

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL MODEL
PENYEBARAN RUMOR DENGAN WAKTU TUNDA**

SETIAWAN AHMAD ACOMARIO

H022202004



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

2023

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL MODEL
PENYEBARAN RUMOR DENGAN WAKTU TUNDA**

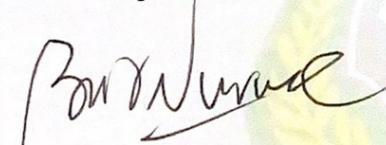
Disusun dan diajukan oleh

**SETIAWAN AHMAD ACOMARIO
H022202004**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 31 Oktober 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

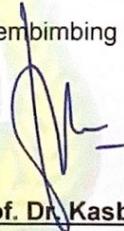
Menyetujui,

Pembimbing Utama,



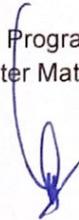
Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS
NIP. 19580802 198403 1 002

Pembimbing Pendamping,



Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si
NIP. 19800904 200312 2 001

Ketua Program Studi
Magister Matematika,



Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin,



Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.
NIP. 19720515 199702 1 002

**PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA**

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis yang berjudul "**Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Penyebaran Rumor dengan Waktu Tunda**" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** sebagai pembimbing utama dan **Kasbawati, S.Si., M.Si.**, sebagai pembimbing pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam daftar Pustaka tesis ini.

Dengan ini sayamelimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin

Makassar, 20 November 2023



Setiawan Ahmad Acomario
Setiawan Ahmad Acomario
H022202004

KATA PENGANTAR



Alhamdulillah Rabbil Alamin ucapan syukur penulis terhadap kehadiran Allah *Subhanahu Wa ta'ala Rabb* semesta alam. Karena atas limpahan rahmat, hidayah, dan kasih sayang-Nya, penulis masih diberikan kesempatan dan kesehatan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam juga tak henti-hentinya tercurah kepada Baginda Rasulullah *Shallallahu Alaihi Wasallam*, sebagai tauladan dalam mengarungi bahtera kehidupan dunia dan telah membawa Al-Qur'an sebagai pedoman dunia dan akhirat. "*Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan*" (QS. Al-Insyirah : 5-6).

Hanya dengan taufik dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Thesis yang berjudul "**Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Penyebaran Rumor dengan Waktu Tunda**" yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan. Dalam penulisan skripsi ini, penulis dengan segala keterbatasan, kemampuan, dan pengetahuan dapat melewati segala hambatan serta masalah berkat bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus dan tak terhingga kepada Ayahanda dan Ibunda tercinta, **Dr. Muh. Haras Rasyid, M.Ag** dan **Dra. Dalwiah**, yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kesabaran bertabur cinta dan kasih sayang serta dengan penuh ketulusan hati dan kesungguhan dalam memberikan dukungan moril serta doanya yang tak ternilai harganya demi keberhasilan penulis selama menjalani proses pendidikan. Tidak lupa pula penulis sampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** selaku pembimbing dan Ibu **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing pertama, terimakasih atas kesediaan, kesabaran, dan kesetiiaannya untuk membimbing dan menuntun penulis hingga menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma**, Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.**, dan Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
3. Teman-teman Angkatan Magister Matematika, terima kasih untuk semua kebersamaan dan ikatan persaudaraan yang telah terjalin.

Serta kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih untuk semuanya. Semoga apa yang telah dituliskan oleh penulis pada skripsi ini dapat bermanfaat bagi sesama.

Makassar, 20 November 2023

Setiawan Ahmad Acomario

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL.....	0
LEMBAR PENGESAHAN	i
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA	ii
KATA PENGANTAR.....	iii
DAFTAR ISI.....	v
ABSTRAK	vii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah.....	4
1.3. Tujuan Penelitian	4
1.4. Manfaat Penelitian	4
1.5. Batasan Masalah.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1. <i>Study Review</i> Model Penyebaran Rumor	5
2.2. Rumor	5
2.3. Pemodelan Matematika	6
2.4. Sistem Persamaan Diferensial.....	7
2.5. Titik Keseimbangan	8
2.6. Linearisasi	8
2.7. Analisis Kestabilan	9
2.8. Sistem Persamaan differensial tundaan.....	10
2.9. Eksistensi waktu tunda kritis.....	11
2.10. Kondisi Transversal	13
2.11. Masalah kontrol optimal dan syarat perlu keoptimalannya	14
2.12. Prinsip Minimum Pontryagin	18
2.13. Metode Forward-Backward Sweep.....	20
2.14. Masalah Kontrol Optimal dengan waktu tunda pada <i>state and control</i>	22
2.15. Syarat cukup kondisi optimal untuk ROCP	23
2.15. Model <i>Spreader-Debunker</i>	24
BAB III METODE PENELITIAN	27

3.1.	Identiifikasi Masalah	27
3.2.	Studi Literatur	27
3.3.	Formulasi Model Matematika Penyebaran Rumor	27
3.4.	Analisis Kestabilan	27
3.5.	Formulasi Model Kontrol Optimal	27
3.6.	Prinsip Minimum Pontryagin	27
3.7.	Simulasi Numerik	28
3.8.	Penarikan Kesimpulan	28
BAB IV	HASIL DAN PEMBAHASAN	29
4.1.	Model Penyebaran Rumor dengan waktu tunda dan kontrol	29
4.2.	Titik Keseimbangan Model Penyebaran Rumor	32
4.3.	Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan	35
4.4.	Masalah Kontrol Optimal Model Penyebaran Rumor	46
4.5.	Simulasi Numerik Model Penyebaran Rumor	48
BAB V	KESIMPULAN DAN SARAN	58
5.1	Kesimpulan	58
5.2	Saran	58
DAFTAR PUSTAKA	59

ABSTRAK

Penyebaran rumor melalui media sosial dianggap sebagai penyebaran penyakit. Menarik untuk mengkaji dinamika penyebaran rumor dengan mengadopsi skema model epidemiologi. Upaya pencegahan yang dilakukan pemerintah, seperti peningkatan literasi digital dan pemblokiran akun para penyebar rumor, juga dianggap sebagai fungsi kontrol. Waktu tunda dianggap sebagai waktu yang dibutuhkan oleh kelompok yang tadinya percaya pada suatu rumor berubah menjadi percaya pada anti rumor tersebut. Teori kontrol optimal dengan kendala persamaan diferensial waktu tunda diterapkan untuk mempelajari masalah tersebut guna memberikan gambaran pengaruh upaya pencegahan pemerintah dalam memitigasi penyebaran rumor. Model matematis penyebaran rumor dianalisis untuk mempelajari perilaku kestabilannya. Ditemukan empat titik kritis, dua di antaranya menunjukkan adanya masyarakat yang rentan terhadap rumor dan masyarakat penyebar anti rumor. Sedangkan dua titik kritis lainnya menunjukkan adanya penyebar rumor yang harus dibasmi. Penyebaran rumor juga tergantung pada lamanya waktu berpikir untuk mempercayai anti rumor. Waktu tunda yang lebih tinggi dari waktu tunda kritis menyebabkan ketidakstabilan penyebar rumor seperti yang diharapkan. Selanjutnya, keberadaan dan kondisi yang diperlukan untuk solusi sistem yang optimal diperoleh sehingga strategi kontrol mengurangi jumlah penyebar rumor. Simulasi numerik menunjukkan bahwa diantara kedua strategi kontrol tersebut, pemblokiran akun penyebar rumor lebih efektif dalam menurunkan jumlah penyebar rumor dibandingkan dengan literasi digital.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Banyak sistem, fisika, kimia, dan ekonomi, dapat dimodelkan dengan hubungan matematis, seperti persamaan diferensial deterministik dan/atau stokastik. Sistem ini kemudian berubah terhadap waktu atau variabel independen lainnya sesuai dengan hubungan dinamis. Dimungkinkan untuk mengarahkan sistem ini dari satu keadaan ke keadaan lain dengan penerapan beberapa jenis input atau kontrol eksternal. Suatu fenomena terjadi akibat respon dari dua atau lebih objek yang saling berinteraksi. Tetapi banyak dari respon ini membutuhkan waktu untuk merespon. Salah satu cara yang menggambarkan proses ini adalah dengan merumuskan *delay differential equation* (DDE) dimana evolusi variabel dependen pada waktu t bergantung pada nilainya pada waktu $t - \tau$. Salah satu fenomena fisiologis yg dapat digambarkan dalam DDE dan dapat dikontrol dengan suatu masukan eksternal adalah mengenai rumor yang menyebar.

Di dunia sekarang ini, media sosial online berperan penting dalam menyebarkan informasi. Dengan munculnya media sosial, pola, peran, dan pengaruh dari mulut ke mulut telah berkembang dan bentuk-bentuk komunitas baru telah muncul. Di era media sosial, berita dari mulut ke mulut bisa menyebar lebih cepat dan opini bisa menjadi lebih asintomatik. Ukuran, kecepatan, sifat real-time dari web sosial, dan peluang yang berkembang bagi orang-orang untuk berbagi dan mengekspresikan diri, semuanya memainkan peran utama dalam hal ini. Penyebaran informasi melalui media sosial adalah pedang bermata dua. Ini dapat digunakan oleh pihak berwenang untuk penyebaran informasi dan manajemen acara yang efektif, atau oleh entitas jahat untuk menyebarkan desas-desus dan berita palsu. Pada tahun 2019, Asosiasi Telematika Indonesia (Mastel) merilis hasil survei bahwa masyarakat Indonesia yang menerima berita hoax (berita palsu) setiap hari mencapai 34,60%. Menurut survei, 87,50% berita palsu menyebar melalui media sosial seperti Facebook, Instagram, Twitter, dan Youtube. Pesan lelucon yang sering diterima oleh responden antara lain pesan tentang masalah sosial politik (93,20%), disusul dengan pesan yang mengandung unsur SARA (76,20%). Proses survei dilakukan secara online dan dijawab oleh 941 responden. Menurut data Kementerian Komunikasi dan Informatika, Indonesia memiliki sekitar 800.000 situs yang diklaim menyebarkan informasi

palsu. Khususnya pada masa pandemi COVID-19, data Kementerian Komunikasi dan Informatika per 8 April 2020 adalah Facebook, Instagram, Twitter, dan Youtube. Sementara itu, sejak 30 Januari hingga 7 April 2020, Kepolisian Negara Republik Indonesia (POLRI) memproses 81 laporan palsu terkait Covid19 (Halim, 2020; Jiang, 2021; Mastel, 2019).

Fenomena penyebaran rumor jika dibiarkan akan berdampak negatif bagi masyarakat. Efek samping ini dapat mengambil bentuk berikut: (1) Pesan hoax yang menyulitkan masyarakat umum untuk mengkonfirmasi kebenaran informasi. (2) Terjadi kesalahpahaman dalam merusak persatuan dan kesatuan masyarakat. (3) Berusaha mengarahkan opini publik yang provokatif untuk mempengaruhi masyarakat. (4) Berita Hoaks disebarluaskan dengan tujuan untuk mengalahkan salah satu pihak dan menimbulkan konflik di antara orang-orang. (5) Berita hoaks juga dikatakan menimbulkan keresahan masyarakat. Oleh karena itu pemerintah melakukan beberapa upaya untuk menanggulangi hoaks (Maulana, 2017).

Pemerintah telah melakukan beberapa upaya untuk melawan maraknya berita bohong (hoax) di masyarakat. Dilaporkan oleh website kominfo.go.id Pemerintah Indonesia melalui Kementerian Komunikasi dan Informatika memberikan kepada para pelaku yang menyebarkan hoax terkait COVID-19 dan lainnya sebagai bagian dari gugus tugas percepatan penanganan COVID-19. Denda hingga 1 miliar. Dalam hal ini, pelaku penyebar hoax terjerat tindakan hukum dan dikenai sanksi yang diatur dalam Undang-Undang Nomor 11 Tahun 2008 tentang Transaksi Informasi dan Komunikasi (UU ITE). Inisiatif lain yang bisa dilakukan pemerintah adalah menggalakkan literasi digital. Orang dengan tingkat literasi rendah rentan terhadap laporan palsu. Hal ini ditunjukkan dengan sikap mereka yang tidak mengecek atau mengecek keaslian pesan. Masyarakat dapat dengan mudah menyebarkan berita tanpa mengetahui sumber yang sebenarnya dengan demikian, perlu adanya upaya pemerintah untuk mendorong literasi digital. Tentunya akan lebih baik jika pemerintah melakukan upaya-upaya tersebut semaksimal mungkin namun dalam melakukan upaya-upaya tersebut pemerintah membutuhkan biaya (Maulana, 2017; Witro, 2020).

Pemerintah perlu mempertimbangkan seberapa banyak upaya yang dilakukan pemerintah untuk menangani beredarnya berita palsu dengan memperhitungkan biaya yang dikeluarkan. Pemerintah harus mencari upaya optimal untuk menangani penyebaran berita palsu. Upaya optimal tersebut dapat

diketahui secara matematis dengan memakai teori kontrol optimal. Teori kontrol optimal telah banyak digunakan untuk menganalisis persamaan dinamik; masalah kontrol optimal dijelaskan dengan membuat suatu fungsi objektif untuk mengoptimalkan biaya dan efek kontrol.

Model matematika tentang penyebaran rumor menyerupai model penyebaran penyakit. Seseorang tidak dapat mengetahui rumor jika ia tidak mengetahui rumor yang disebarkan oleh yang lain. Salah satu model penyebaran rumor yang dikembangkan dari model penyebaran penyakit adalah yang dibahas oleh Zhao dkk (2012). Selanjutnya, Jiang (2021) membahas mengenai penyebaran rumor dengan menggunakan model *spreading-debunking* yang mempertimbangkan adanya penyebar anti-rumor. Adapun istilah-istilah dalam model penyebaran rumor adalah *Ignorant* yaitu Orang yang belum tahu tentang rumor maupun anti rumor, *Spreader* yaitu Orang yang menyebarkan rumor, *Debunker* yaitu Orang yang menyebarkan anti rumor, *Stifler* yaitu Orang yang mengetahui tentang rumor atau anti-rumor tetapi tidak menyebarkannya. Beberapa penelitian juga membahas masalah penyebaran rumor dengan tambahan kontrol. Penelitian tentang kontrol optimal yang membahas tentang penyebaran rumor antara lain Kandhway (2014) yang memformulasikan masalah penyebaran rumor dengan perspektif satu juru kampanye untuk memaksimalkan informasi ketika biaya kampanye tetap. Dhar dkk. (2016) mengkaji tentang penyebaran rumor dengan *media awareness* sebagai kontrol untuk meminimalkan penyebaran rumor. Huo dkk (2018) menjadikan pengetahuan ilmiah dan informasi resmi dari pemerintah sebagai kontrol untuk meminimalkan penyebaran rumor. Tidak hanya itu Huo dkk (2018) juga mempertimbangkan waktu tunda dalam modelnya yang diakibatkan seseorang tidak langsung merespon terhadap suatu rumor.

Model *spreading-debunking* yang digunakan oleh jiang (2021) belum memiliki unsur kontrol di dalamnya. Berdasarkan dampak yang bisa disebabkan oleh penyebaran rumor, penting untuk mengontrol laju penyebaran rumor, sehingga akan ditambahkan suatu fungsi kontrol pada model *spreading-debunking*. Selain itu, akan ditambahkan waktu tunda dengan mempertimbangkan waktu seorang individu untuk merespon suatu rumor. Penelitian mengenai penyebaran rumor menggunakan model *spreader-debunking* dengan waktu tunda menggunakan upaya penegakan aturan penyebaran rumor dan literasi digital

sebagai kontrol juga masih jarang dilakukan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dibahas mengenai penyebaran rumor menggunakan model *spreading-debunking* dengan waktu tunda dan kontrol yang dituliskan dalam tesis yang berjudul:

“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Penyebaran Rumor dengan Waktu Tunda”

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana pengaruh kontrol dan waktu tunda terhadap model penyebaran rumor?
2. Bagaimana Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika Penyebaran Rumor dengan Waktu Tunda dan kontrol?
3. Bagaimana mencari fungsi kontrol yang optimal dari model matematika Penyebaran Rumor dengan Waktu Tunda?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengembangkan model matematika penyebaran rumor dengan waktu tunda dan kontrol.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Penelitian ini diharapkan mampu memberikan gambaran dinamika penyebaran rumor
2. Hasil penelitian ini dapat membantu pembuat kebijakan dalam menangani masalah penyebaran rumor

1.5. Batasan Masalah

Rumor yang dibahas dalam penelitian ini adalah rumor berupa unggahan atau tulisan di media sosial.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. *Study Review Model Penyebaran Rumor*

Model klasik penyebaran rumor pertama kali dibahas dalam Daley dkk (1965). Model klasik tersebut diadopsi dari model epidemi dengan membagi populasi dalam tiga kompartemen yaitu; subpopulasi yang belum mendapatkan rumor atau informasi (rentan), subpopulasi penyebar rumor dan subpopulasi yang berhenti menyebarkan rumor (*stifler*). Subpopulasi rentan berkurang setelah mendapatkan informasi dari penyebar informasi. Zhao dkk (2012) membahas mengenai dampak otoritas media pada penyebaran rumor dalam keadaan darurat. Zhao dkk (2012) menemukan kriteria kestabilan untuk mencegah keadaan darurat semakin memburuk akibat penyebaran informasi yang dapat mengakibatkan kepanikan. Afassinou (2014) menganalisis dampak yang diberikan oleh tingkat pendidikan pada penyebaran rumor. Huo dkk (2016) membagi populasi menjadi *ignorant*, *spreaders*, *knowledgeble*, dan *unknowladgeable* dengan mempertimbangkan faktor pengetahuan saintifik pada populasi.

Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Li dkk. (2016) yang menambahkan waktu tunda. Model ini dianggap lebih realistis dengan mempertimbangkan efek lupa dari individu tentang suatu rumor. Model penyebaran rumor lain yang menambahkan waktu tunda adalah yang dibahas dalam Huo dkk. (2018) dengan mempertimbangkan waktu individu berpikir untuk kemudian menyebarkan rumor. Huo dkk. (2018) juga menambahkan pengetahuan ilmiah dan berita resmi sebagai kontrol dalam modelnya.

Adapun penelitian yang dibahas oleh Jiang dkk. (2021) menambahkan kompartemen penyebar anti-rumor (*debunker*) dalam modelnya dan membagi subpopulasi *stifler* menjadi dua subpopulasi yaitu *Stiflers_r* dan *Stiflers_d*. Secara khusus, *Stiflers_r* merujuk pada orang yang tahu tentang rumor tersebut tetapi tidak menyebarkannya, atau menyebarkannya sejak lama dan telah kehilangan pengaruhnya. Demikian pula, *Stiflers_d* berarti orang yang tahu tentang anti-rumor tetapi tidak memiliki pengaruh pada yang lain.

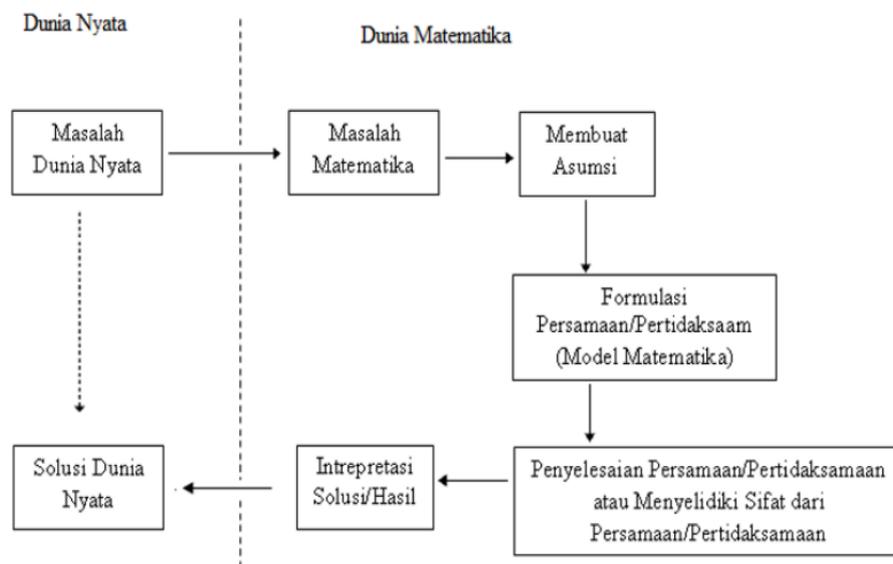
2.2. Rumor

Rumor adalah cerita panjang tentang peristiwa yang beredar dari orang ke orang dan terkait dengan objek, peristiwa, atau topik kepentingan umum. Rumor

merupakan salah satu bentuk komunikasi sosial yang dapat membentuk opini publik, mempengaruhi keyakinan individu, dan mengubah sikap individu terhadap masalah ekonomi, politik, dan sosial. Rumor adalah kebenaran yang belum dikonfirmasi dan memiliki dampak negatif pada masyarakat, tetapi langkah-langkah dapat diambil untuk meminimalkan dampak negatif. Oleh karena itu, memahami penyebaran rumor sangat penting untuk ilmu informasi yang lebih baik dan strategi mitigasi yang merugikan (Ndi, 2018; Jiang, 2021).

2.3. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan suatu studi tentang konsep matematika yang merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan di dunia nyata ke dalam pernyataan matematika. Proses pemodelan dapat dinyatakan dalam diagram alur yang disajikan pada Gambar 2.1 seperti berikut (Widowati & Sutimin, 2007).



Gambar 2.1 Proses pemodelan

sumber : Widowati & Sutimin, 2007

Keterangan gambar:

1. Menyatakan masalah di dunia nyata ke dalam matematika

Langkah pertama dalam pemodelan matematika adalah menyatakan masalah yang ada di dunia nyata ke dalam pengertian matematika. Langkah ini meliputi identifikasi variabel-variabel pada masalah dan membentuk beberapa hubungan antara variabel-variabel.

2. Membuat asumsi

Asumsi secara esensial mencerminkan proses berpikir seseorang sehingga model dapat berjalan. Oleh karena itu, jika kita dapat menghasilkan model, hasilnya hanya sevalid asumsi.

3. Formulasi persamaan/pertidaksamaan

Dengan asumsi dan pemahaman hubungan antara variabel-variabel, langkah selanjutnya yaitu membuat formulasi persamaan atau sistem persamaan untuk menyatakan hubungan tersebut. Formulasi model merupakan langkah paling penting, sehingga kadang perlu adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar langkah formulasi persamaan atau sistem persamaan sesuai sehingga dapat diselesaikan dan reliстик.

4. Menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan

Setelah model diformulasikan, langkah selanjutnya yaitu menyelesaikan persamaan tersebut secara matematis. Dalam menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan ini perlu hati-hati dan fleksibilitas dalam proses pemodelan secara menyeluruh.

5. Interpretasi solusi

Interpretasi model atau solusi merupakan suatu langkah yang menghubungkan formula matematika dengan kembali ke masalah dunia nyata. Interpretasi ini dapat diwujudkan dalam berbagai cara seperti grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh.

6. Membandingkan data

Perlu dilakukan perbandingan solusi dengan beberapa data yang diketahui dan dikumpulkan lalu menghubungkannya untuk merevikasi bahwa solusi telah merepresentasikan situasi nyata.

2.4. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah sebuah sistem yang terdiri atas dua atau lebih persamaan diferensial yang saling terhubung satu sama lain. Misalkan diberikan sebuah vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$. Jika notasi $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ digunakan untuk menyatakan turunan x terhadap t maka diperoleh

$$\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T \quad (2.1)$$

Misalkan diberikan sistem autonomous $\dot{x} = f(x)$ yaitu sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas t yang dinyatakan secara implisit, dengan $x \in L \subseteq \mathbb{R}^n, f: L \rightarrow \mathbb{R}^n, L$ adalah himpunan terbuka dan $f \in C^1(L)$, dengan C^1 merupakan notasi untuk himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di L , maka sistem $\dot{x} = f(x)$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.5. Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan atau solusi keseimbangan merupakan suatu kondisi dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Suatu titik $x^* \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik keseimbangan dari $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $f(x^*) = 0$, dengan (Wiggins, 1990)

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

atau dengan kata lain, jika $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ merupakan titik keseimbangan dari $\dot{x} = f(x)$, maka

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

2.6. Linearisasi

Linearisasi sistem di sekitar titik solusi keseimbangan bertujuan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik keseimbangan dengan menganalisis kestabilan sistem persamaan persamaan diferensial non linear.

Definisi 2.1 (Hale & Kocak, 1991) *Jika x^* merupakan titik keseimbangan dari $\dot{x} = f(x)$, maka persamaan diferensial linear*

$$\dot{x} = J(x^*)x \quad (2.5)$$

Disebut persamaan linearisasi dari vector field f pada titik keseimbangan x^ dimana $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ dan*

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$J(x^*)$ disebut sebagai matriks Jacobi dari f di titik x^* .

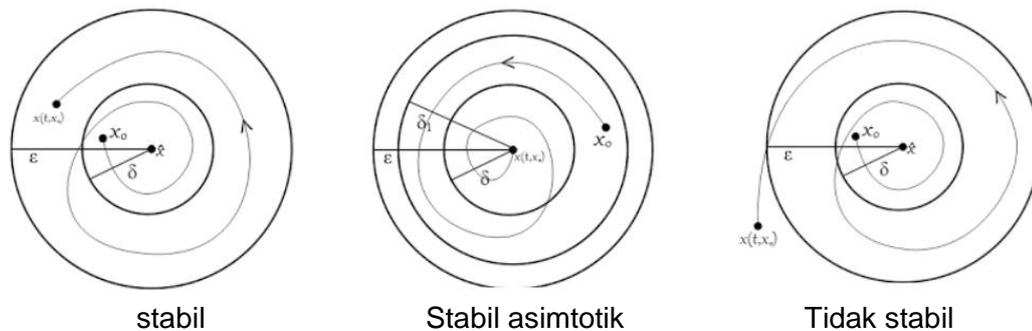
2.7. Analisis Kestabilan

Untuk mengetahui dinamika dari suatu populasi yang digambarkan oleh sistem persamaan differensial dapat dilakukan analisis kestabilan. Adapun definisi dari kestabilan dituliskan dalam Definisi 2.2 sebagai berikut,

Definisi 2.2 (Olsder & Woude, 2004) *Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ dan $x(t, x_0)$ adalah solusi persamaan $\dot{x} = f(x)$ pada saat t dengan nilai awal $x(0) = x_0$.*

- (i). Titik kesetimbangan \hat{x} dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta$ (dengan $\|\cdot\|$ adalah norm pada \mathbb{R}^n), maka $\|x(t, x_0) - \hat{x}\| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.
- (ii). Titik kesetimbangan \hat{x} dikatakan stabil asimtotik jika titik kesetimbangannya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \hat{x}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta_1$.
- (iii). Titik kesetimbangan \hat{x} dikatakan tidak stabil jika titik kesetimbangan tersebut tidak memenuhi (i).

Definisi 2.2 dapat diinterpretasikan oleh gambar 2.2



Gambar 2.1 Jenis Kestabilan

Kestabilan titik kesetimbangan x^* dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu λ yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (2.7)$$

dengan I adalah suatu matriks identitas. Lebih jelasnya terdapat pada teorema 2.1 sebagai berikut,

Teorema 2.1 (Olsder & Woude, 2004) *Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, dengan A suatu matriks $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.*

- (i). Titik kesetimbangan $x^* = \mathbf{0}$ dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
- (ii). Titik kesetimbangan $x^* = \mathbf{0}$ dikatakan stabil jika dan hanya jika $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ dan jika setiap nilai eigen λ_i imajiner dengan $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.
- (iii). Titik kesetimbangan $x^* = \mathbf{0}$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

2.8. Sistem Persamaan differensial tundaan

Menurut Kuang (1993), persamaan differensial dengan tundaan dinyatakan dalam bentuk:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0 \quad (2.8)$$

Dengan τ adalah waktu tunda dan $\frac{d^0}{dt^0} x(t) = x(t)$. Misal $x(t) = e^{\lambda t}$, maka

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} = 0 \quad (2.9)$$

$$e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) disebut sebagai persamaan karakteristik dari persamaan (2.10).
Misal

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \text{ dan } P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k$$

Maka persamaan (2.11) dapat ditulis kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (2.11)$$

Menurut Forde (2005), Sistem persamaan differensial dengan waktu tunda dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x(t), x(t - \tau)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(x(t), x(t - \tau)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.9. Eksistensi waktu tunda kritis

Jika $\tau = 0$, maka sistem persamaan (2.12) akan menjadi persamaan differensial biasa yang jenis kestabilannya dapat dianalisis. Menurut Forde (2005), untuk $\tau \neq 0$, akar karakteristik (λ) akan mengalami perubahan. Misalkan α adalah bagian riil dari $Re(\lambda)$ akar karakteristik (λ) maka sistem persamaan differensial akan bersifat stabil jika $\alpha < 0$ dan tidak stabil jika $\alpha > 0$. Adanya waktu tunda pada sistem (2.12) yang mengakibatkan adanya nilai kritis tundaan yang menyebabkan terjadinya transisi dari $\alpha < 0$ ke $\alpha > 0$. Untuk mengamati terjadinya perubahan tersebut dipilih suatu nilai dimana terjadi perubahan atau $\alpha = 0$. Ketika $\alpha = 0$ akar persamaan karakteristik untuk sistem (2.12) adalah akar karakteristik kompleks murni. Misalkan τ^* adalah nilai τ yang menyebabkan $\alpha = 0$ atau disebut waktu tunda kritis, berikut akan diperlihatkan langkah-langkah untuk menentukan adanya waktu tunda kritis tersebut.

Misal akar persamaan (2.11) adalah $\lambda = i\omega, \omega \in \mathbb{R}$, dengan $\omega > 0$, persamaan (2.11) menjadi

$$P_1(i\omega) + P_2(i\omega)e^{-i\omega\tau} = 0. \quad (2.12)$$

Jika bagian polinomnya dipecah menjadi bagian riil dan imajiner, serta suku eksponennya diubah dalam bentuk trigonometri, maka diperoleh

$$R_1(\omega) + iQ_1(\omega) + (R_2(\omega) + iQ_2(\omega))(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) = 0, \quad (2.13)$$

dengan

$$R_1(\omega) = \sum_j (-1)^{j+1} a_j \omega^{2j}; \quad Q_1(\omega) = \sum_j (-1)^j a_{j+1} \omega^{2j+1}; \quad (2.14)$$

$$R_2(\omega) = \sum_j (-1)^{j+1} b_j \omega^{2j}; \quad Q_2(\omega) = \sum_j (-1)^j b_{j+1} \omega^{2j+1}. \quad (2.15)$$

Agar persamaan (2.13) terpenuhi, bagian riil dan imajiner harus sama dengan nol.

$$R_1(\omega) + R_2(\omega) \cos(\omega\tau) + Q_2(\omega) \sin(\omega\tau) = 0, \quad (2.16)$$

$$Q_1(\omega) - R_2(\omega) \sin(\omega\tau) + Q_2(\omega) \cos(\omega\tau) = 0, \quad (2.17)$$

atau

$$-R_1(\omega) = R_2(\omega) \cos(\omega\tau) + Q_2(\omega) \sin(\omega\tau), \quad (2.18)$$

$$Q_1(\omega) = R_2(\omega) \sin(\omega\tau) + Q_2(\omega) \cos(\omega\tau). \quad (2.19)$$

Jika persamaan (2.18) dan (2.19) dikuadratkan maka

$$R_1(\omega)^2 = R_2(\omega)^2 \cos^2(\omega\tau) + Q_2(\omega)^2 \sin^2(\omega\tau) + 2R_2(\omega) Q_2(\omega) \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau), \quad (2.20)$$

$$Q_1(\omega)^2 = R_2(\omega)^2 \sin^2(\omega\tau) + Q_2(\omega)^2 \cos^2(\omega\tau) - 2R_2(\omega) Q_2(\omega) \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau) \quad (2.21)$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan kedua persamaan (2.20) dan (2.21) diperoleh

$$R_1(\omega)^2 + Q_1(\omega)^2 = R_2(\omega)^2 + Q_2(\omega)^2. \quad (2.22)$$

Misal ω^* memenuhi persamaan (2.22) dan $d = \sqrt{R_1(\omega^*)^2 + Q_1(\omega^*)^2}$, maka persamaan (2.18) dan (2.19) dapat ditulis kembali dalam ω^*

$$-R_1(\omega^*) = d \left(\frac{R_2(\omega^*)}{d} \cos(\omega^*\tau) + \frac{Q_2(\omega^*)}{d} \sin(\omega^*\tau) \right), \quad (2.23)$$

$$Q_1(\omega^*) = d \left(\frac{R_2(\omega^*)}{d} \sin(\omega^*\tau) - \frac{Q_2(\omega^*)}{d} \cos(\omega^*\tau) \right). \quad (2.24)$$

Misal $\frac{R_2(\omega^*)}{d} = \cos \beta$ dan $\frac{Q_2(\omega^*)}{d} = \sin \beta$, maka

$$-R_1(\omega^*) = d(\cos \beta \cos(\omega^*\tau) + \sin \beta \sin(\omega^*\tau)), \quad (2.25)$$

$$Q_1(\omega^*) = d(\cos \beta \sin(\omega^*\tau) + \sin \beta \cos(\omega^*\tau)). \quad (2.26)$$

Dengan menggunakan sifat-sifat trigonometri. diperoleh

$$-R_1(\omega^*) = d \cos(\omega^*\tau - \beta), \quad (2.27)$$

$$Q_1(\omega^*) = d \sin(\omega^*\tau - \beta). \quad (2.28)$$

Nilai τ^* dapat diperoleh dari persamaan (2.25) dan (2.26) yaitu mengalikan baris pertama persamaan (2.25) dan (2.26) dengan $\cos \beta$ dan baris kedua persamaan (2.25) dan (2.26) dengan $\sin \beta$, sehingga diperoleh

$$-R_1(\omega^*) \cos \beta = d \cos \beta \cos \beta \cos(\omega^* \tau) + d \cos \beta \sin \beta \sin(\omega^* \tau), \quad (2.29)$$

$$Q_1(\omega^*) \sin \beta = d \sin \beta \cos \beta \sin(\omega^* \tau) - d \sin \beta \sin \beta \cos(\omega^* \tau), \quad (2.30)$$

dengan mengurangkan kedua ruas diperoleh

$$\begin{aligned} -R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta \\ = d \cos \beta \cos \beta \cos(\omega^* \tau) + d \sin \beta \sin \beta \cos(\omega^* \tau) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$-R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta = d \cos(\omega^* \tau) (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \quad (2.32)$$

$$-R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta = d \cos(\omega^* \tau) \quad (2.33)$$

$$\omega^* \tau = \arccos \left\{ \frac{-R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta}{d} \right\} + 2n\pi \quad (2.34)$$

$$\tau_n^* = \frac{1}{\omega^*} \arccos \left\{ \frac{-R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta}{d} \right\} + \frac{2n\pi}{\omega^*}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Dari Persaman (2.35) dapat dilihat bahwa terdapat beberapa τ^* yang memenuhi persamaan (2.13). Setelah ditemukan waktu tunda kritis, selanjutnya akan ditentukan apakah kondisi ini memenuhi kondisi transversal.

2.10. Kondisi Transversal

Perlu diselidiki kondisi yang dapat menyebabkan perubahan kestabilan dari titik tetap ketika waktu tunda berubah. Untuk itu perlu dibuktikan bahwa bagian riil akar karakteristik bergerak menuju bagian positif pada bidang kompleks ketika waktu tunda τ membesar melebihi τ^* , dengan kriteria

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega, \tau=\tau^*} > 0 \quad (2.36)$$

atau equivalen dengan

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega, \tau=\tau^*} \neq 0 \quad (2.37)$$

kondisi pada persamaan (2.36) dan (2.37) disebut kondisi transversal atau *nondegeneracy*. Jika kondisi ini dipenuhi maka untuk $\tau < \tau^*$, λ mempunyai bagian riil negatif (Forde, 2005)

Berikut lemma yang menjamin kondisi transversal atau *nondegeneracy* akan terpenuhi

Lemma 2.1. (Forde, 2005)

Jika $\lambda = i\omega^*$ dan $\tau = \tau^*$ memenuhi persamaan karakteristik (2.11) maka

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega, \tau=\tau^*} > 0 \quad (2.38)$$

jika dan hanya jika

$$R_1(\omega^*)R'_1(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q'_1(\omega^*) \neq R_2(\omega^*)R'_2(\omega^*) + Q_2(\omega^*)Q'_2(\omega^*). \quad (2.39)$$

2.11. Masalah kontrol optimal dan syarat perlu keoptimalannya

Masalah kontrol optimal adalah memilih fungsi kontrol $u(t)$ yang membawa sistem dari *state* awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 ke *state* akhir $x(t_f)$ pada waktu akhir t_f , sedemikian sehingga memberikan nilai maksimum atau minimum untuk suatu fungsi objektif (fungsi tujuan).

State yang bergantung pada fungsi kontrol dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.40)$$

dengan nilai awal $x(t_0) = x_0$. Sistem tersebut bergantung pada fungsi $u(t)$ yang merupakan fungsi kontrol dari sistem (2.16). Jika nilai $u(t)$ berubah maka solusi dari sistem (2.40) juga akan berubah. Masalah kontrol yang paling dasar adalah mencari fungsi kontrol $u(t)$ dan solusi sistem yang bersesuaian dengan (2.40) sehingga fungsi tujuan berikut dapat tercapai, yaitu

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.41)$$

dengan kendala $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$

Teknik prinsip untuk masalah kontrol optimal adalah menyelesaikan serangkaian syarat perlu yang harus dipenuhi oleh kontrol yang optimal dan *state* yang terkait. Syarat perlu yang diperoleh dikembangkan oleh Pontryagin dan rekan kerjanya di Moskow pada tahun 1950-an. Pontryagin memperkenalkan gagasan fungsi *adjoint* untuk menambahkan persamaan diferensial ke fungsi objektif. Fungsi *adjoint* mempunyai tujuan yang sama dengan pengganda Lagrange dalam kalkulus multivariabel yang menambahkan kendala pada fungsi beberapa variabel yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan (Lenhart & Workman, 2007). Misalkan fungsi tujuan dalam persamaan (2.41) dituliskan sebagai berikut :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.42)$$

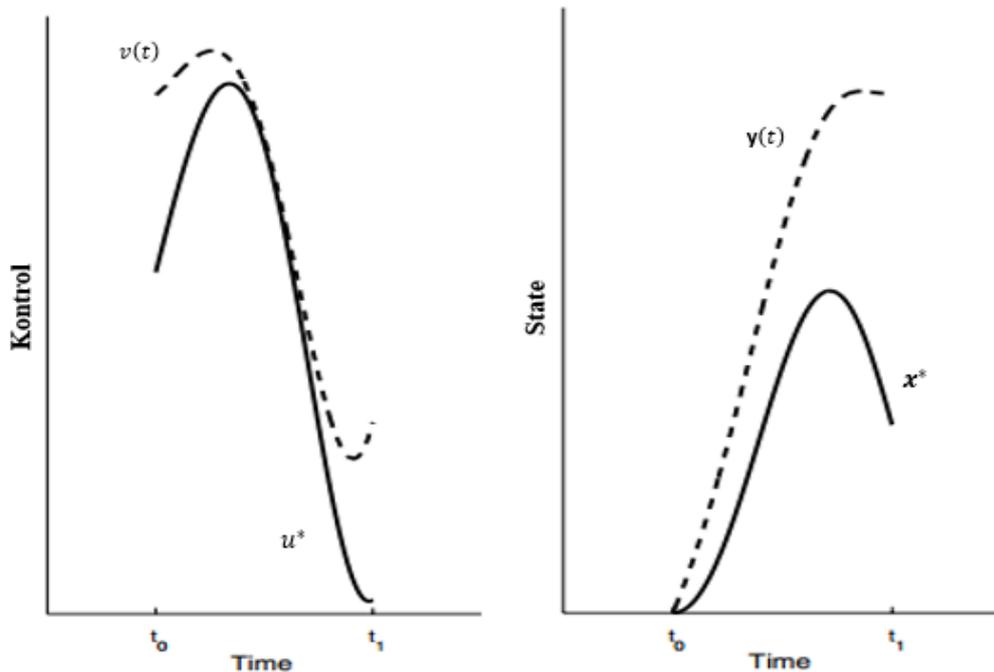
dengan x merupakan variabel *state*. Diasumsikan bahwa kontrol optimal dari masalah optimal (2.41) ada, yaitu u^* dengan x^* adalah variabel *state* optimal yang memenuhi persamaan (2.40). Misalkan $J(u^*) \leq J(u) < \infty$ untuk semua kontrol u . Misalkan pula terdapat fungsi variasi kontinu $h(t)$ dan $\varepsilon \in R$ sedemikian sehingga

$$v(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \quad (2.43)$$

dengan $v(t)$ merupakan fungsi kontrol yang lain, ε adalah jarak untuk $[t_0, t_f]$ dan h adalah *step size* dari persamaan (2.43). Misalkan y merupakan variabel *state* yang bersesuaian dengan v yang memenuhi,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t)) \quad (2.44)$$

di mana $v(t)$ adalah kontinu dan dengan lintasan *state* berawal dari posisi yang sama, dipilih $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (lihat Gambar 2.2). Dalam gambar tersebut dapat dilihat bahwa $v(t) \rightarrow u^*(t)$ untuk semua t , ketika $\varepsilon \rightarrow 0$. Hal yang sama berlaku untuk y , karena asumsi yang dibuat pada \mathbf{g} maka $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*(t)$ untuk setiap t yang tetap, dengan kata lain turunan $\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{y}(t) \right|_{\varepsilon=0}$ ada untuk setiap t .



Gambar 2.3 grafik fungsi kontrol optimal

sumber: Lenhart, S. , 2007

Dari gambar 2.2 dapat dilihat perbandingan antara kontrol optimal u^* dengan v (kiri) dan state optimal v^* dengan y (kanan). Garis putus-putus

menunjukkan sistem tanpa kontrol dan garis penuh menunjukkan sistem dengan kontrol optimal.

Fungsi tujuan dalam persamaan (2.42) yang dievaluasi di v adalah

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) dt. \quad (2.45)$$

Kemudian didefinisikan $\lambda(t)$ yang merupakan fungsi *adjoint* yang akan ditentukan.

Fungsi tersebut merupakan fungsi yang terturunkan dalam interval $[t_0, t_f]$.

Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus diperoleh,

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda^T(t) \mathbf{y}(t)] dt = \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f) - \lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) \quad (2.46)$$

atau

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda^T(t) \mathbf{y}(t)] dt + [\lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)] = 0 \quad (2.47)$$

Jika bentuk yang bernilai nol tersebut dijumlahkan ke dalam fungsi $J(v)$ diperoleh

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_f} \left[f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda^T(t) \mathbf{y}(t)) \right] dt + [\lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)] \quad (2.48)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} [f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \dot{\lambda}^T(t) \mathbf{y}(t) + \lambda^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t))] dt + [\lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)] \quad (2.49)$$

dengan $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t)) = \dot{\mathbf{y}}(t)$. Karena nilai minimum dari J terhadap kontrol u terjadi pada u^* , saat turunan dari $J(v)$ terhadap ε (dalam arah h) adalah nol, yaitu

$$\left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(v) - J(u^*)}{\varepsilon} = 0 \quad (2.50)$$

Dengan menggunakan teorema *Lebesgue Dominated Convergence*, bentuk limit (begitu pula dengan turunan) dapat dipindahkan ke dalam bentuk integral, sehingga diperoleh turunan dari $J(v)$ terhadap ε , yaitu

$$\left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \dot{\lambda}^T(t) \mathbf{y}(t) + \lambda^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t))] dt \Big|_{\varepsilon=0} + \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) \right|_{\varepsilon=0} - \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f) \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (2.51)$$

Dengan menerapkan aturan rantai terhadap fungsi f dan g diperoleh

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[f_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \dot{\lambda}^T(t) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + \lambda^T(t) \left(\mathbf{g}_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + \mathbf{g}_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \right] dt - \lambda^T(t_f) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.52)$$

dengan f_x, f_u, \mathbf{g}_x dan \mathbf{g}_u bergantung pada $t, \mathbf{x}^*(t)$ dan $u^*(t)$. Jika persamaan (2.23) disederhanakan maka diperoleh :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\underbrace{(f_x + \lambda^T(t)\mathbf{g}_x + \dot{\lambda}^T(t)) \frac{dy}{d\varepsilon}(t)}_{*} + (f_u + \lambda^T(t)\mathbf{g}_u)h(t) \right] dt - \underbrace{\lambda^T(t_f) \frac{dy}{d\varepsilon}(t_f)}_{**} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.53)$$

Agar persamaan (2.53) bernilai nol maka dipilih fungsi adjoint $\lambda(t)$ yang memenuhi persamaan :

$$\dot{\lambda}(t) = -[f_x(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)\mathbf{g}_x(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))] \quad (2.54)$$

Dan syarat batas $\lambda(t_f) = \mathbf{0}$. Syarat batas ini dikenal sebagai syarat transversalitas. Persamaan (2.53) tereduksi menjadi

$$\int_{t_0}^{t_f} [f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)\mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))]h(t)dt = 0. \quad (2.55)$$

Selanjutnya, karena persamaan (2.53) berlaku untuk sembarang fungsi variasi $h(t)$ yang kontinu, maka dipilih fungsi

$$h(t) = f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)\mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \quad (2.56)$$

Akibatnya (2.53) menjadi

$$\int_{t_0}^{t_f} [f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)\mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))]^2 dt = 0, \quad (2.57)$$

Berdasarkan persamaan tersebut diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi yang optimal, yaitu

$$f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)\mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) = 0, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_f. \quad (2.58)$$

Jadi persamaan (2.54) dan (2.58) yang diperoleh tersebut merupakan syarat perlu keoptimalan fungsi tujuan (2.41) (Lenhart dan Workman, 2007).

Dalam praktiknya, syarat perlu di atas dapat dihasilkan dari Hamiltonian H , yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H(t, \mathbf{x}, u, \lambda) = f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u). \quad (2.59)$$

Akan memaksimumkan atau meminimumkan H pada saat u di u^* dan kondisi diatas dapat ditulis dalam persamaan Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \text{ di } u^* \rightarrow f_u + \lambda \mathbf{g}_u = 0 \quad (\text{kondisi optimal/syarat stasioner})$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \rightarrow \dot{\lambda} = -(f_x + \lambda \mathbf{g}_x) \quad (\text{persamaan adjoint})$$

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (\text{syarat transversalitas})$$

Dengan diberikan persamaan *state* yaitu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

2.12. Prinsip Minimum Pontryagin

Misalkan diberikan masalah kontrol optimal sebagai berikut :

$$\min J = \min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (2.60)$$

dengan kendala

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t)). \quad (2.61)$$

Fungsi J disebut fungsi tujuan dan kontrol $u(t) \in U$, dengan U merupakan himpunan dari semua fungsi kontrol $u(t)$ yang diperkenankan. Diasumsikan bahwa $u(t)$ merupakan fungsi terhadap waktu sehingga $f(t, \mathbf{x}, u)$ dan $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$ juga merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi dalam interval $[t_0, t_f]$. Pemilihan fungsi f bergantung pada penekanan dari sistem yang akan di optimalkan. Dalam sistem kontrol optimal, tujuan pengontrolan adalah untuk mengoptimalkan fungsi objektif (2.60). Masalah kontrol optimal adalah mencari $u^*(t)$ yang menggerakkan sistem (2.61) ke trajektori $\mathbf{x}^*(t)$ sedemikian sehingga fungsi objektif pada persamaan (2.61) mencapai nilai yang optimal.

Pencarian fungsi kontrol $u^*(t)$ yang mengoptimalkan J pada prinsipnya menggunakan metode pengali Lagrange. Sistem (2.61) menyatakan suatu fungsi kendala yang bergantung pada $t \in [t_0, t_f]$, sehingga diperlukan pengali Lagrange pada masing-masing waktu tersebut karena setiap kendala mempunyai satu pengali Lagrange. Misalkan pengali Lagrange disimbolkan dengan $\lambda(t) \in R^n$ maka bentuk perluasan dari J yang menyertakan kendala (2.61) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda^T(t)(\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u) - \dot{\mathbf{x}}(t))] dt \quad (2.62)$$

Misalkan didefinisikan fungsi Hamiltonian sebagai berikut :

$$H(t, \mathbf{x}, u, \lambda) = f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda^T(t)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u). \quad (2.63)$$

dengan menggunakan fungsi Hamilton tersebut, persamaan (2.62) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t)] dt. \quad (2.64)$$

Teorema 2.1. (Lenhart & Workman, 2007)

Jika $u^*(t)$ dan $\mathbf{x}^*(t)$ merupakan kontrol optimal dan state optimal untuk masalah berikut :

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (2.65)$$

terhadap $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t))$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ maka terdapat variabel adjoint $\boldsymbol{\lambda}(t)$ yang terturunkan sedemikian sehingga

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \leq H(t, \mathbf{x}^*(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$$

untuk semua fungsi kontrol u pada setiap t dengan fungsi Hamiltonian

$$H = f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t))$$

dan

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = - \frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t))}{\partial \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}.$$

Teorema 2.2. (Lenhart & Workman, 2007)

Misalkan fungsi f dan g adalah fungsi yang terturunkan secara kontinu terhadap t, \mathbf{x}, u dan merupakan fungsi konveks terhadap u . Misalkan u^* adalah kontrol optimal untuk masalah optimasi (2.65), dengan state optimal \mathbf{x}^* , dan $\boldsymbol{\lambda}$ adalah fungsi yang terturunkan untuk setiap t . Misalkan untuk setiap $t_0 \leq t \leq t_f$ berlaku $H_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = 0$ maka untuk semua kontrol u dan untuk setiap t diperoleh

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \leq H(t, \mathbf{x}^*(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)).$$

Secara ringkas, prinsip minimum Pontryagin dapat dituliskan sebagai berikut:

Model Sistem	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$
Fungsional Objektif	$J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt$
Fungsi Hamiltonian	$H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$
Pengontrol Optimum	

- Persamaan state $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u) \quad (2.66)$

- Persamaan costate $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.67)$

- Syarat Stationer $\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U$ (2.68)

- Syarat Transversalitas $\lambda(t_f) = \mathbf{0}$ (2.69)

2.13. Metode Forward-Backward Sweep

Tinjau masalah optimasi yang diberikan pada persamaan (2.60) terhadap kendala pada persamaan (2.61). Dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin, masalah optimasi yang berkendala tersebut dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu

$$\min_{(x,u,\lambda)} H(t, x, u, \lambda) = \min_{(x,u,\lambda)} f(t, x, u) + \lambda^T(t)g(t, x, u) \quad (2.70)$$

dengan syarat keoptimalan

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.71)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = \mathbf{0} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U. \quad (2.73)$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan berbagai metode optimasi. Salah satunya menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Metode ini merupakan metode iteratif yang akan digunakan untuk mengaproksimasi solusi optimal u^* menggunakan tebakan awal yang diberikan untuk u di awal iterasi. Pada metode ini, interval waktu $[t_0, t_f]$ dibagi menjadi beberapa bagian, yaitu $t_0 = b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1} = t_f$ dan kontrol $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$, dimana $u_i \approx u(b_i)$. Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk x dan λ yang bergantung pada u . Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas untuk x dan λ tersebut.

Metode *Forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi $x(t)$. Pada metode ini, diberikan kondisi awal yaitu pada persamaan (2.66), kemudian diberikan *step size* yaitu h dan persamaan (2.58) akan diselesaikan. Pendekatannya melalui $x(t+h)$ dan $x(t)$, sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.74)$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t, x(t)) \\
k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= f(t + h, x(t) + hk_3).
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Sedangkan metode *Backward Runge Kutta* orde 4 diberikan kondisi akhir yaitu pada persamaan (2.67). Kemudian diberikan *step size* yaitu h dan persamaan (2.40) akan diselesaikan, pendekatannya melalui $\lambda(t - h)$ dan $\lambda(t)$ sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$\lambda(t - h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.76}$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t, \lambda(t)) \\
k_2 &= f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= f(t - h, \lambda(t) - hk_3).
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Sedangkan nilai u diperbaharui setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai u yang lama dengan nilai u yang baru yaitu

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2}$$

dengan u_{baru} diperoleh dari syarat keoptimalan $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Bentuk kombinasi konveks lain yang dapat digunakan adalah

$$u = u_{baru}(1 - c^k) + u_{lama}c^k$$

dengan k merupakan iterasi yang berjalan dan $0 < c < 1$. Pada metode ini, iterasi akan berhenti ketika syarat konvergensinya telah dipenuhi diantaranya ketika nilai $\|u - u_{lama}\| = \sum_{i=1}^{N+1} |u_i - u_{lama(i)}|$ menjadi sangat kecil, dengan u merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi yang sedang berjalan dan u_{lama} merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi sebelumnya. Bentuk uji konvergensi lain dapat pula dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\|u - u_{lama}\|}{\|u\|} \leq \delta$$

atau $\delta\|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$, dengan δ merupakan besar toleransi yang diperkenankan (Lenhart & Workman, 2007).

2.14. Masalah Kontrol Optimal dengan waktu tunda pada *state and control*

Pertimbangkan Masalah Kontrol Optimal dengan waktu tunda konstan $r \geq 0$ dalam variabel *state* $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dan $s \geq 0$ pada variabel kontrol $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Masalah Kontrol Optimal dengan waktu tunda pada *state and control* (ROCP)

$$\text{minimize } J(u, x) = g(x(b)) + \int_a^b L(t, x(t), x(t-r), u(t), u(t-s)) dt \quad (2.78)$$

Dengan kendala persamaan differensial dengan waktu tunda, kondisi batas, dan pertidaksamaan pada kontrol dan *state*.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r), u(t), u(t-s)) \quad a. e. t \in [a, b] \quad (2.79)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-r, a] \quad (2.80)$$

$$u(t) = \psi(t), \quad t \in [a-s, a] \quad (2.81)$$

$$\omega(x(b)) = 0 \quad (2.82)$$

$$C(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [a, b] \quad (2.83)$$

Lebih mudahnya, semua fungsi

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad 0 \leq q \leq n$$

$$C: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Diasumsikan terdifferensial kontinu dua kali yang berlaku untuk setiap argumen. Pasangan fungsi $(u, x) \in L^\infty([a, b], \mathbb{R}^m) \times W^{1,\infty}([a, b], \mathbb{R}^n)$ disebut *admissible pair* untuk ROCP, jika *state* x dan kontrol u memenuhi batasan $(\cdot)(\cdot)$. *Admissible pair* (\hat{u}, \hat{x}) disebut *locally optimal pair* or *weak minimum* untuk ROCP, Jika

$$J(\hat{u}, \hat{x}) \leq J(u, x)$$

Memenuhi untuk setiap (u, x) yang *admissible* di persekitaran (\hat{u}, \hat{x}) dengan $\|u(t) - \hat{u}(t)\|, \|x(t) - \hat{x}(t)\| < \varepsilon$, untuk setiap $t \in [a, b]$ dan $\varepsilon > 0$ cukup kecil (Gollman, L. dkk.,2009).

2.15. Syarat cukup kondisi optimal untuk ROCP

Sekarang saatnya membahas ROCP dengan waktu tunda konstan $r, s \geq 0$ dan $(r, s) \neq (0,0)$, kita akan menggunakan teknik transformasi yang membutuhkan asumsi bahwa rasio dari waktu tunda adalah bilangan rasional.

Asumsi 2.1. (Gollman, L. dkk.,2009)

Asumsikan bahwa $r, s \geq 0$, $(r, s) \neq (0,0)$ dan

$$\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \text{ untuk } s > 0 \text{ atau } \frac{s}{r} \in \mathbb{Q} \text{ untuk } r > 0 \quad (2.84)$$

Khususnya, asumsi ini berlaku untuk setiap pasangan bilangan rasional (r, s) , dengan setidaknya satu bilangan bukan nol.

Hamiltonian untuk H and *augmented* Hamiltonian \mathcal{H} untuk ROCP didefinisikan dengan analogi masalah tanpa waktu tunda. Namun, berbeda dengan Hamiltonian tanpa waktu tunda, dua argumen tambahan $y \in \mathbb{R}^n$ dan $v \in \mathbb{R}^m$ dinotasikan sebagai variabel *state* dan kontrol dengan waktu tunda. Hamiltoniannya di tuliskan sebagai berikut:

$$H(t, x, y, u, v, \lambda) := L(t, x, y, u, v) + \lambda^* f(t, x, y, u, v) \quad (2.85)$$

$$\mathcal{H}(t, x, y, u, v, \lambda) := L(t, x, y, u, v) + \lambda^* f(t, x, y, u, v) + \mu^* (C(t, x, u)) \quad (2.86)$$

Dengan $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^p$.

Kita harus mendapatkan syarat cukup untuk ROCP dengan pertama-tama mengubah ROCP ke dalam masalah kontrol tanpa waktu tunda dengan dimensi yang lebih besar. Studi lebih lanjut tentang masalah *augmented*, kita membutuhkan prinsip minimum ponthyagin untuk masalah kontrol tanpa waktu tunda dengan kendala pertidaksamaan variabel state dan kontrol.

Teorema 2.3. (Gollman, L. dkk.,2009)

Misalkan (\hat{u}, \hat{x}) adalah optimal lokal untuk ROCP dengan waktu tunda memenuhi asumsi (). Maka terdapat sebuah fungsi costate $\hat{\lambda} \in W^{1,\infty}([a, b], \mathbb{R}^n)$, pengali $\hat{\mu} \in L^\infty([a, b], \mathbb{R}^m)$, dan pengali $\hat{v} \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga kondisi berikut berlaku untuk a.e $t \in [a, b]$:

- i. Persamaan differensial adjoint

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}(t)^* &= -\hat{\mathcal{H}}_x(t) - \dot{\chi}_{[a,b-r]}(t)\hat{\mathcal{H}}_y(t+r) \\
&= -\hat{\mathcal{H}}_x\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-r), \hat{u}(t), \hat{u}(t-s), \hat{\lambda}(t), \hat{\mu}(t)\right) \\
&\quad -\chi_{[a,b-r]}(t)\hat{\mathcal{H}}_y(t+r, \hat{x}(t+r), \hat{x}(t), \hat{u}(t+r), \\
&\quad \hat{u}(t+r-s), \hat{\lambda}(t+r), \hat{\mu}(t+r))
\end{aligned} \tag{2.87}$$

dengan $\hat{\mathcal{H}}_x(t)$ dan $\hat{\mathcal{H}}_y(t)$ menyatakan turunan parsial \mathcal{H}_x dan \mathcal{H}_y sepanjang $\hat{x}(t), \hat{x}(t-r), \hat{u}(t), \hat{u}(t-s), \hat{\lambda}(t), \hat{u}(t)$;

ii. *Kondisi transversal*

$$\hat{\lambda}(b)^* = g_x(\hat{x}(b)) + \hat{v}^* w_x(\hat{x}(b)) \tag{2.88}$$

iii. *Kondisi minimum untuk Hamiltonian*

$$\begin{aligned}
&\hat{H}(t) + \chi_{[a,b-s]}(t)\hat{H}(t+s) \\
&= \hat{H}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-r), \hat{u}(t), \hat{u}(t-s), \hat{\lambda}(t)\right) \\
&\quad + \chi_{[a,b-s]}(t)H(t+s, \hat{x}(t+s), \hat{x}(t), \hat{u}(t+s-r), \\
&\quad \hat{u}(t+s), \hat{u}(t), \hat{\lambda}(t+s)) \\
&\leq H\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-r), u(t), \hat{u}(t-s), \hat{\lambda}(t)\right) \\
&\quad + \chi_{[a,b-s]}(t)H(t+s, \hat{x}(t+s), \hat{x}(t+s-r), \\
&\quad \hat{u}(t+s), \hat{u}, \hat{\lambda}(t+r))
\end{aligned} \tag{2.89}$$

For all $u \in \mathbb{R}^m$ memenuhi $C(t, \hat{x}(t), u) \leq 0$;

iv. *Kondisi minimum lokal untuk augmented Hamiltonian*

$$\hat{\mathcal{H}}_u(t) + \chi_{[a,b-s]}(t)\hat{\mathcal{H}}_v(t+s) = 0 \tag{2.90}$$

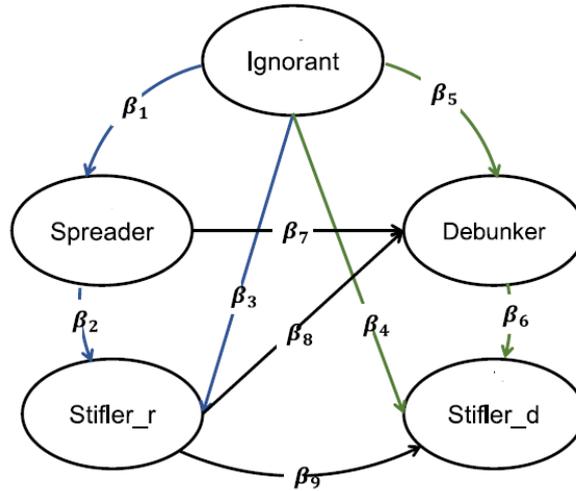
v. *Kondisi nonnegatif untuk multiplier*

$$\mu_i(t) \geq 0 \text{ dan } \mu_i(t)C_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, p \tag{2.91}$$

2.15. Model Spreader-Debunker

Model penyebaran rumor yang dikenalkan oleh Jiang, 2021 membagi populasi menjadi lima kompartemen yaitu *Ignorant (I)*; Orang yang belum tahu tentang rumor maupun anti rumor, *Spreader (S)*; Orang yang menyebarkan rumor, *Debunker (D)*; Orang yang menyebarkan anti rumor, *Stifler_r (Sr)*; Orang yang mengetahui tentang rumor tetapi tidak menyebarkannya, *Stifler_d (Sd)*; Orang yang mengetahui tentang anti rumor tetapi tidak menyebarkannya. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= -\beta_1 kIS - \beta_3 kIS - \beta_4 kID - \beta_5 kID \\
\frac{dS}{dt} &= \beta_1 kIS - \beta_2 S - \beta_7 kSD \\
\frac{dD}{dt} &= \beta_5 kID - \beta_6 D + \beta_7 kSD + \beta_8 kSrD \\
\frac{dSr}{dt} &= \beta_2 S + \beta_3 kIS - \beta_8 kSrD - \beta_9 kSrD \\
\frac{dSd}{dt} &= \beta_4 kID + \beta_6 D + \beta_9 kSrD
\end{aligned} \tag{2.92}$$



Gambar 2.2 Diagram model *Spreading-debungking*

Parameter yang menyebabkan perpindahan antar kelas adalah



Setiap persamaan dapat dijelaskan sebagai berikut

- Pers. (2.93): Ketika seorang *Ignorant* melihat rumor, *Ignorant* menjadi spreader dengan tingkat penyebaran rumor β_1 .
- Pers (2.94): Seiring berjalannya waktu, Penyebar rumor (*Spreader*) kehilangan pengaruhnya. Rumor yang mereka sebar tidak lagi diperhatikan oleh yang lain karena informasi yang berlebihan di media sosial. Jadi, seorang *Spreader* menjadi *Stifler_r* dengan tingkat pemudaran rumor β_2 .
- Pers (2.94): Ketika seorang *Ignorant* melihat rumor, *Ignorant* memutuskan untuk tidak menyebarkan rumor dan menjadi *Stifler_r* dengan tingkat pengaruh rumor β_3 .
- Pers (2.96): Ketika seorang *Ignorant* melihat anti-rumor, *Ignorant* menjadi *Stifler_d* dengan tingkat pengaruh anti-rumor β_4 .
- Pers. (2.97): Ketika seorang *Ignorant* melihat anti-rumor, *Ignorant* menjadi *debunker* dengan tingkat penyebaran anti-rumor β_5 .
- Pers. (2.98): Seiring berjalannya waktu, Penyebar anti-rumor (*Debunker*) kehilangan pengaruhnya dan seorang *debunker* menjadi *Stifler_d* dengan tingkat pemudaran anti-rumor β_6 .
- Pers. (2.99): Ketika seorang *Spreader* melihat anti-rumor, *Spreader* menjadi *debunker* dengan tingkat perubahan β_7 .
- Pers. (2.100): Ketika seorang *Stifler_r* berinteraksi dengan *Debunker*, *Stifler_r* menjadi *debunker* dengan tingkat perubahan β_8 .
- Pers. (2.101): Ketika seorang *Stifler_r* berinteraksi dengan *Debunker*, *Stifler_r* menjadi *Stifler_d* dengan tingkat perubahan β_9 .