)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3-3 Hipergraf tidak sederhana H

Hipergraf pada gambar diatas merupakan hipergraf tidak sederhana karena terdapat sisi D_1 yang memuat sisi D_2 atau $D_2 \subset D_1$.

Definisi 2.3.3 (Putri dkk, 2020). Derajat dari suatu titik $x \in X$ pada hipergraf $H = (X, D)$ dinotasikan *deg(x)*, adalah banyaknya hyperedge $D_i \in D$ sedemikian sehingga $x \in D_i$.

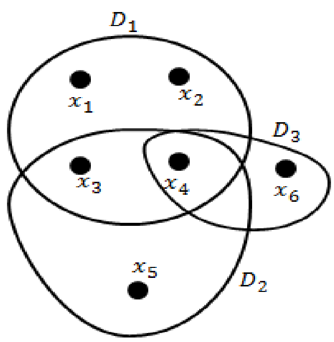
Contoh 2.3.4 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$D = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_4, x_6\}\}$

$\quad = \{D_1, D_2, D_3\}$.

Hipergraf $H = (X, D)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3-4 Hipergraf H

Derajat dari titik pada hipergraf diatas adalah sebagai berikut.

1. *deg*(x_1)= 1 karena $x_1 \in D_1$ dan $x_1 \notin D_i, i = 2{,}3$. Jadi, terdapat satu sisi memuat titik x_1.
2. *deg*(x_2)= 1 karena $x_2 \in D_1$ dan $x_2 \notin D_i, i = 2{,}3$. Jadi, terdapat satu sisi memuat titik x_2.
3. *deg*(x_3)= 2 karena $x_3 \in D_i, i = 1{,}2$ tetapi $x_3 \notin D_3$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik x_3.
4. *deg*(x_4)= 3 karena $x_4 \in D_i, i = 1{,}2{,}3$. Jadi, terdapat tiga sisi memuat titik x_4.
5. *deg*(x_5)= 1 karena $x_5 \in D_2$ dan $x_5 \notin D_i, i = 1{,}3$. Jadi, terdapat satu sisi memuat titik x_5.
6. *deg*(x_6)= 1 karena $x_6 \in D_3$ dan $x_6 \notin D_i, i = 1{,}2$. Jadi, terdapat satu sisi memuat titik x_6.

Definisi 2.3.4 (Vitaly, 2009). Misalkan $H = (X, D)$ adalah hipergraf. Dua titik dikatakan adjacent jika terdapat sisi $D_i \in D$ yang memuat kedua titik tersebut. Himpunan titik yang adjacent dengan *x*, dinotasikan *N(x)*.

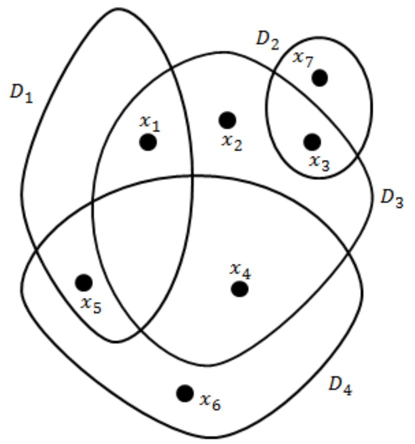
Contoh 2.3.5 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

$D = \{\{x_1, x_5\}, \{x_3, x_7\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_4, x_5, x_6\}\}$

$\quad = \{D_1, D_2, D_3,\ D_4\}$.

Hipergraf $H = (X, D)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3-5 Hipergraf H

Titik yang adjacent pada hipergraf diatas adalah sebagai berikut:

1. x_1 adjacent dengan x_5 karena $x_1, x_5 \in D_1$ dan x_1 adjacent dengan x_2, x_3, x_4 karena $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D_3$. Jadi, $N(x_1) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$.
2. x_2 adjacent dengan x_1, x_3, x_4 karena $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D_3$. Jadi, $N(x_2) = \{x_1, x_3, x_4\}$.
3. x_3 adjacent dengan x_7 karena $x_3, x_7 \in D_2$ dan x_3 adjacent dengan x_1, x_2, x_4 karena $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D_3$. Jadi, $N(x_3) = \{x_1, x_2, x_4, x_7\}$.
4. x_4 adjacent dengan x_1, x_2, x_3 karena $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D_3$ dan x_4 adjacent dengan x_5, x_6 karena $x_4, x_5, x_6 \in D_4$. Jadi, $N(x_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$.
5. x_5 adjacent dengan x_1 karena $x_1, x_5 \in D_1$ dan x_5 adjacent dengan x_4, x_6 karena $x_4, x_5, x_6 \in D_4$. Jadi, $N(x_5) = \{x_1, x_4, x_6\}$.
6. x_6 adjacent dengan x_4, x_5 karena $x_4, x_5, x_6 \in D_4$ Jadi, $N(x_6) = \{x_4, x_5\}$.
7. x_6 adjacent dengan x_3 karena $x_3, x_7 \in D_2$. Jadi, $N(x_7) = \{x_3\}$.

Definisi 2.3.5 (Vitaly, 2009). Misalkan $H = (X, D)$ adalah hipergraf. Sisi $D_i, D_j \in D$ dikatakan adjacent jika terdapat $x \in X$

sedemikian sehingga $x \in D_i \cap D_j$. Himpunan sisi yang adjacent dengan D_i untuk suatu i, dinotasikan $N(D_i)$.

Contoh 2.3.6 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ pada Contoh 2.3.5. Sisi yang adjacent pada hipergraf adalah sebagai berikut:

1. D_1 adjacent dengan D_3 karena $x_1 \in X$ dan $x_1 \in D_1 \cap D_3$ dan D_1 adjacent dengan D_4 karena $x_5 \in X$ dan $x_5 \in D_1 \cap D_4$. Jadi, $N(D_1) = \{D_3, D_4\}$.
2. D_2 adjacent dengan D_3 karena $x_3 \in X$ dan $x_3 \in D_2 \cap D_3$. Jadi, $N(D_2) = \{D_3\}$.
3. D_3 adjacent dengan D_1 karena $x_1 \in X$ dan $x_1 \in D_1 \cap D_3$, D_3 adjacent dengan D_2 karena $x_3 \in X$ dan $x_3 \in D_2 \cap D_3$ dan D_3 adjacent dengan D_4 karena $x_4 \in X$ dan $x_4 \in D_3 \cap D_4$. Jadi, $N(D_3) = \{D_1 , D_2, D_4\}$.
4. D_4 adjacent dengan D_1 karena $x_5 \in X$ dan $x_5 \in D_1 \cap D_4$ dan D_4 adjacent dengan D_3 karena $x_4 \in X$ dan $x_4 \in D_3 \cap D_4$. Jadi, $N(D_4) = \{D_1, D_3\}$.

Definisi 2.3.6 (Putri dkk, 2020). Misalkan, $H = (X, D)$ adalah hipergraf. Flag adalah pasangan (x, D_i) dengan $x \in X$ dan $D_i \in D$ sedemikian sehingga $x \in D_i$. Himpunan dari semua flag di *H*, dinotasikan *F(H)*.

Contoh 2.3.7 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ seperti pada Contoh 2.3.5. Flag (x, D_i) pada hipergraf adalah sebagai berikut:

1. $(x_1,\ D_1)$ adalah sebuah flag karena $x_1 \in\ D_1$.
2. $(x_5,\ D_1)$ adalah sebuah flag karena $x_5 \in\ D_1$.

Dengan cara yang sama, maka diperoleh himpunan flag $F(H)$ untuk hipergraf $H = (X, D)$ yaitu:

$F(H) = \{(x_1,\ D_1), (x_5,\ D_1), (x_3,\ D_2),\ (x_7,\ D_2),\ (x_1,\ D_3),\ (x_2,\ D_3), (x_3,\ D_3), (x_4,\ D_3), (x_4,\ D_4), (x_5,\ D_4), (x_6,\ D_4)\}$.

Definisi 2.3.7 (Vitaly, 2009). Misalkan, $H = (X, D)$ adalah hipergraf. Titik x dikatakan incident dengan sisi D_i jika $x \in D_i$, dalam hal ini sebuah sisi D_i dikatakan juga incident ke titik x.

Dengan kata lain, titik x incident dengan sisi D_i jika (x, D_i) adalah sebuah flag.

Contoh 2.3.8 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ seperti pada Contoh 2.3.5.

Titik x yang incident terhadap sisi D_i adalah sebagai berikut:

1. Karena $(x_1,\ D_1) \in F(H)$ dan $(x_1,\ D_3) \in F(H)$, maka x_1 incident dengan D_1 dan D_3.
2. Karena $((x_2,\ D_3) \in F(H)$ maka x_2 incident dengan D_3.
3. Karena $(x_3,\ D_2) \in F(H)$ dan $(x_3,\ D_3) \in F(H)$, maka x_3 incident dengan D_2 dan D_3.
4. Karena $(x_4,\ D_3) \in F(H)$ dan $(x_4,\ D_4) \in F(H)$, maka x_4 incident dengan D_3 dan D_4.
5. Karena $(x_5,\ D_1) \in F(H)$ dan $(x_5,\ D_4) \in F(H)$, maka x_5 incident dengan D_1 dan D_4.
6. Karena $(x_6,\ D_4) \in F(H)$, maka x_6 incident dengan D_4.
7. Karena $(x_7,\ D_2) \in F(H)$, maka x_7 incident dengan D_2.

Definisi 2.3.8 (Vitaly, 2009). Sebuah sisi dari hipergraf yang tidak memuat titik dan sisi disebut sisi kosong atau *empty edge*.

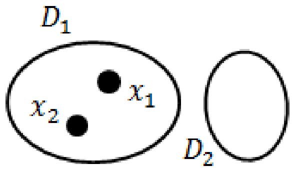
Contoh 2.3.9 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2\}$

$D = \{\{x_1, x_2\}, \{\ \}\}$

$= \{D_1, D_2\}.$

Hipergraf $H = (X, D)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3-6 Hipergraf H

Pada Gambar hipergraf diatas, karena $D_2 = \{\ \}$ maka D_2 disebut sisi kosong atau *empty edge.*

Definisi 2.3.9 (Vitaly, 2009). Sebuah titik dari hipergraf yang tidak incident dengan sisi disebut titik terisolasi.

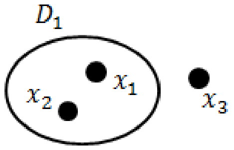
Contoh 2.3.10 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$D = \{\{x_1, x_2\}\}$

$= \{D_1\}.$

Hipergraf $H = (X, D)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3-7 Hipergraf H

Karena $x_3 \notin D_1$ maka x_3 merupakan titik yang tidak incident dengan sebuah sisi. Jadi, x_3 disebut titik terisolasi.

Definisi 2.3.10 (Vitaly, 2009). Sebuah sisi dari hipergraf yang incident dengan hanya satu titik disebut *singleton (loop)*. Titik yang termuat pada sisi *singleton* disebut *pendant vertex.*

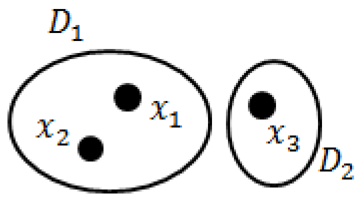
Contoh 2.3.11 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$D = \big\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\big\}$

$\quad = \{D_1, D_2\}.$

Hipergraf $H = (X, D)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3-8 Hipergraf H

Sisi D_2 adalah *singleton (loop)* karena terdapat hanya $x_3 \in D_2$. Dan titik x_3 disebut *pendant vertex* karena hanya incident dengan sebuah si;si yaitu D_2.

Definisi 2.3.11 (Bahmanian dan Sajna, 2015). Misalkan $H = (X, D)$ adalah hipergraf. Jalan dari titik u ke v, dinotasikan W dengan panjang k adalah barisan $x_1, D_1, x_2, D_2, \dots, x_k, D_k, x_{k+1}$ dengan $x_1 = u$ dan $x_{k+1} = v$ dari titik dan sisi (dapat berulang) sedemikian sehingga x_j dan x_l adjacent pada $D_i, l = 1,2, \dots., k$. Jika titik $x_1 = x_{k+1}$ maka jalan dikatakan tertutup.

Titik $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ disebut *anchor* pada jalan. Jika $W = x_1, D_1, x_2, D_2, \dots, x_k, D_k, x_{k+1}$ maka $(x_1, D_1), (x_2, D_1), (x_2, D_2),$

$\dots, (x_k, D_k), (x_{k+1}, D_k)$ disebut *anchor* flag. Jika W dengan panjang k dapat juga dinyatakan sebagai barisan k *anchor* flag.

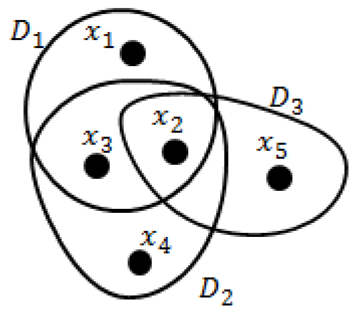
Contoh 2.3.12 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$D = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_5\}\}$

$\quad = \{D_1, D_2, D_3\}.$

Hipergraf $H = (X, D)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.3.-9 Hipergraf H

Hipergraf pada gambar diatas mempunyai jalan dari titik u ke v sebagai berikut:

1. Titik x_1 ke x_2, maka $W = x_1, D_1, x_2$ sehingga $k = 1$.
2. Titik x_1 ke x_3, maka $W = x_1, D_1, x_3$ sehingga $k = 1$.
3. Titik x_1 ke x_4, maka $W = x_1, D_1, x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 2$.
4. Titik x_1 ke x_5, maka $W = x_1, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 2$.
5. Titik x_2 ke x_3, maka $W = x_2, D_1, x_3$ sehingga $k = 1$.
6. Titik x_2 ke x_4, maka $W = x_2, D_1, x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 2$.
7. Titik x_2 ke x_5, maka $W = x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 1$.
8. Titik x_3 ke x_4, maka $W = x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 1$.
9. Titik x_3 ke x_5, maka $W = x_3, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 2$.

10. Titik x_4 ke x_5, maka $W = x_4, D_2, x_3, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 3$.

Definisi 2.3.12 (Bahmanian dan Sajna, 2015). Misalkan $H = (X, D)$ adalah hipergraf dan $W = x_1, D_1, x_2, D_2, \dots, x_k, D_k, x_{k+1}$ adalah jalan pada hipergraf. Diketahui *anchor* flag $(x_1, D_1), (x_2, D_1), (x_2, D_2) \dots, (x_k, D_k), (x_{k+1}, D_k)$. *Trail* adalah barisan *anchor* flag yang semuanya berbeda. Jika titik $x_1 = x_{k+1}$ maka *trail* dikatakan tertutup.

Contoh 2.3.13 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ seperti pada Contoh 2.3.12.

Hipergraf pada contoh tersebut mempunyai jalan dari titik u ke v dan *trail* sebagai berikut:

1. Titik x_1 ke x_2, maka $W = x_1, D_1, x_2$ sehingga $k = 1$.
   Anchor flag $(x_1, D_1), (x_2, D_1)$ semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.
2. Titik x_1 ke x_3, maka $W = x_1, D_1, x_3$ sehingga $k = 1$.
   Anchor flag $(x_1, D_1), (x_3, D_1)$ semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.
3. Titik x_1 ke x_4, maka $W = x_1, D_1, x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 2$.
   Anchor flag $(x_1, D_1), (x_3, D_1)$, (x_3, D_2), (x_4, D_2) semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.
4. Titik x_1 ke x_5, maka $W = x_1, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 2$.
   Anchor flag $(x_1, D_1), (x_2, D_1)$, (x_2, D_3), (x_5, D_3) semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.
5. Titik x_2 ke x_3, maka $W = x_2, D_1, x_3$ sehingga $k = 1$.
   Anchor flag $(x_2, D_1), (x_3, D_1)$ semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.
6. Titik x_2 ke x_4, maka $W = x_2, D_1, x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 2$.

Anchor flag $(x_2, D_1), (x_3, D_1), (x_3, D_2), (x_4, D_2)$ semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.

7. Titik x_2 ke x_5, maka $W = x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 1$.
   Anchor flag $(x_2, D_3), (x_5, D_3)$ semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.
8. Titik x_3 ke x_4, maka $W = x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 1$.
   Anchor flag $(x_3, D_2), (x_4, D_2)$ semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.
9. Titik x_3 ke x_5, maka $W = x_3, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 2$.
   Anchor flag $(x_3, D_1), (x_2, D_1)$, (x_2, D_3), (x_5, D_3) semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.
10. Titik x_4 ke x_5, maka $W = x_4, D_2, x_3, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 3$.
    Anchor flag $(x_4, D_2), (x_3, D_2), (x_3, D_1), (x_2, D_2), (x_2, D_3)$, (x_5, D_3) semuanya berbeda, sehingga W merupakan *trail*.

Definisi 2.3.13 (Bahmanian dan Sajna, 2015). Misalkan, $H = (X, D)$ adalah hipergraf dan $W = x_1, D_1, x_2, D_2, \dots, x_k, D_k, x_{k+1}$ adalah jalan pada hipergraf. Jika $D_i \neq D_j, i, j = 1,2, \dots, k$ maka W disebut *strict trail*. Jika titik $x_1 = x_{k+1}$ maka *strict trail* dikatakan tertutup.

Contoh 2.3.14 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ seperti pada Contoh 2.3.12

Hipergraf pada contoh tersebut mempunyai jalan dari titik u ke v, dan *strict trail* sebagai berikut:

1. Titik x_1 ke x_2, maka $W = x_1, D_1, x_2$ sehingga $k = 1$.
   Sisi D_1, sehingga W merupakan *strict trail*.
2. Titik x_1 ke x_3, maka $W = x_1, D_1, x_3$ sehingga $k = 1$.
   Sisi D_1, sehingga W merupakan *strict trail*.

3. Titik x_1 ke x_4, maka $W = x_1, D_1, x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 2$.
   Sisi D_1, sehingga W merupakan *strict trail*.
4. Titik x_1 ke x_5, maka $W = x_1, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 2$.
   Sisi $D_1 \neq D_3$, sehingga W merupakan *strict trail*.
5. Titik x_2 ke x_3, maka $W = x_2, D_1, x_3$ sehingga $k = 1$.
   Sisi D_1, sehingga W merupakan *strict trail*.
6. Titik x_2 ke x_4, maka $W = x_2, D_1, x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 2$.
   Sisi $D_1 \neq D_2$, sehingga W merupakan *strict trail*.
7. Titik x_2 ke x_5, maka $W = x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 1$.
   Sisi D_3, sehingga W merupakan *strict trail*.
8. Titik x_3 ke x_4, maka $W = x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 1$.
   Sisi D_2, sehingga W merupakan *strict trail*.
9. Titik x_3 ke x_5, maka $W = x_3, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 2$.
   Sisi $D_1 \neq D_3$, sehingga W merupakan *strict trail*.
10. Titik x_4 ke x_5, maka $W = x_4, D_2, x_3, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 3$.
    Sisi $D_2 \neq D_1 \neq D_3$, sehingga W merupakan *strict trail*.

Definisi 2.3.14 (Bahmanian dan Sajna, 2015). Misalkan, $H = (X, D)$ adalah hipergraf dan $W = x_1, D_1, x_2, D_2, \ldots, x_k, D_k, x_{k+1}$ adalah jalan pada hipergraf. Jika $D_i \neq D_j, i, j = 1,2, \ldots, k$ dan $x_i \neq x_j, i, j = 1,2, \ldots, k$ maka W disebut lintasan. Lintasan dengan titik $x_1 = x_{k+1}$ maka lintasan disebut *cycle*.

Contoh 2.3.15 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ seperti pada Contoh 2.3.12.

Hipergraf pada contoh tersebut mempunyai jalan dari titik u ke v, dan lintasan sebagai berikut:

1. Titik x_1 ke x_2, maka $W = x_1, D_1, x_2$ sehingga $k = 1$.
   Titik $x_1 \neq x_2$ dan sisi D_1, sehingga W merupakan lintasan.

2. Titik x_1 ke x_3, maka $W = x_1, D_1, x_3$ sehingga $k = 1$.
   Titik $x_1 \neq x_3$ dan sisi D_1, sehingga W merupakan lintasan.
3. Titik x_1 ke x_4, maka $W = x_1, D_1, x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 2$.
   Titik $x_1 \neq x_3 \neq x_4$ dan sisi D_1, sehingga W merupakan lintasan.
4. Titik x_1 ke x_5, maka $W = x_1, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 2$.
   Titik $x_1 \neq x_2 \neq x_5$ dan sisi $D_1 \neq D_3$, sehingga W merupakan lintasan.
5. Titik x_2 ke x_3, maka $W = x_2, D_1, x_3$ sehingga $k = 1$.
   Titik $x_2 \neq x_3$ dan sisi D_1, sehingga W merupakan lintasan.
6. Titik x_2 ke x_4, maka $W = x_2, D_1, x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 2$.
   Titik $x_2 \neq x_3 \neq x_4$ dan sisi $D_1 \neq D_2$, sehingga W merupakan lintasan.
7. Titik x_2 ke x_5, maka $W = x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 1$.
   Titik $x_2 \neq x_5$ dan sisi D_3, sehingga W merupakan lintasan.
8. Titik x_3 ke x_4, maka $W = x_3, D_2, x_4$ sehingga $k = 1$.
   Titik $x_3 \neq x_4$ dan sisi D_2, sehingga W merupakan lintasan.
9. Titik x_3 ke x_5, maka $W = x_3, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 2$.
   Titik $x_3 \neq x_2 \neq x_5$ dan sisi $D_1 \neq D_3$, sehingga W merupakan lintasan.
10. Titik x_4 ke x_5, maka $W = x_4, D_2, x_3, D_1, x_2, D_3, x_5$ sehingga $k = 3$.
    Titik $x_4 \neq x_3 \neq x_2 \neq x_5$ dan sisi $D_2 \neq D_1 \neq D_3$, sehingga W merupakan lintasan.

II.4 Hipergraf Klaster

Hipergraf klaster pertama kali diperkenalkan pada tahun 2020 oleh Samanta, Muhiuddin dkk. Hipergraf klaster adalah pengembangan dari hipergraf dimana sebuah sisi dapat menghubungkan lebih dari dua titik klaster.

Definisi 2.4.1 (Samanta, Lee dkk, 2020). Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $P(X)$ adalah himpunan semua subset dari X.

Himpunan V_X disebut titik klaster jika $V_X \subset P(X)$ sedemikian sehingga $\emptyset \notin V_X$.

Contoh 2.4.1 Diberikan himpunan titik X dan titik klaster V_X sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{ x_2, x_3\}, \{x_1, x_4\}\}$.

Definisi 2.4.2 (Samanta, Lee dkk, 2020). Misalkan V_X adalah titik klaster, titik maksimal adalah titik yang tidak terkandung dalam titik klaster lainnya. Notasi $\{V_i\}$ menyatakan bahwa V_i adalah titik maksimal.

Contoh titik maksimal dapat dilihat pada Contoh 2.4.2.

Definisi 2.4.3 (Samanta, Lee dkk, 2020). Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, setiap anggota dari X disebut titik sederhana. Titik sederhana dapat disebut sebagai titik maksimal jika tidak terkandung dalam titik klaster lainnya.

Contoh titik sederhana dapat dilihat pada Contoh 2.4.2.

Definisi 2.4.4 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan V_X adalah himpunan titik klaster. Misal E adalah himpunan sisi, $E \subset P(P(X))$ sedemikian sehingga:

- $X \notin E$.
- $\forall\, E_i \in E$, terdapat paling sedikit satu elemen $V_i \in V_X$ sedemikian sehingga $V_i \in E_i$.

Maka, $G = (V_X, E)$ disebut hipergraf klaster. Sisi pada hipergraf klaster dapat menghubungkan lebih dari dua titik.

Contoh 2.4.2 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

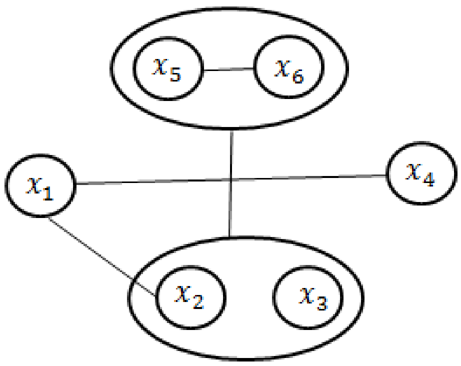
$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{\, x_2, x_3\}, \{x_5, x_6\}\}$

$E = \big\{\{\{x_1\}, \{x_2\}\}, \{\{x_1\}, \{x_4\}\}, \{\{\, x_2, x_3\}, \{x_2\}\}, \{\{\, x_2, x_3\}, \{x_3\}\}$

$\{\{x_5\}, \{x_6\}\}, \{\{x_5, x_6\}, \{x_5\}\}, \{\{x_5, x_6\}, \{x_6\}\}, \{\{\, x_2, x_3\}, \{x_5, x_6\}\}\big\}$

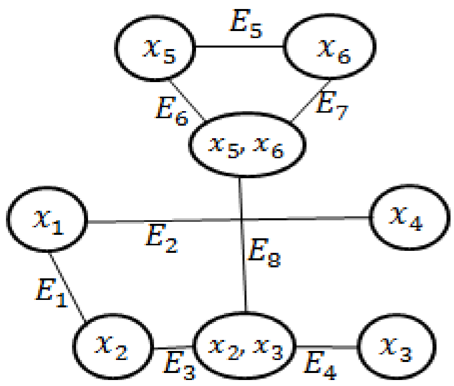
$= \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8\}.$

Hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.4-1 Hipergraf klaster G

Hipergraf klaster pada gambar diatas mempunyai klaster atau titik maksimal yaitu $\{x_1\}, \{x_2, x_3\}$,$\{x_4\}$ dan $\{x_5, x_6\}$. Titik $\{x_2\}, \{x_3\}, \{x_5\}$ dan $\{x_6\}$ bukan titik maksimal karena termuat pada titik klaster lainnya. Titik $\{x_1\}$ dan $\{x_4\}$ merupakan titik sederhana sekaligus titik maksimal sedangkan titik $\{x_2, x_3\}$ dan $\{x_5, x_6\}$ merupakan titik maksimal tapi bukan titik sederhana karena $\{x_2, x_3\} \notin X$ dan $\{x_5, x_6\} \notin X$.



Gambar 2.4-2 Representasi virtual hipergraf klaster G

Definisi 2.4.5 (A. Maity, K. Das dkk, 2021). Derajat dari suatu titik $V \in V_x$ pada hipergraf klaster $G = \{V_x, E\}$, dinotasikan $d(V)$ adalah banyaknya sisi $E_i \in E$ sedemikian sehingga $V \in E_i$ pada representasi virtual hipergraf klaster.

Contoh 2.4.3 Diberikan reprsentasi virtual hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ seperti pada Gambar 2.4-2.

Derajat dari titik pada hipergraf klaster adalah sebagai berikut:

1. $d(\{x_1\}) = 2$ karena $\{x_1\} \in E_i, i = 1,2$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_1\}$.
2. $d(\{x_2\}) = 2$ karena $\{x_2\} \in E_i, i = 1,3$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_2\}$.
3. $d(\{x_3\}) = 1$ karena $\{x_3\} \in E_4$. Jadi, hanya terdapat satua sisi memuat titik $\{x_3\}$.
4. $d(\{x_2, x_3\}) = 3$ karena $\{x_2, x_3\} \in E_i, i = 3,4,8$. Jadi, terdapat tiga sisi memuat titik $\{x_2, x_3\}$.
5. $d(x_5) = 1$ karena $\{x_5\} \in E_2$. Jadi, hanya terdapat satu sisi memuat titik $\{x_5\}$.
6. $d(x_6) = 2$ karena $\{x_6\} \in E_i, i = 5,6$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_6\}$.

7. $d(x_7) = 2$ karena $\{x_7\} \in E_i, i = 5{,}7$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_7\}$.
8. $d(\{x_6, x_7\}) = 3$ karena $\{x_6, x_7\} \in E_i, i = 6{,}7{,}8$. Jadi, terdapat tiga sisi memuat titik $\{x_6, x_7\}$.

Definisi 2.4.6 (A. Maity, K. Das dkk, 2021). Ukuran dari suatu sisi $E_i \in E$ pada hipergraf klaster $G = \{V_x, E\}$, dinotasikan $k(E_i)$ adalah banyaknya titik $V \in V_x$ sedemikian sehingga $V \in E_i$.
Sisi pada hipergraf klaster ini hanya ditinjau pada sisi yang menghubungkan titik maksimal.

Contoh 2.4.4 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ seperti pada Contoh 2.4-2.

Sisi yang menghubungkan titik maksimal yaitu sisi E_2 dan E_8 maka ukuran sisi pada hipergraf klaster adalah sebagai berikut:

1. $k(E_2) = 2$ karena $\big\{\{x_1\}, \{x_4\}\big\} \in E_2$. Jadi, terdapat dua titik maksimal yang termuat pada sisi E_2.
2. $k(E_8) = 2$ karena $\{\{ x_2, x_3\}, \{x_5, x_6\}\} \in E_8$. Jadi, terdapat dua titik maksimal yang termuat pada sisi E_8.

Definisi 2.4.7 (Samanata, Lee, dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jalan dari titik u ke v dengan panjang k adalah barisan $\{x_1\}, E_1, \{x_2\}, E_2, \ldots, \{x_k\}, E_k, \{x_{k+1}\}$ dengan $x_1 = u$ dan $x_{i+1} = v$ dari titik maksimal dan sisi sedemikian sehingga $\{x_i, x_{i+1}\} \in E_i, i = 1,2, \ldots., k$ dapat berulang.

Contoh 2.4.5 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

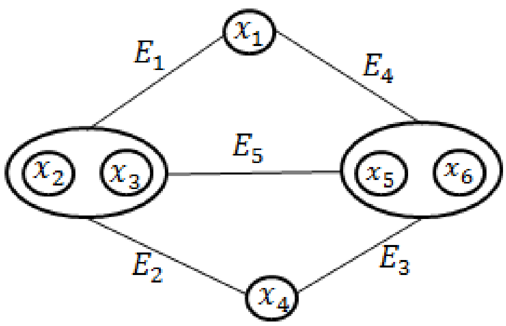
$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_2, x_3\}, \{x_5, x_6\}\}$

$E = \{\{\{x_1\},\{x_2,x_3\}\},\{\{x_2,x_3\},\{x_4\}\},\{\{x_4\},\{x_5,x_6\}\},$

$\{\{x_2,x_3\},\{x_5,x_6\}\}\}$

$= \{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}.$

Hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.4-3 Hipergraf klaster G

Hipergraf klaster seperti pada gambar diatas mempunyai klaster sekaligus titik maksimal yaitu $\{x_1\},\{x_2,x_3\}$,$\{x_4\}$ dan $\{x_5,x_6\}$. Hipergraf klaster pada gambar diatas mempunyai jalan dari titik u ke v sebagai berikut:

1. Titik maksimal $\{x_1\}$ ke $\{x_2,x_3\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_1\},E_1,\{x_2,x_3\}$ maka $k = 1$.
   b. Jalan $\{x_1\}$, $E_4,\{x_5,x_6\},E_5,\{x_2,x_3\}$ maka $k = 2$.
   c. Jalan $\{x_1\}$, $E_4,\{x_5,x_6\},E_3,\{x_4\},E_2,\{x_2,x_3\}$ maka $k = 3$.
2. Titik maksimal $\{x_1\}$ ke $\{x_4\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_1\},E_1,\{x_2,x_3\},E_2,\{x_4\}$ maka $k = 2$.
   b. Jalan $\{x_1\},E_4,\{x_5,x_6\},E_3,\{x_4\}$ maka $k = 2$.
   c. Jalan $\{x_1\},E_2,\{x_2,x_3\},E_5,\{x_5,x_6\},E_3,\{x_4\}$ maka $k = 3$.
   d. Jalan $\{x_1\},E_4,\{x_5,x_6\},E_5,\{x_2,x_3\},E_2,\{x_4\}$ maka $k = 3$.

3. Titik maksimal $\{x_1\}$ ke $\{x_5, x_6\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 1$.
   b. Jalan $\{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 2$.
   c. Jalan $\{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 3$.
4. Titik maksimal $\{x_2, x_3\}$ ke $\{x_4\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}$ maka $k = 1$.
   b. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}$ maka $k = 2$.
   c. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_1, \{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}$ maka $k = 3$.
5. Titik maksimal $\{x_2, x_3\}$ ke $\{x_5, x_6\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 1$.
   b. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_1, \{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 2$.
   c. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 2$.
6. Titik maksimal $\{x_4\}$ ke $\{x_5, x_6\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 1$.
   b. Jalan $\{x_4\}, E_2, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 2$.
   c. Jalan $\{x_4\}, E_2, \{x_2, x_3\}, E_1, \{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 3$.

Definisi 2.4.8 (Samanata, Lee, dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster dan $\{x_1\}, E_1, \{x_2\}, E_2, \dots, \{x_k\}, E_k, \{x_{k+1}\}$ adalah jalan pada hipergraf klaster. Jika $E_i \neq E_j, \forall i, j \in \{1,2, \dots, k\}$ dan $\{x_i\} \neq \{x_{i+1}\}$ maka jalan disebut lintasan. Lintasan dengan titik $\{x_1\} = \{x_{k+1}\}$ disebut *cycle*.

Contoh 2.4.6 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ seperti pada Contoh 2.4.5.

Hipergraf pada gambar diatas mempunyai jalan dari titik u ke v dan lintasan sebagai berikut:

1. Titik maksimal $\{x_1\}$ ke $\{x_2, x_3\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}$ maka $k = 1$.
      Titik $\{x_1\} \neq \{x_2, x_3\}$ dan sisi E_1, sehingga jalan merupakan lintasan.
   b. Jalan $\{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}, E_5, \{x_2, x_3\}$ maka $k = 2$.
      Titik $\{x_1\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_2, x_3\}$ dan sisi $E_4 \neq E_5$, sehingga jalan merupakan lintasan.
   c. Jalan $\{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}, E_2, \{x_2, x_3\}$ maka $k = 3$.
      Titik $\{x_1\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_4\} \neq \{x_2, x_3\}$ dan sisi $E_4 \neq E_3 \neq E_2$, sehingga jalan merupakan lintasan.
2. Titik maksimal $\{x_1\}$ ke $\{x_4\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}$ maka $k = 2$.
      Titik $\{x_1\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_4\}$ dan sisi $E_1 \neq E_2$, sehingga jalan merupakan lintasan.
   b. Jalan $\{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}$ maka $k = 2$.
      Titik $\{x_1\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_4\}$ dan sisi $E_4 \neq E_3$, sehingga jalan merupakan lintasan.
   c. Jalan $\{x_1\}, E_2, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}$ maka $k = 3$.
      Titik $\{x_1\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_4\}$ dan sisi $E_2 \neq E_5 \neq E_3$, sehingga jalan merupakan lintasan.
   d. Jalan $\{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}, E_5, \{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}$ maka $k = 3$.
      Titik $\{x_1\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_4\}$ dan sisi $E_4 \neq E_5 \neq E_2$, sehingga jalan merupakan lintasan.
3. Titik maksimal $\{x_1\}$ ke $\{x_5, x_6\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.
   a. Jalan $\{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 1$.
      Titik $\{x_1\} \neq \{x_5, x_6\}$ dan sisi E_4, sehingga jalan merupakan lintasan.

b. Jalan $\{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 2$.

Titik $\{x_1\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_5, x_6\}$ dan sisi $E_1 \neq E_5$, sehingga jalan merupakan lintasan.

c. Jalan $\{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 3$.

Titik $\{x_1\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_4\} \neq \{x_5, x_6\}$ dan sisi $E_1 \neq E_2 \neq E_3$, sehingga jalan merupakan lintasan.

4. Titik maksimal $\{x_2, x_3\}$ ke $\{x_4\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.

a. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}$ maka $k = 1$.

Titik $\{x_2, x_3\} \neq \{x_4\}$ dan sisi E_2, sehingga jalan merupakan lintasan.

b. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}$ maka $k = 2$.

Titik $\{x_2, x_3\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_4\}$ dan sisi $E_5 \neq E_3$, sehingga jalan merupakan lintasan.

c. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_1, \{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}$ maka $k = 3$.

Titik $\{x_2, x_3\} \neq \{x_1\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_4\}$ dan sisi $E_1 \neq E_4 \neq E_3$, sehingga jalan merupakan lintasan.

5. Titik maksimal $\{x_2, x_3\}$ ke $\{x_5, x_6\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.

a. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 1$.

Titik $\{x_2, x_3\} \neq \{x_5, x_6\}$ dan sisi E_5, sehingga jalan merupakan lintasan.

b. Jalan$\{x_2, x_3\}, E_1, \{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 2$.

Titik $\{x_2, x_3\} \neq \{x_1\} \neq \{x_5, x_6\}$ dan sisi $E_1 \neq E_4$, sehingga jalan merupakan lintasan.

c. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 2$.

Titik $\{x_2, x_3\} \neq x_9 \neq \{x_5, x_6\}$ dan sisi $E_2 \neq E_3$, sehingga jalan merupakan lintasan.

6. Titik maksimal $\{x_4\}$ ke $\{x_5, x_6\}$, maka dapat melalui beberapa jalan berikut.

a. Jalan $\{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 1$.
   Titik $\{x_4\} \neq \{x_5, x_6\}$ dan sisi E_3, sehingga jalan merupakan lintasan.
b. Jalan $\{x_4\}, E_2, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 2$.
   Titik $\{x_4\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_5, x_6\}$dan sisi $E_2 \neq E_5$, sehingga jalan merupakan lintasan.
c. Jalan $\{x_4\}, E_2, \{x_2, x_3\}, E_1, \{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 3$.
   Titik $\{x_4\} \neq \{x_2, x_3\} \neq x_3 \neq \{x_5, x_6\}$ dan sisi $E_2 \neq E_1 \neq E_4$, sehingga jalan merupakan lintasan.

Hipergraf pada gambar diatas mempunyai *cycle* sebagai berikut:

1. Jalan $\{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}, E_4, \{x_1\}$ maka $k = 3$.
   Titik $\{x_1\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_5, x_6\}$, sisi $E_1 \neq E_5 \neq E_4$dan $\{x_1\} = \{x_1\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.
2. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_1, \{x_1\}, E_4, \{x_5, x_6\}, E_5, \{x_2, x_3\}$ maka $k = 3$.
   Titik $\{x_2, x_3\} \neq \{x_1\} \neq \{x_5, x_6\}$, sisi $E_2 \neq E_4 \neq E_5$ dan $\{x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.
3. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}, E_5, \{x_2, x_3\}$ maka $k = 3$.
   Titik $\{x_2, x_3\} \neq \{x_4\} \neq \{x_5, x_6\}$, sisi $E_2 \neq E_3 \neq E_5$ dan $\{x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.
4. Jalan $\{x_4\}, E_2, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}$ maka $k = 3$.
   Titik $\{x_4\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_5, x_6\}$, sisi $E_2 \neq E_5 \neq E_3$ dan $\{x_4\} = \{x_4\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.
5. Jalan $\{x_5, x_6\}, E_4, \{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 3$.
   Titik$\{x_5, x_6\} \neq \{x_1\} \neq \{x_2, x_3\}$, sisi $E_4 \neq E_1 \neq E_5$ dan $\{x_5, x_6\} = \{x_5, x_6\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.
6. Jalan $\{x_5, x_6\}, E_3, \{x_4\}, E_2, \{x_2, x_3\}, E_5, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 3$.
   Titik $\{x_5, x_6\} \neq \{x_4\} \neq \{x_2, x_3\}$, sisi $E_3 \neq E_2 \neq e_5$ dan $\{x_5, x_6\} = \{x_5, x_6\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.

7. Jalan $\{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}, E_4, \{x_1\}$ maka $k = 3$. Titik $\{x_1\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_4\} \neq \{x_5, x_6\}$, sisi $E_1 \neq E_2 \neq E_3 \neq E_4$ dan $\{x_1\} = \{x_1\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.
8. Jalan $\{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}, E_4, \{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}$ maka $k = 3$. Titik $\{x_2, x_3\} \neq \{x_4\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_1\}$, sisi $E_2 \neq E_3 \neq E_4 \neq E_1$ dan $\{x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.
9. Jalan $\{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}, E_4, \{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}$ maka $k = 4$. Titik $\{x_4\} \neq \{x_5, x_6\} \neq \{x_1\} \neq \{x_2, x_3\}$, sisi $E_3 \neq E_4 \neq E_1 \neq E_2$dan $\{x_4\} = \{x_4\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.
10. Jalan $\{x_5, x_6\}, E_4, \{x_1\}, E_1, \{x_2, x_3\}, E_2, \{x_4\}, E_3, \{x_5, x_6\}$ maka $k = 4$. Titik $\{x_5, x_6\} \neq \{x_1\} \neq \{x_2, x_3\} \neq \{x_4\}$, sisi $E_4 \neq E_1 \neq E_2 \neq E_3$dan $\{x_5, x_6\} = \{x_5, x_6\}$, sehingga jalan merupakan *cycle*.

Definisi 2.4.9 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika setiap sisi memuat m titik maksimal dan memuat n titik sederhana maka G disebut hipergraf klaster seragam-(m, n).

Contoh 2.4.7 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$

$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}, \{x_8\}, \{x_9\}, \{x_1, x_2, x_3\}$

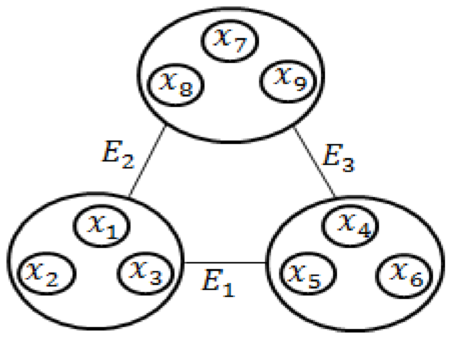
$\{x_4, x_5, x_6\}, \{x_7, x_8, x_9\}\}$

$E = \{\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\}, \big\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_7, x_8, x_9\}\big\}$

$\{\{x_4, x_5, x_6\}, \{x_7, x_8, x_9\}\}$

$= \{E_1, E_2, E_3\}$.

Hipergraf klaster seragam-(2,3) $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.4-4 Hipergraf klaster seragam-(2,3)

Titik maksimal dari hipergraf klaster diatas adalah $\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}$ dan $\{x_7, x_8, x_9\}$. Sisi pada hipergraf klaster seragam hanya ditinjau dari sisi yang menghubungkan antar titik maksimal. Karena setiap sisi menghubungkan tepat dua titik maksimal maka $m = 2$. Secara lengkap derajat setiap titik maksimal diuraikan sebagai berikut:

1. $d(\{x_1, x_2, x_3\}) = 2$ karena $\{x_1, x_2, x_3\} \in E_i, i = 1{,}2$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_1, x_2, x_3\}$.
2. $d(\{x_4, x_5, x_6\}) = 2$ karena $\{x_4, x_5, x_6\} \in E_i, i = 1{,}3$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_4, x_5, x_6\}$.
3. $d(\{x_7, x_8, x_9\}) = 2$ karena $\{x_7, x_8, x_9\} \in E_i, i = 2{,}3$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_7, x_8, x_9\}$.

Karena setiap sisi menghubungkan tepat dua titik maksimal, $m = 2$ dan karena setiap titik maksimal memuat tiga titik sederhana maka $n = 3$. Maka hipergraf klaster pada Gambar 2.4-4 merupakan Hipergraf klaster seragam-(2,3).

Definisi 2.4.10 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika setiap sisi memuat m titik maksimal dan setiap klaster memuat titik sederhana yang banyaknya dapat berbeda-beda maka G disebut hipergraf klaster tidak seragam.

Contoh 2.4.8 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut:

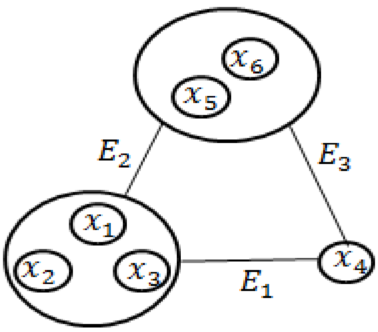
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_5, x_6\}\}$

$E = \{\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4\}, \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_5, x_6\}\}, \{\{x_4\}, \{x_5, x_6\}\}\}$

$\quad = \{E_1, E_2, E_3\}.$

Hipergraf klaster tidak seragam $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.

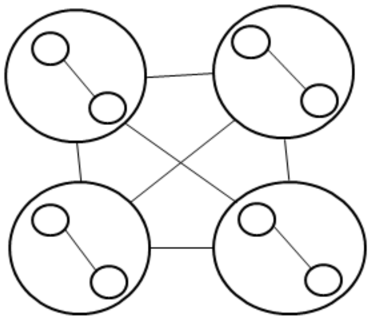


Gambar 2.4-5 Hipergraf klaster tidak seragam

Setiap sisi menghubungkan tepat dua titik maksimal. Dapat dilihat bahwa setiap titik maksimal memuat titik sederhana dengan jumlah yang berbeda-beda, pada titik maksimal $\{x_1, x_2, x_3\}$ memuat 3 titik sederhana, $\{x_5, x_6\}$ memuat 2 titik sederhana dan $\{x_4\}$ memuat 1 titik sederhana. Karena banyaknya titik sederhana pada setiap titik maksimal berbeda maka hipergraf klaster pada Gambar 2.4-5 merupakan hipergraf klaster tidak seragam.

Definisi 2.4.11 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika setiap titik maksimal dan titik sederhana dihubungkan oleh sebuah sisi maka G disebut hipergraf klaster lengkap.

Contoh 2.4.9 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ seperti pada gambar berikut:

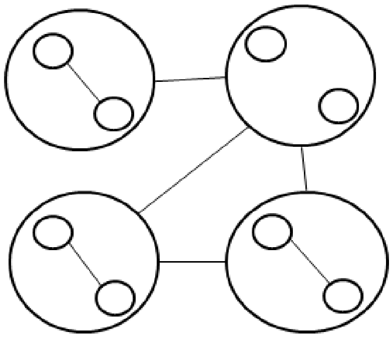


Gambar 2.4-6 Hipergraf klaster lengkap

Pada gambar diatas setiap titik maksimal dihubungkan oleh suatu sisi begitu pula dengan titik sederhananya. Sehingga berdasarkan Definisi 2.4.9 hipergraf klaster tersebut merupakan hipergrfa klaster lengkap.

Definisi 2.4.12 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika terdapat titik maksimal dan atau titik sederhana yang tidak dihubungkan oleh sebuah sisi maka G disebut hipergraf klaster tidak lengkap.

Contoh 2.4.10 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.4-7 Hipergraf klaster lengkap

Pada gambar diatas terdapat titik maksimal yang tidak dihubungkan oleh sebuah sisi begitu pula dengan titik sederhananya. Sehingga berdasarkan Definisi 2.4.10 hipergraf klaster tersebut merupakan hipergrfa klaster tidak lengkap.

Definisi 2.4.13 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_X, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika setiap sisi hanya menghubungkan titik maksimal maka G disebut hipergraf klaster terhubung klaster.

Contoh 2.4.11 Diberikan hipergraf klaster terhubung klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut:

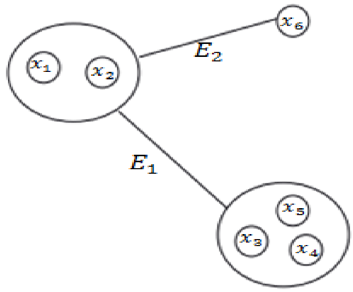
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$

$E = \Big\{\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}, \{\{x_1, x_2\}, \{x_6\}\}\Big\}$

$\quad = \{E_1, E_2\}.$

Hipergraf klaster terhubung klaster $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.4-8 Hipergraf klaster terhubung klaster

Titik maksimal pada hipergraf klaster terhubung klaster adalah $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}$ dan $\{x_6\}$. Sisi E_1 menghubungkan titik $\{x_1, x_2\}$ dengan titik $\{x_3, x_4, x_5\}$ dan sisi E_2 menghubungkan titik $\{x_1, x_2\}$ dengan titik $\{x_6\}$.

Definisi 2.4.14 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_X, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika setiap dua titik maksimal dihubungkan oleh sebuah sisi maka G disebut hipergraf klaster terhubung klaster lengkap.

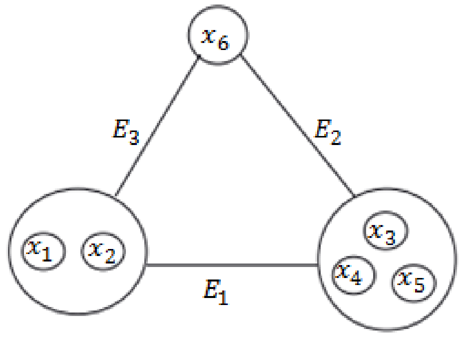
Contoh 2.4.12 Diberikan hipergraf klaster terhubung klaster lengkap $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$,

$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_8\}, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$
$E = \{\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}, \{\{x_3, x_4, x_5\}, \{x_6\}\}, \{\{x_1, x_2\}, \{x_6\}\}\}$

$= \{E_1, E_2, E_3\}$.

Hipergraf klaster terhubung klaster lengkap $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.4-9 Hipergraf klaster terhubung klaster lengkap

Titik maksimal pada hipergraf klaster terhubung klaster adalah $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}$ dan $\{x_6\}$. Titik $\{x_1, x_2\}$ dengan titik $\{x_3, x_4, x_5\}$ dihubungkan oleh sisi E_1. Titik $\{x_3, x_4, x_5\}$ dengan titik $\{x_6\}$ dihubungkan oleh sisi E_2. Dan titik $\{x_1, x_2\}$ dengan titik $\{x_6\}$ dihubungkan oleh sisi E_3.

Definisi 2.4.15 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster seragam-(m, n). Jika setiap sisi memuat m titik maksimal dan memuat n titik sederhana yang saling terhubung maka G disebut hipergraf klaster seragam lengkap-(m, n).

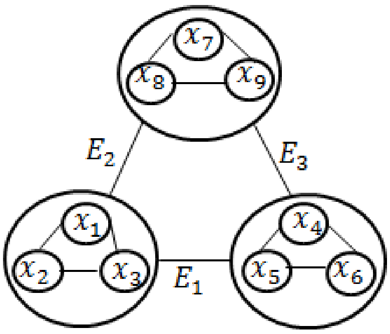
Contoh 2.4.13 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$$

$$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}, \{x_8\}, \{x_9\}, \{x_1, x_2, x_3\},$$
$$\{x_4, x_5, x_6\}, \{x_7, x_8, x_9\}\}$$

$$E = \{\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\}, \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_7, x_8, x_9\}\}$$
$$\{\{x_4, x_5, x_6\}, \{x_7, x_8, x_9\}\}\}$$
$$= \{E_1, E_2, E_3\}.$$

Hipergraf klaster seragam lengkap -(2,3) $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.4-10 Hipergraf klaster seragam lengkap-(2,3)

Titik maksimal dari hipergraf klaster diatas adalah $\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}$ dan $\{x_7, x_8, x_9\}$. Sisi pada hipergraf klaster seragam hanya ditinjau dari sisi yang menghubungkan antar titik maksimal. Karena setiap sisi menghubungkan tepat 2 titik maka $m = 2$. Secara lengkap derajat setiap titik maksimal diuraikan sebagai berikut:

1. $d(\{x_1, x_2, x_3\}) = 2$ karena $\{x_1, x_2, x_3\} \in E_i, i = 1,2$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_1, x_2, x_3\}$.
2. $d(\{x_4, x_5, x_6\}) = 2$ karena $\{x_4, x_5, x_6\} \in E_i, i = 1,3$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_4, x_5, x_6\}$.
3. $d(\{x_7, x_8, x_9\}) = 2$ karena $\{x_7, x_8, x_9\} \in E_i, i = 2,3$. Jadi, terdapat dua sisi memuat titik $\{x_7, x_8, x_9\}$.

Karena setiap sisi menghubungka tepat dua titik maka, $m = 2$ dan karena setiap titik maksimal memuat tiga titik sederhana maka $n = 3$. Dapat diperhatikan bahwa setiap dua titik sederhana yang termuat dalam titik maksimal dihubungkan oleh sebuah sisi. Maka hipergraf klaster pada Gambar 2.4-10 merupakan Hipergraf klaster seragam lengkap-(2,3).

Definisi 2.4.16 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika setiap sisi memuat m titik maksimal dan setiap klasternya memuat titik sederhana yang benyaknnya dapat berbeda-beda yang saling terhubung maka G disebut hipergraf klaster tidak seragam namun lengkap.

Contoh 2.4.14 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}, \{x_1, x_2\},$

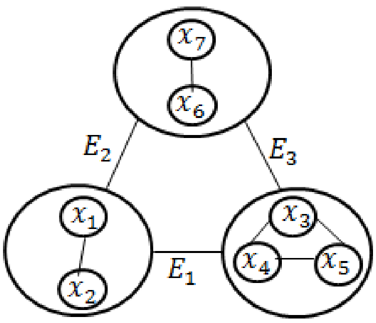
$\{x_3, x_4, x_5\}, \{x_6, x_7\}\}$

$E = \big\{\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}\big\}, \big\{\{x_1, x_2\}, \{x_6, x_7\}\big\},$

$\{\{x_3, x_4, x_5\}, \{x_6, x_7\}\}\}$

$= \{E_1, E_2, E_3\}.$

Hipergraf klaster tidak seragam namun lengkap $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.4-11 Hipergraf klaster tidak seragam namun lengkap

Dapat diperhatikan pada gambar hiperrgaf klaster diatas, setiap titik maksimal memuat titik sederhana yang banyaknya berbeda-beda. Namun, setiap sisi menghubungkan titik maksimal dan titik sederhana. Oleh karena itu, hipergraf klaster pada Gambar 2.4-11 merupakan hipergaf klaster tidak seragam namun lengkap.

Definisi 2.4.17 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika terdapat titik maksimal dan atau titik sederhana yang tidak dihubungkan oleh sebuah sisi, dengan kardinalitas titik maksimal sama dengan kardinalitas titik sederhana yang termuat pada setiap titik maksimalnya maka G disebut hipergraf klaster seragam namun tidak lengkap.

Contoh 2.4.15 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$

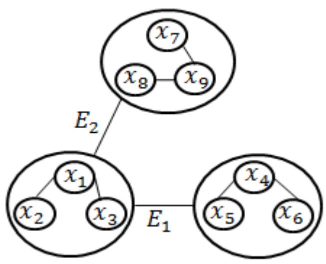
$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}, \{x_8\}, \{x_9\}, \{x_1, x_2, x_3\},$

$\{x_4, x_5, x_6\}, \{x_7, x_8, x_9\}\}$

$E = \big\{\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\big\}, \big\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_7, x_8, x_9\}\big\}$

$= \{E_1, E_2\}.$

Hipergraf klaster seragam namun tidak lengkap $G = (V_X, E)$ dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.4-12 Hipergraf klaster seragam namun tidak lengkap

Pada gambar hipergraf klaster diatas, jumlah titik maksimal seragam dengan jumlah titik sederhana untuk suatu titik maksimal. Namun, terdapat titik maksimal maupun titik sederhana yang tidak dihubungkan oleh sisi. Maka, hipergraf klaster pada Gambar 2.4-12 merupakan hipergraf klaster seragam namun tidak lengkap.

Definisi 2.4.18 (Samanta, Muhiuddin dkk, 2020). Misalkan $G = \{V_x, E\}$ adalah hipergraf klaster. Jika terdapat titik maksimal dan atau titik sederhana yang tidak dihubungkan oleh sebuah sisi dengan jumlah titik sederhana berbeda-beda maka G disebut hipergraf klaster tidak seragam lengkap.

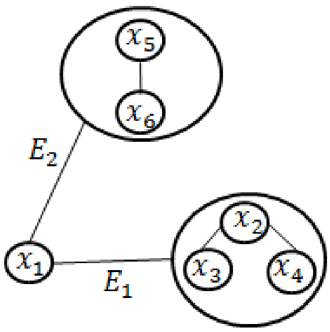
Contoh 2.4.16 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}\}$$

$$E = \{\{\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}, \{\{x_1\}, \{x_5, x_6\}\}\}$$

$$= \{E_1, E_2\}.$$



Gambar 2.4-13 Hipergraf klaster tidak seragam lengkap

Pada gambar hipergraf klaster diatas, jumlah titik sederhana berbeda-beda setiap titik maksimalnya. Kemudian, terdapat titik maksimal maupun titik sederhana yang tidak dihubungkan oleh sisi.

Maka, hipergraf klaster pada Gambar 2.4-13 merupakan hipergraf klaster tidak seragam lengkap.

II.5 Pewarnaan Hipergraf

Penelitian mengenai hipergraf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pewarnaan hipergraf. Dalam subbab ini, akan dibahas definisi pewarnaan biasa dan pewarnaan kuat pada hipergraf.

Definisi 2.5.1 (Berge, 1989). Misalkan $H = (X, D)$ adalah hipergraf dan misalkan himpunan $P = \{S_j, j = 1,2, \dots, k, S_j \subset X\}$ adalah partisi dari X. Pewarnaan-k (titik) adalah pewarnaan partisi sedemikian sehingga jika $S_j \in P, j = 1,2, \dots, k$, maka:

- S_j mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $j = 1,2, \dots, k$ dengan $k \geq 2$.
- $|D_i|$ >1.
- $D_i \not\subset S_j$ untuk setiap i dan j.

Untuk hipergraf H, bilangan bulat terkecil k dimana H memuat pewarnan-k disebut bilangan kromatik, dinotasikan $\chi(H)$. Himpunan P dikatakan stabil jika $|D_i|$ >1 maka $D_i \not\subset S_j$. Kardinalitas maksimum dari himpunan stabil disebut bilangan stabilitas, dinotasikan $\alpha(H)$.

Contoh 2.5.1 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

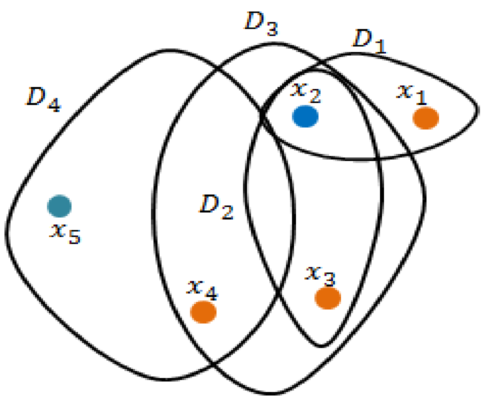
$$D = \left\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}\right\}$$

$$= \{D_1, D_2, D_3, D_4\}.$$

Partisi yang dibentuk adalah P $= \{\{x_2, x_5\},\{x_1, x_3, x_4\}\} = \{S_1, S_2\}$ sedemikian sehingga $D_i \not\subset S_j$ diuraikan secara lengkap sebagai berikut:

1. $D_1 \not\subset S_j, j = 1{,}2$:
   $D_1 \not\subset S_1 = \{x_1, x_2\} \not\subset \{x_2, x_5\}$ dan $D_1 \not\subset S_2 = \{x_1, x_2\} \not\subset \{x_1, x_3, x_4\}$.
2. $D_2 \not\subset S_j, j = 1{,}2$:
   $D_2 \not\subset S_1 = \{x_2, x_3\} \not\subset \{x_2, x_5\}$ dan $D_2 \not\subset S_2 = \{x_2, x_3\} \not\subset \{x_1, x_3, x_4\}$
3. $D_3 \not\subset S_j, j = 1{,}2$:
   $D_3 \not\subset S_1 = \{x_2, x_3, x_4\} \not\subset \{x_2, x_5\}$ dan $D_3 \not\subset S_2 = \{x_2, x_3, x_4\} \not\subset \{x_1, x_3, x_4\}$
4. $D_4 \not\subset S_j, j = 1{,}2$:
   $D_4 \not\subset S_1 = \{ x_4, x_5\} \not\subset \{x_2, x_5\}$ dan $D_4 \not\subset S_2 = \{ x_4, x_5\} \not\subset \{x_1, x_3, x_4\}$

Hipergraf $H = (X, D)$ dan pewarnaannya dapat dilihat seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.5-1 Pewarnaan-2 pada Hipergraf H

Maka, titik x_2, x_5 diberi warna biru dan titik x_1, x_3, x_4 diberi warna orange. Bilangan kromatik dari hipergraf tersebut adalah dua atau

$\chi(H) = 2$. Dan dapat diperhatikan bahwa himpunan P stabil, sehingga bilangan stabilitas dari hipergraf adalah tiga, $\alpha(H) = 3$.

Definisi 2.5.2 (Vitaly, 2009). Misalkan $H = (X, D)$ adalah hipergraf dan misalkan himpunan $P = \{S_j, j = 1,2, \dots, k, S_j \subset X\}$ adalah partisi dari X. Pewarnaan kuat-k (titik) adalah pewarnaan partisi sedemikian sehingga jika $S_j \in P, j = 1,2, \dots, k$, maka:

- S_j mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $j = 1,2, \dots, k$ dengan $k \geq 2$.
- $|D_i|$ >1.
- $\left|D_j \cap S_i\right| \leq 1$, j = 1, 2, …, k untuk setiap i dan j.

Untuk hipergraf H, bilangan bulat terkecil k dimana H memuat pewarnan kuat-k disebut bilangan kromatik, dinotasikan $\gamma(H)$.

Contoh 2.5.2 Diberikan hipergraf $H = (X, D)$ dengan X dan D sebagai berikut:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$D = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_6\}, \{x_4, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$

$= \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

Partisi yang dibentuk adalah $P = \{\{x_1, x_6\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga $\left|D_i \cap S_j\right| \leq 1$ diuraikan secara lengkap sebagai berikut:

1. $\left|D_1 \cap S_j, j = 1, 2, 3, 4\right|$:
   $|D_1 \cap S_1| = |\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_6\}| = 1$, $|D_1 \cap S_2| = |\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_2, x_5\}| = 1$, $|D_1 \cap S_3| = |\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_3\}| = 1$ dan $|D_1 \cap S_4| = |\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_4\}| = 1$
2. $\left|D_2 \cap S_j, j = 1, 2, 3, 4\right|$:

$|D_2 \cap S_1| = |\{x_2, x_6\} \cap \{x_1, x_6\}| = 1, |D_2 \cap S_2| = |\{x_2, x_6\} \cap \{x_2, x_5\}| = 1, |D_2 \cap S_3| = |\{x_2, x_6\} \cap \{x_3\}| = 0$ dan $|D_2 \cap S_4| = |\{x_2, x_6\} \cap \{x_4\}| = 0$.

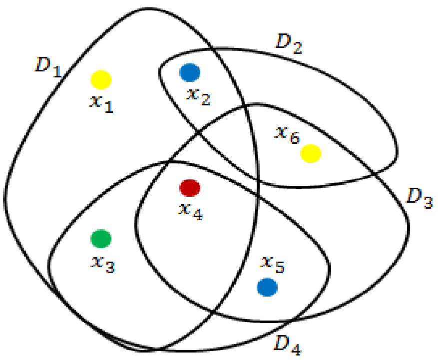
3. $\left|D_3 \cap S_j, j = 1, 2, 3, 4\right|$:

   $|D_3 \cap S_1| = |\{x_4, x_5, x_6\} \cap \{x_1, x_6\}| = 1, |D_3 \cap S_2| = |\{x_4, x_5, x_6\} \cap \{x_2, x_5\}| = 1, |D_3 \cap S_3| = |\{x_4, x_5, x_6\} \cap \{x_3\}| = 0$ dan $|D_3 \cap S_4| = |\{x_4, x_5, x_6\} \cap \{x_4\}| = 1$.

4. $\left|D_4 \cap S_j, j = 1, 2, 3, 4\right|$:

   $|D_4 \cap S_1| = |\{x_3, x_4, x_5\} \cap \{x_1, x_6\}| = 0, |D_4 \cap S_2| = |\{x_3, x_4, x_5\} \cap \{x_2, x_5\}| = 1, |D_4 \cap S_3| = |\{x_3, x_4, x_5\} \cap \{x_3\}| = 1$ dan $|D_4 \cap S_4| = |\{x_3, x_4, x_5\} \cap \{x_4\}| = 1$.

Hipergraf $H = (X, D)$ dan pewarnaannya dapat dilihat seperti gambar berikut.



Gambar 2.5-2 Pewarnaan Kuat-4 pada Hipergraf H

Maka, $\{x_1, x_6\}$ diberi warna kuning, $\{x_2, x_5\}$ diberi warna biru, $\{x_3\}$ diberi warna hijau dan $\{x_4\}$ diberi warna merah. Sehingga, $\gamma(H) = 4$.

II.6 Pewarnaan Hipergraf Klaster

Penelitian mengenai hipergraf klaster terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pewarnaan hipergraf klaster. Pada tahun 2020 Samanta, Lee dkk pertama kali memperkenalkan terkait pewarnaan hipergraf klaster.

Definisi 2.6.1 (Samanta, Lee dkk, 2020). Misalkan $G = (V_X, E)$ adalah hipergraf klaster dan misal k adalah bilangan bulat $\geq$ 2. Pewarnaan-k hipergraf klaster adalah memberi warna pada titik maksimal sedemikian sehingga setiap sisi yang menghubungkan dua atau lebih titik maksimal mempunyai minimal dua warna yang berbeda.

Untuk semua titik tidak maksimal diberikan warna yang serupa dengan titik maksimal yang memuatnya. Bilangan kromatik dari hipergraf klaster, adalah bilangan bulat k terkecil dimana hipergraf klaster memuat pewarnan, dinotasikan $\chi(G)$.

Contoh 2.6.1 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E sebagai berikut:

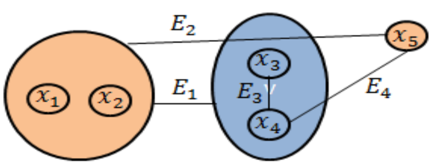
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$V_X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}$

$$E = \{\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}, \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5\}\}, \{\{x_3\}, \{x_4\}\}, \{\{x_4\}, \{x_5\}\}\}$$

$$= \{E_1, E_2, E_3, E_4\}.$$

Hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dan pewarnaannya dapat dilihat seperti gambar berikut.



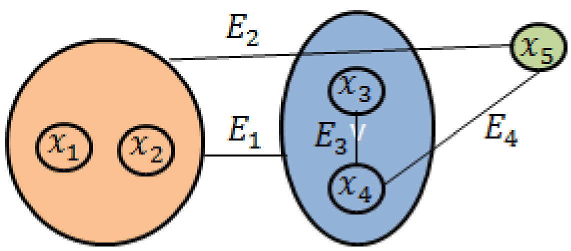
Gambar 2.6-1 Pewarnaan-2 pada Hipergraf Klaster G

Titik maksimal pada hipergraf klaster diatas adalah $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}$ dan $\{x_5\}$ sehingga sisi yang menghubungkan titik maksimal adalah $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = E_1$, maka $\{x_1, x_2\}$ dan $\{x_3, x_4\}$ diberi warna yang berbeda masing-masing orange dan biru. Titik sederhana yang termuat pada titik maksimal $\{x_1, x_2\}$ dan $\{x_3, x_4\}$ diberi warna yang serupa dengan titik maksimalnya. Sisi $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5\}\} = E_2$, maka $\{x_1, x_2\}$ dan $\{x_5\}$ diberi warna orange sedangkan $\{x_3, x_4\}$ diberi warna biru. Sehingga, $\chi(G) = 2$.

Definisi 2.6.2 (Samanta, Lee dkk, 2020). Misalkan, $G = (V_X, E)$ adalah hipergraf klaster dan misal k adalah bilangan bulat ≥ 2. Pewarnaan kuat-k adalah memberi warna pada titik maksimal sedemikian sehingga setiap sisi yang menghubungkan dua atau lebih titik maksimal mempunyai warna yang berbeda-beda.

Untuk semua titik tidak maksimal diberikan warna yang serupa dengan titik maksimal yang memuatnya. Bilangan kromatik dari hipergraf klaster, adalah bilangan bulat k terkecil dimana hipergraf klaster memuat pewarnan kuat, dinotasikan $\chi_s(G)$.

Contoh 2.6.2 Diberikan hipergraf klaster $G = (V_X, E)$ dengan V_X dan E seperti Contoh 2.6.1. Berikut diberikan gambar hipergraf klaster yang diwarnai dengan pewarnaan kuat.



Gambar 2.6-2 Pewarnaan kuat-3 pada Hipergraf Klaster G

Titik maksimal pada hipergraf klaster diatas adalah $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}$ dan $\{x_5\}$ sehingga sisi yang menghubungkan titik maksimal adalah $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = E_1$, maka $\{x_1, x_2\}$ dan $\{x_3, x_4\}$ diberi warna yang berbeda masing-masing orange dan biru. Titik sederhana yang termuat pada titik maksimal $\{x_1, x_2\}$ dan $\{x_3, x_4\}$ diberi warna yang serupa dengan titik maksimalnya. Sisi $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5\}\} = E_2$, diberi warna yang berbeda masing-masing orange, biru dan hijau. Sehingga, $\chi_s(G) = 3$.