

**INTERPOLASI SPASIAL *ORDINARY COKRIGING*
DENGAN SEMIVARIOGRAM ANISOTROPI
GEOMETRIS**

**(Studi Kasus: Data Pemantauan Kualitas Udara di Daerah
Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018)**

SKRIPSI



MIRNA

H051171312

**PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2022

**INTERPOLASI SPASIAL *ORDINARY COKRIGING*
DENGAN SEMIVARIOGRAM ANISOTROPI
GEOMETRIS**

**(Studi Kasus: Data Pemantauan Kualitas Udara di Daerah
Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018)**

SKRIPSI

UNIVERSITAS HASANUDDIN

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika
dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

MIRNA

H051171312

**PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2022

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh
bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

**Interpolasi Spasial *Ordinary Cokriging* dengan Semivariogram Anisotropi
Geometris**

adalah benar hasil karya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah
dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 23 September 2022



MIRNA
NIM. H051171312

**INTERPOLASI SPASIAL *ORDINARY COKRIGING* DENGAN
SEMIVARIOGRAM ANISOTROPI GEOMETRIS
(Studi Kasus: Data Pemantauan Kualitas Udara di Daerah
Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018)**

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,



Siswanto, S.Si., M.Si.
NIP. 199201072019031012

Pembimbing Pertama,



Sri Astuti Thamrin, S.Si., M.Stat., Ph.D
NIP. 197407131999032001

Ketua Departemen Statistika,



Dr. Nur Hafid Sunusi, S.Si., M.Si.
NIP. 197201171997032002

Pada Tanggal: 23 September 2022

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Mirna

NIM : H051171312

Program Studi : Statistika

Judul Skripsi : Interpolasi Spasial *Ordinary Cokriging* dengan Semivariogram Anisotropi Geometris

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

- Tanda Tangan
1. Ketua : Siswanto, S.Si., M.Si. (.....)
 2. Sekretaris : Sri Astuti Thamrin, S.Si., M.Stat., Ph.D (.....)
 3. Anggota : Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si. (.....)
 4. Anggota : Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si. (.....)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 23 September 2022

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas kebaikan, kasih, dan berkat anugrah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “**Interpolasi Spasial *Ordinary Cokriging* dengan Semivariogram Anisotropi Geometris**”. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains pada Departemen Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Penulis menghadapi banyak kendala dan masalah selama proses penulisan skripsi ini, namun dengan berkat dan izin-Nya serta bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, sehingga skripsi ini dapat selesai.

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih setinggi-tingginya dan penghargaan tak terhingga kepada orangtua penulis Ayahanda **Lapangile** dan Ibunda **Iwella** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan dengan limpahan cinta, kasih sayang, dan doa terbaik kepada penulis yang tak pernah habis. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada saudara penulis **Tihana, Lasinrang, dan Hasan** serta keluarga besar yang ada di Amparita atas dukungan doa dan cinta kasih kehangatan keluarga. Penghargaan yang tulus serta ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga disampaikan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. Ibu **Dr. Nutiti Sunusi, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Statistika dan Bapak **Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si.** selaku Sekretaris Departemen Statistika yang telah seperti orangtua sendiri. Segenap dosen pengajar dan staf **Departemen Statistika** yang telah membekali ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.
4. Bapak **Siswanto, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Utama dan Ibu **Sri Astuti Thamrin, S.Si., M.Stat., Ph.D.** selaku Pembimbing Pertama dalam penulisan skripsi ini yang telah ikhlas meluangkan waktu dan pemikirannya

dalam memberikan arahan, bimbingan, pengetahuan, dan motivasi ditengah kesibukan beliau.

5. Tim penguji Ibu **Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.** sekaligus Penasehat Akademik dan Ibu **Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.** yang telah ikhlas meluangkan waktu ditengah kesibukan dalam memberikan saran dan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
 6. Teman-teman **Statistika 2017** terkhusus kepada Haura, Tata, Kety, Alya, Salsa, Shafwan, Chairil, dan Iklil atas kebersamaan, suka dan duka, serta dukungan selama menjalani pendidikan di Departemen Statistika.
 7. Keluarga besar **DISKRIT 2017** yang telah memberikan banyak pelajaran berharga dan arti kebersamaan selama berproses.
 8. **Keluarga Mahasiswa FMIPA Unhas** terkhusus anggota keluarga **Himatika FMIPA Unhas** dan **Himastat FMIPA Unhas** atas ilmu yang mungkin tidak bisa diperoleh dalam perkuliahan dan telah menjadi keluarga selama menjalani perkuliahan di Universitas Hasanuddin
 9. Keluarga besar **IPMI Sidrap** terkhusus **IPMI Sidrap Cab. Tellu Limpoe** serta keluarga besar **Asrama Tellu Limpoe (ASTEL)** yang telah menjadi keluarga penulis selama hidup dalam perantauan.
 10. **Pojok Statistika Unhas** dan **Bank BTN Kanwil V Makassar** yang menjadi wadah dalam mengasah kemampuan dan pengembangan diri penulis menjadi seperti sekarang.
 11. Kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih setinggi-tingginya atas segala dukungan dan partisipasi yang diberikan.
- Penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini dapat berkontribusi dan bermanfaat dalam pengembangan wawasan dibidang ilmu Statistika dan bagi pihak-pihak yang berkepentingan.

Makassar, 23 September 2022



Mirna

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK
KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mirna
NIM : H051171312
Program Studi : Statistika
Departemen : Statistika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan
Jenis karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royali Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty – Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

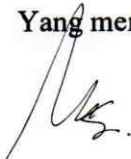
“Interpolasi Spasial *Ordinary Cokriging* dengan Semivariogram Anisotropi Geometris”

berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 23 September 2022

Yang menyatakan



Mirna

ABSTRAK

Ordinary cokriging sebagai salah satu metode geostatistika menambahkan nilai terboboti dari variabel sekunder untuk mengestimasi nilai variabel primer di lokasi tertentu. Metode ini membutuhkan semivariogram untuk menunjukkan korelasi spasial antar pengamatan yang diukur. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan model semivariogram terbaik dan memperoleh peta estimasi hasil interpolasi kadar O_3 menggunakan metode *ordinary cokriging* dengan semivariogram anisotropi geometris. Interpolasi kadar O_3 dilakukan dengan memanfaatkan 53 titik pengukuran kadar O_3 dan 72 titik pengukuran kadar CO yang merupakan data pemantauan kualitas udara di Daerah Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa model semivariogram dengan nilai *Mean Error* (ME) paling mendekati 0 adalah model *gaussian* dan hanya berselisih 0,003 dari model *spherical*. Model *gaussian* memiliki nilai *Root Mean Squared Error* (RMSE) terkecil, namun hanya berselisih 0,002 dari model *spherical*. Akan tetapi dengan membandingkan nilai *Mean Squared Deviation Ratio* (MSDR) dari ketiga model, diketahui bahwa nilai MSDR model *spherical* adalah yang terkecil dan paling mendekati 1. Oleh karena itu, model semivariogram anisotropi geometris terbaik dengan nilai ME dan RMSE terkecil serta nilai MSDR mendekati 1 adalah model *spherical*.

Kata kunci: *Interpolasi Spasial, Ordinary Cokriging, Semivariogram Anisotropi Geometris, Kadar O_3*

ABSTRACT

Ordinary cokriging is a geostatistics method that uses weighted values of secondary variables to estimate the value of primary variables in specific locations. To show the spatial correlation between the measured observations, a semivariogram is required. The purpose of this study is to find the best semivariogram model and create a map of the estimated results of O₃ level interpolation using the ordinary cokriging method with geometric anisotropy semivariogram. Interpolation of O₃ levels is accomplished by using 53 O₃ level measurement points and 72 CO level measurement points from air quality monitoring data in the Daerah Istimewa Yogyakarta Period I 2018. The results show that the semivariogram model with the smallest Mean Error (ME) value is the gaussian model, with only a 0.003 difference from the spherical model. The Gaussian model has the smallest Root Mean Squared Error (RMSE), but it differs from the spherical model by only 0.002. However, when the Mean Squared Deviation Ratio (MSDR) values of the three models are compared, the spherical model's MSDR value is the smallest and closest to 1. As a result, the spherical model is the best geometric anisotropy semivariogram model with the smallest ME and RMSE values and an MSDR value close to 1.

Keywords: *Spatial Interpolation, Ordinary Cokriging, Geometric Anisotropy Semivariogram, O₃ Level*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR	v
PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH.....	vii
ABSTRAK	viii
ABSTRACT.....	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
1. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Batasan Masalah.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
2. TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Data Spasial.....	6
2.1 Variabel Teregional.....	7
2.2 Stasioneritas	8
2.3 Variogram.....	10
2.4 Semivariogram	11
2.4.1 Semivariogram Eksperimental.....	11
2.4.2 Semivariogram Teoritis	12
2.4.3 Semivariogram Anisotropi.....	16
2.5 <i>Cross Semivariogram</i>	18
2.6 <i>Linear Model of Coregionalization</i>	18
2.7 Metode <i>Cokriging</i>	21
2.7.1 Sifat-sifat pada <i>Ordinary Cokriging</i>	22
2.8 <i>Cross Validation</i>	26
2.9 Pencemaran Udara.....	27
2.9.1 Ozon (O ₃).....	28
2.9.2 Karbon Monoksida (CO)	29
3. METODOLOGI PENELITIAN	30
3.1 Sumber Data	30
3.2 Variabel Penelitian	30
3.3 Metode dan Tahapan Penelitian	30
4. HASIL DAN PEMBAHASAN	33
4.1 Pemetaan Lokasi Pengamatan.....	33
4.2 Pemeriksaan Asumsi Stasioneritas.....	34
4.3 Pemodelan Semivariogram	37
4.3.1 Pemodelan Semivariogram Anisotropi Kadar O ₃	37

4.3.2	Pemodelan Semivariogram dengan <i>Linear Model of Coregionalization</i>	39
4.4	Pemilihan Model Semivariogram Terbaik	44
4.5	Estimasi Kadar O ₃ menggunakan <i>Ordinary Cokriging</i>	45
5.	PENUTUP	50
5.1	Kesimpulan.....	50
5.2	Saran.....	50
	DAFTAR PUSTAKA	52
	LAMPIRAN	55

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.	Jenis variabel tereregional berdasarkan lokasi sampel.....	8
Gambar 2.2.	Contoh plot stasioneritas data spasial	9
Gambar 2.3.	Semivariogram Teoritis.....	12
Gambar 2.4.	Semivariogram Model <i>Spherical</i>	14
Gambar 2.5.	Semivariogram Model <i>Exponential</i>	14
Gambar 2.6.	Semivariogram Model <i>Gaussian</i>	15
Gambar 2.7.	Plot <i>range</i> anisotropi dua dimensi	17
Gambar 4.1.	Lokasi Pengukuran Kadar O ₃ dan CO di DIY Periode I Tahun 2018.....	33
Gambar 4.2.	Plot 2 Dimensi Kadar O ₃ terhadap Absis dan Ordinat.....	34
Gambar 4.3.	Plot 2 Dimensi Kenaikan Kadar CO terhadap Absis dan Kadar CO terhadap Ordinat	35
Gambar 4.4.	(a) Plot 3 Dimensi Kadar O ₃ ; (b) Plot 3 Dimensi Kadar CO	35
Gambar 4.5.	Semivariogram Eksperimental Kadar O ₃ pada 4 Arah/Sudut Anisotropi.....	37
Gambar 4.6.	Plot Perbandingan Semivariogram Eksperimental Kadar O ₃ pada 4 Arah/Sudut Anisotropi dengan Variansi Data.....	38
Gambar 4.7.	Plot Semivariogram (<i>direct</i> dan <i>cross</i>) Kadar O ₃ dan CO Model <i>Spherical</i>	43
Gambar 4.8.	Peta Hasil Estimasi Kadar O ₃ di DIY Periode I Tahun 2018 menggunakan Metode <i>Ordinary Cokriging</i> dengan Semivariogram Anisotropi <i>Spherical</i>	45
Gambar 4.9.	Peta Hasil Estimasi Kadar O ₃ Menggunakan Metode <i>Ordinary Cokriging</i> dengan Semivariogram Anisotropi <i>Spherical</i> serta Titik Pengamatan Kadar O ₃ dan CO di DIY Periode I Tahun 2018.....	47
Gambar 4.10.	Peta Varians Galat dari Hasil Estimasi Kadar O ₃ di DIY Periode I Tahun 2018 Menggunakan Metode <i>Ordinary Cokriging</i> dengan Semivariogram Anisotropi <i>Spherical</i>	48
Gambar 4.11.	Peta Varians Galat dari Hasil Estimasi Kadar O ₃ Menggunakan Metode <i>Ordinary Cokriging</i> dengan Semivariogram Anisotropi <i>Exponential</i> serta Lokasi Pengukuran Kadar O ₃ dan CO di DIY Periode I Tahun 2018.....	49

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. Nilai Kadar O ₃ dan CO serta Koordinat pada Lokasi Pemantauan Kualitas Udara.....	30
Tabel 4.1. Hasil Uji <i>Augmented Dickey-Fuller</i> pada Kadar O ₃ dan CO Terhadap Titik Absis (<i>Easting</i>) dan Titik Ordinat (<i>Northing</i>) dari Koordinat Lokasi Pengukuran.....	36
Tabel 4.2. Nilai Parameter Semivariogram Anisotropi Kadar O ₃	38
Tabel 4.3. Nilai Parameter Semivariogram (<i>direct</i> dan <i>cross</i>) Kadar O ₃ dan CO	40
Tabel 4.4. Nilai ME, RMSE, dan MSDR Semivariogram (<i>direct</i> dan <i>cross</i>) Kadar O ₃ model <i>Spherical</i> , <i>Exponential</i> , dan <i>Gaussian</i>	44

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data kadar O ₃ ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) dan CO ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) periode I di Daerah Istimewa Yogyakarta Tahun 2018.....	56
Lampiran 2. Perhitungan manual semivariogram dan <i>cross-semivariogram</i> eksperimental pada sampel kecil	57
Lampiran 3. Plot semivariogram anisotropi kadar O ₃ model <i>spherical</i> , <i>exponential</i> , dan <i>gaussian</i>	62
Lampiran 4. Plot semivariogram (<i>direct</i> dan <i>cross</i>) kadar O ₃ dan CO untuk model <i>exponential</i> dan <i>gaussian</i>	63
Lampiran 5. Hasil <i>cross validation</i> dengan prosedur LOOCV semivariogram (<i>direct</i> dan <i>cross</i>) model <i>spherical</i> untuk kadar O ₃	64
Lampiran 6. Hasil <i>cross validation</i> dengan prosedur LOOCV semivariogram (<i>direct</i> dan <i>cross</i>) model <i>exponential</i> untuk kadar O ₃	66
Lampiran 7. Hasil <i>cross validation</i> dengan prosedur LOOCV semivariogram (<i>direct</i> dan <i>cross</i>) model <i>gaussian</i> untuk kadar O ₃	68

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Geostatistika muncul pada awal 1980an sebagai perpaduan dari disiplin ilmu teknik pertambangan, geologi, matematika dan statistika (Cressie, 1993). Geostatistika berfokus pada data spasial dan mampu memodelkan baik kecenderungan spasial (*spatial trend*) maupun korelasi spasial (*spatial correlation*) (laksana, 2010). Geostatistika menjadi solusi akan keterbatasan titik sampel pada suatu daerah dengan melakukan interpolasi atau memprediksi titik yang tidak tersampel. Metode geostatistika untuk interpolasi mengasumsikan bahwa atribut data bersifat kontinu di dalam ruang jarak (*space*) dan atribut saling berkorelasi secara spasial. Kedua asumsi tersebut berimplikasi pada logika bahwa pendugaan atribut data dapat dilakukan berdasarkan data dari lokasi-lokasi di sekitarnya dan nilai pada titik-titik yang berdekatan akan mempunyai kemiripan lebih besar dibanding titik-titik yang jauh terpisah (Hadi, 2013). Interpolasi dengan geostatistika dikenal dengan istilah “kriging” yang dikemukakan oleh D.G Krige.

Kriging merupakan metode geostatistika yang menggunakan nilai yang diketahui dari lokasi tersampel dan semivariogram untuk memprediksi nilai dilokasi yang tidak tersampel (Tatalovich *et al.*, 2006). Kriging hanya menggunakan variabel primer (variabel utama) untuk mengetahui hubungan spasial antar lokasi. Adapun pengembangan dari kriging disebut *cokriging*, metode ini dapat digunakan pada data yang memiliki hubungan spasial antara variabel primer (variabel utama) dengan variabel sekunder (variabel kovariat). Apabila seluruh variabel yang diukur pada seluruh lokasi sampel tersebut berkorelasi, maka *cokriging* lebih tepat digunakan dari kriging (Wackernagel, 1995). Baik kriging maupun *cokriging* harus memenuhi asumsi stasioneritas pada rata-rata dan ragam.

Menurut Memarsadeghi (2004) *cokriging* dibedakan atas tiga jenis berdasarkan diketahui atau tidak rata-rata (*mean*) dari variabel primer dan sekunder serta batasan pengaruh variabel sekunder terhadap variabel primer, yaitu: *simple cokriging*; *ordinary cokriging*; dan *standardized ordinary cokriging*. Metode *cokriging* yang umum digunakan adalah *ordinary cokriging* karena metode ini sangat membatasi pengaruh variabel sekunder dan mengasumsikan rata-rata

variabel primer dan sekunder konstan tetapi tidak diketahui hasilnya. Metode *ordinary cokriging* dalam prosesnya menambahkan nilai terboboti dari variabel sekunder untuk menduga nilai variabel primer di lokasi tertentu.

Penggunaan semivariogram dalam metode *cokriging* bertujuan untuk menunjukkan korelasi spasial dalam pengamatan yang diukur serta memperoleh pembobot yang optimal. Pembobot yang optimal akan meminimumkan varians galat dan membuat hasil estimasi menjadi tidak bias. Semivariogram dibedakan menjadi dua jenis yaitu semivariogram isotropi dan semivariogram anisotropi. Semivariogram isotropi merupakan jenis semivariogram yang hanya dipengaruhi oleh jarak, sedangkan semivariogram anisotropi dipengaruhi oleh jarak dan arah. Beberapa model semivariogram yang sering digunakan dalam metode *cokriging* adalah model *spherical*, *exponential*, dan *gaussian* (Adelia, 2017). Seiring perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, penerapan *cokriging* telah dilakukan diberbagai bidang dan kasus.

Kualitas udara merupakan salah satu kasus yang dapat diselesaikan dengan metode *cokriging*. Kualitas udara yang dapat mendukung kehidupan manusia apabila kadar pencemarannya tidak melebihi Baku Mutu Udara Ambien (BMUA) pada peraturan pemerintah tentang pengendalian pencemaran udara yang tertuang dalam PP Nomor 41 Tahun 1999. Menurut Noll dan Miller (1977) dalam Rachmawati (2009) kadar kualitas udara yang dekat dari sumbernya akan tinggi dan mulai menurun seiring bertambahnya jarak. Menurut Moestakahadi (2001) dan Rahmawati (1999) arah dan kecepatan angin merupakan faktor utama dalam penyebaran polutan karena dapat menyebabkan zat berpindah tempat. Arah angin menentukan arah penyebaran pencemar, dan kecepatan angin mempengaruhi besar kadar polutan di suatu lokasi. Oleh karena itu, kualitas udara tidak hanya dipengaruhi oleh jarak namun juga arah.

Salah satu parameter yang diukur dalam pemantauan kualitas udara adalah gas ozon (O_3) (Erou & Fadhillah, 2019). Gas O_3 pada lapisan troposfer (ozon permukaan) bersifat racun dan polutan bagi makhluk hidup di bumi. Keberadaan O_3 di atmosfer tidak diemisikan secara langsung, tetapi terbentuk melalui oksidasi fotokimia antara karbon monoksida (CO) dan senyawa organik yang mudah menguap (VOCs) dengan adanya nitrogen oksida ($NO_x = NO + NO_2$) (Ambarsari

et al., 2010). Ambarsari *et al.* (2010) dalam penelitiannya menyimpulkan bahwa CO berpengaruh sebesar 20-80% terhadap pembentukan O₃ di atmosfer. Pencemaran udara perkotaan di Indonesia menunjukkan kecenderungan meningkat dalam dekade terakhir.

Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY) sebagai salah satu provinsi yang mengalami pertumbuhan perekonomian dan laju urbanisasi disertai tingginya aktivitas transportasi, industri, jasa, dan lainnya telah mendorong peningkatan kebutuhan energi. Peningkatan kebutuhan akan energi menjadi pemicu terjadinya pencemaran udara. Badan Lingkungan Hidup (BLH) DIY telah melakukan pengukuran di beberapa titik lokasi guna mengetahui tingkat kadar polutan termasuk O₃. Akan tetapi, karena terhalang oleh alat serta dana yang cukup besar maka tidak banyak titik yang dapat dilakukan pengukuran.

Beberapa penelitian yang menerapkan *cokriging* pada kasus kualitas udara, diantaranya: Setiyowati (2015) menerapkan *cokriging* dengan semivariogram isotropi untuk menginterpolasi konsentrasi sulfur dioksida (SO₂) dan nitrogen dioksida (NO₂) di DKI Jakarta; Fauzi (2018) menerapkan *cokriging* dengan semivariogram anisotropi *exponential*, *stable exponential*, dan *gaussian* untuk menginterpolasi kadar NO₂ dan SO₂ di Jawa Timur. Penelitian yang membandingkan *ordinary kriging* dan *cokriging* telah dilakukan oleh Alemi *et al.* (1988) dan Rachmawati (2009). Hasil penelitian tersebut adalah varian estimasi dengan menggunakan metode *cokriging* sedikit lebih kecil daripada *ordinary kriging*. Selain itu, metode *cokriging* lebih baik dibandingkan *ordinary kriging* berdasarkan perbandingan nilai *Root Mean Square Error* (RMSE). Berdasarkan kajian teori dan permasalahan di atas, interpolasi spasial *ordinary cokriging* dengan semivariogram anisotropi geometris pada kadar O₃ di Daerah Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018 perlu untuk dikaji.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang diatas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Menentukan model semivariogram anisotropi geometris terbaik antara model *spherical*, *exponential*, dan *gaussian* untuk interpolasi *ordinary cokriging* pada kadar O₃ di Daerah Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018?

2. Bagaimana hasil interpolasi spasial *ordinary cokriging* dengan semivariogram anisotropi geometris pada kadar O₃ di Daerah Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah di atas, penelitian bertujuan untuk:

1. Memperoleh model semivariogram anisotropi terbaik antara model *spherical*, *exponential*, dan *gaussian* untuk interpolasi *ordinary cokriging* pada kadar O₃ di Daerah Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018.
2. Memperoleh hasil interpolasi spasial *ordinary cokriging* dengan semivariogram anisotropi geometris pada kadar O₃ di Daerah Istimewa Yogyakarta Periode I Tahun 2018.

1.4 Batasan Masalah

Pada penelitian ini permasalahan yang diteliti dibatasi pada:

1. Data yang digunakan adalah data kadar O₃ dan CO yang diperoleh dari Badan Lingkungan Hidup Daerah Istimewa Yogyakarta Tahun 2018. Data kadar O₃ sebagai variabel primer tersebar di 53 titik lokasi, sedangkan data kadar CO sebagai variabel sekunder tersebar di 72 titik lokasi. Sebanyak 50 titik lokasi yang sama untuk kedua variabel.
2. Jenis semivariogram anisotropi yang digunakan adalah semivariogram anisotropi geometris, dengan arah/sudut anisotropi diantaranya Utara-Selatan (0°), Timur Laut-Barat Daya (45°), Barat-Timur (90°), dan Tenggara-Barat Laut (135°) dengan toleransi sudut sebesar $\pm 22,5^\circ$.
3. Model semivariogram teoritis yang digunakan adalah model *spherical*, *exponential*, dan *gaussian*.
4. Estimasi parameter semivariogram menggunakan metode *Weighted Least Square* (WLS).

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai sumber informasi bagi penelitian selanjutnya terkait penerapan metode *ordinary cokriging* dengan semivariogram anisotropi geometris dalam menginterpolasi data pencemaran udara khususnya kadar O₃.

2. Sebagai sumber informasi bagi Pemerintah Daerah Istimewah Yogyakarta tentang tingkat pencemaran udara khususnya konsentrasi O₃ di Daerah Istimewa Yogyakarta, sehingga dapat dilakukan langkah preventif dan represif dalam menangani pencemaran tersebut.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Data Spasial

Istilah data spasial pertama kali digunakan dalam bidang statistik berupa bentuk data peta. Menurut Cressie (1993), data spasial diperoleh dari lokasi spasial yang berbeda dan menunjukkan adanya ketergantungan dalam pengukuran antar lokasi. Ketergantungan menjadi lemah seiring dengan lokasi data yang semakin tersebar. Oleh karena itu, data spasial memiliki dua informasi yaitu terkait lokasi dan data pengamatan. Data spasial dapat berbentuk data diskrit dan kontinu, serta memiliki lokasi yang beraturan (*regular*) dan tak beraturan (*irregular*). Data spasial dapat diaplikasikan di berbagai bidang, seperti: geologi, ilmu tanah, proses olah citra satelit, epidemiologi, ilmu pertanian, ekologi, kehutanan, astronomi, dan keilmuan lainnya (Setiyowati, 2015). Dua bagian penting yang membedakan data spasial dengan data lain, yaitu (Puntodewo *et al.*, 2003):

1. Informasi lokal (spasial) merupakan informasi yang berhubungan dengan suatu koordinat baik koordinat geografi (lintang dan bujur) dan koordinat XYZ, termasuk diantaranya informasi proyeksi dan datum.
2. Informasi deksriptif (atribut) atau informasi non spasial merupakan suatu lokasi yang memiliki beberapa keterangan yang berkaitan dengannya, misalnya: populasi, jenis vegetasi, dan sebagainya.

Menurut Cressie (1993) data spasial dapat dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu: data geostatistik (*geostatistical data*), data area (*lattice area*), dan pola titik (*point pattern*). Data geostatistik mengarah pada data sampel yang berupa titik, baik beraturan (*regular*) atau tak beraturan (*irregular*) dari suatu distribusi spasial kontinu. Prinsip dasar geostatistika adalah bahwa area yang saling berdekatan cenderung memiliki bobot nilai yang tidak jauh berbeda jika dibandingkan dengan area yang tidak berdekatan (berjauhan). Menurut Isaaks *et al.* (1998), tiga komponen penting dalam geostatistika adalah *correlogram*, fungsi kovariansi, dan semivariogram atau variogram. Tiga komponen tersebut digunakan untuk mendeskripsikan korelasi spasial dari suatu observasi.

2.1 Variabel Teregional

Menurut Matheron (1971) dalam Setiyowati (2015), secara umum ketika suatu objek menyebar di daerah pengamatan dan mempunyai struktur spasial tertentu, maka hal ini disebut teregional (*regionalized*). Oleh karena itu, variabel teregional mempunyai nilai berbeda (bervariasi) dengan berubahnya lokasi/tempat. Teori variabel teregional mempunyai dua tujuan yakni:

1. Secara teori bertujuan untuk mengetahui sifat struktur yang sesuai dari objek.
2. Secara terapan bertujuan untuk mengestimasi variabel teregional dari data sampel yang berbeda atau berada pada lokasi yang terpisah.

Variabel teregional dalam geostatistik dinyatakan seperti dalam persamaan berikut (Cressie, 1993):

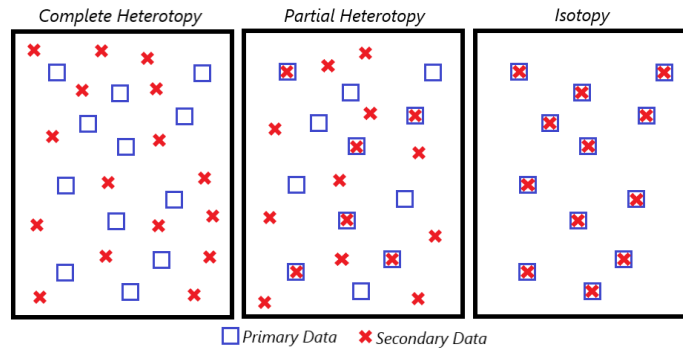
$$\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D\}$$

Dengan D merupakan daerah pengamatan yang berada dalam \mathbb{R}^d , $Z(\mathbf{s}_i)$ secara stokastik dianggap sebagai variabel acak, dan $z(\mathbf{s}_i)$ merupakan hasil pengukurannya pada masing-masing lokasi $\mathbf{s}_i, i = 1, 2, \dots, n$. Variabel \mathbf{s} biasanya merupakan suatu vektor yang berada pada dimensi dua atau tiga. Kumpulan objek pengamatan dinyatakan sebagai $s : \{z(\mathbf{s}_i) : \mathbf{s}_i \in D, \mathbf{s}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ yang merupakan kumpulan variabel acak $s : \{Z(\mathbf{s}_i) : \mathbf{s}_i \in D, \mathbf{s}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Variabel teregional multivariat dibedakan menjadi 3 jenis berdasarkan lokasi pengambilan sampelnya, yaitu (Wackernagel, 1995):

1. *Complete heterotopy*: Semua variabel teregional diukur dari himpunan titik sampel dan lokasi pengambilan sampel yang berbeda.
2. *Partial heterotopy*: Beberapa variabel teregional diukur dari lokasi pengambilan sampel yang sama.
3. *Isotopy*: Semua variabel teregional diukur dari lokasi pengambilan sampel yang sama.

Penggunaan *complete heterotopy* akan menimbulkan masalah dalam penentuan model *cross-variogram* atau *cross-covariance*. *Cross-variogram* eksperimental tidak dapat dihitung pada data *complete heterotopy*. Adapun yang disarankan adalah dengan menggunakan *partial heterotopy* apabila memungkinkan, dan dalam penentuan model *cross-variogram* atau *cross-covariance* dengan menggunakan subset *isotopy* dari data (Wackernagel, 1995).



Gambar 2.1. Jenis variabel terregional berdasarkan lokasi sampel

2.2 Stasioneritas

Menurut Delfiner (1999) dalam Alfiana (2010), baik metode kriging maupun *cokriging* dapat digunakan apabila data yang tersedia bersifat stasioner. Suatu data bersifat stasioner apabila data tersebut tidak memiliki kecenderungan terhadap *trend* tertentu. Artinya, fluktuasi data berada disekitar suatu nilai rata-rata yang konstan serta tidak bergantung pada waktu dan variansi dari fluktuasi tersebut. Terdapat 3 macam stasioneritas dalam geostatistika, yaitu (Cressie, 1993):

1. *Strictly Stationarity*

Suatu fungsi acak $\{Z(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in D\}$ dikatakan *strictly stationarity* dalam daerah pengamatan D apabila memenuhi persamaan berikut:

$$F_{\mathbf{s}_1+\mathbf{h}, \mathbf{s}_2+\mathbf{h}, \dots, \mathbf{s}_n+\mathbf{h}}(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv F_{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n}(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (2.2)$$

$$\forall n \geq 1, \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$$

Artinya, fungsi distribusi kumulatif sama untuk sebarang nilai \mathbf{h} . Dengan \mathbf{h} merupakan suatu konstanta jarak dan \mathbf{s}_i adalah lokasi pengamatan.

2. *Second-Order Stationarity*

Second-order stationarity merupakan jenis stasioner yang lebih lemah dibanding *strictly stationarity*. Syarat suatu fungsi acak dikatakan *second-order stationarity* apabila memenuhi asumsi berikut:

a. $E[Z(\mathbf{s})] = \mu(\mathbf{s}) = \mu, \forall \mathbf{s} \in D$

Dengan μ adalah rata-rata yang sebenarnya dari suatu distribusi. Artinya nilai ekspektasi akan konstan untuk semua lokasi \mathbf{s} . Sehingga diperoleh asumsi yang kedua.

b. $E[(Z(\mathbf{s}) - \mu)(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - \mu)] = Cov(\mathbf{h})$

$$E[Z(\mathbf{s})Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] - \mu^2 = Cov(\mathbf{h}), \forall \mathbf{s} \quad (2.3)$$

Second order stationarity mengasumsikan bahwa kovarians pada persamaan (2.3) untuk $Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})$ ada, dan hanya tergantung pada jarak \mathbf{h} yang tidak pada lokasi \mathbf{s} .

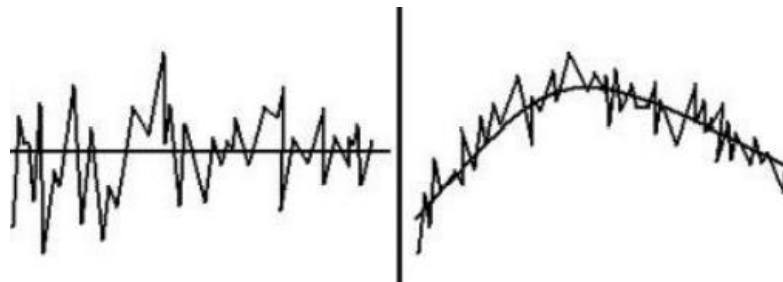
3. *Intrinsic Stationarity*

Intrinsic Stationarity merupakan jenis stasioneritas yang paling lemah. Menurut Wackernagel (1995), suatu variabel acak $Z(\mathbf{s})$ dikatakan *intrinsic stationarity* apabila memenuhi persamaan berikut:

- a. $E[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})] = 0, \forall \mathbf{s}$
- b. $Var[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})] = 2\gamma(\mathbf{h}), \forall \mathbf{s}$ (2.4)

Stasioner intrinsik terjadi apabila rata-rata setiap kenaikan $Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})$ tidak bergantung pada \mathbf{x} dan bernilai nol (0), serta varians setiap kenaikan $Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})$ hanya bergantung pada \mathbf{h} . $2\gamma(\mathbf{h})$ dikenal sebagai variogram dan merupakan parameter penting dari geostatistik.

Kestasioneran data spasial dapat ditentukan menggunakan plot seperti pada Gambar 2.3. Plot stasioneritas dapat dibuat dengan memplotkan titik-titik pengamatan pada setiap lokasi sampel terhadap masing-masing sumbu X dan Y yang merupakan koordinat lokasi. Plot yang dihasilkan berbentuk plot 2 dimensi dan 3 dimensi. Apabila data tersebut tidak stasioner maka perlu dilakukan transformasi data untuk menghilangkan *trend* yang ada.



Gambar 2.2. Contoh plot stasioneritas data spasial

Cara lain untuk memeriksa asumsi stasioneritas adalah dengan melakukan uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF). Uji ADF merupakan pengembangan uji *Dickey-Fuller* untuk menguji apakah data stasioner atau tidak. Prosedur pengujian uji ADF diterapkan pada model (model diasumsikan konstan dan tidak terdapat *trend*):

$$\Delta z(s_i) = \varphi_1 + \varphi_2 z(s_{i-1}) + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta z(s_{i-j}) + \varepsilon(s_i)$$

Dengan:

φ_1 : konstanta

p : lag order dari proses autoregresif

Hipotesis pada uji ADF adalah sebagai berikut:

$H_0: \varphi_2 = 0$ (Data tidak stationer)

$H_1: \varphi_2 < 0$ (Data stasioner)

Dengan statistik uji yang digunakan adalah

$$DF_{hitung} = \frac{\hat{\varphi}}{SE(\hat{\varphi})}$$

DF_{hitung} yang diperoleh dibandingkan dengan DF_{tabel} (*critical value*) dari uji *Dickey-Fuller*. H_0 ditolak apabila $DF_{hitung} < DF_{tabel}$. Apabila H_0 ditolak maka data memenuhi asumsi stasioneritas.

2.3 Variogram

Menurut Wackernagel (1995), variogram adalah metode analisis keragaman data spasial yang didasarkan pada pengukuran jarak. Variogram berperan dalam menentukan jarak yang menunjukkan nilai antar data pengamatan menjadi tidak saling tergantung atau tidak saling berkorelasi. Hal ini dikarenakan jika ada dua buah data spasial yang letaknya berdekatan, maka nilainya akan relatif sama dibandingkan dengan dua buah data spasial yang letaknya berjauhan. Oleh karena itu, variogram berperan penting dalam analisis data geostatistik. Variogram secara matematis dirumuskan sebagai berikut (Cressie, 1993):

$$2\gamma(\mathbf{h}) = E[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})]^2$$

Misalkan $V = [Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})]^2$, maka:

$$2\gamma(\mathbf{h}) = E[V]$$

$$2\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{|N(\mathbf{h})|} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} V$$

$$2\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{|N(\mathbf{h})|} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}_i)]^2$$

$$2\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{|N(\mathbf{h})|} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - z(\mathbf{s}_i)]^2 \quad (2.5)$$

Dengan:

$2\gamma(\mathbf{h})$: Variogram

$z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})$: Nilai pengamatan di titik $\mathbf{s}_i + \mathbf{h}$

$z(\mathbf{s}_i)$: Nilai pengamatan di titik \mathbf{s}_i

$|N(\mathbf{h})|$: Banyaknya pasangan titik yang mempunyai jarak \mathbf{h}

2.4 Semivariogram

Pendugaan pada data spasial, menggunakan suatu perangkat statistik dalam menggambarkan, memodelkan, dan menghitung korelasi spasial antar variabel acak $Z(\mathbf{s})$ dan $Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})$, yang disebut dengan semivariogram. Besarnya nilai semivariogram adalah setengah dari nilai variogram (Cressie, 1993). Semivariogram dibedakan menjadi semivariogram eksperimental dan semivariogram teoritis.

2.4.1 Semivariogram Eksperimental

Semivariogram eksperimental merupakan semivariogram yang diperoleh dari data hasil pengamatan. Untuk semua pasangan jarak yang mungkin $(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ untuk $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ diplotkan sebagai fungsi dari jarak \mathbf{h} yang dinyatakan pada persamaan berikut (Cressie, 1993):

$$|\mathbf{h}| = |\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j| = |(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2|^{1/2}$$

Dengan:

\mathbf{s}_i dan \mathbf{s}_j : lokasi ke-i dan ke-j

x_i dan x_j : *easting* lokasi ke-i dan ke-j

y_i dan y_j : *northing* lokasi ke-i dan ke-j

Kesulitan dalam melihat pola ketika perhitungan melibatkan titik hingga ribuan, dapat diatasi dengan melakukan pengelompokan pada semivariogram berdasarkan kesamaan jarak. Proses pengelompokan ini disebut sebagai proses *binning*. Perhitungan semivariogram eksperimental untuk jarak \mathbf{h} , baik pada bentuk data geostatistik yang beraturan maupun tidak beraturan adalah sama, yaitu dengan menggunakan persamaan (2.6) (Cressie, 1993):

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - z(\mathbf{s}_i)]^2 \quad (2.6)$$

Dengan:

$\hat{\gamma}(\mathbf{h})$: Semivariogram eskperimental

$z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})$: Nilai pengamatan di titik $\mathbf{s}_i + \mathbf{h}$

$z(\mathbf{s}_i)$: Nilai pengamatan di titik \mathbf{s}_i

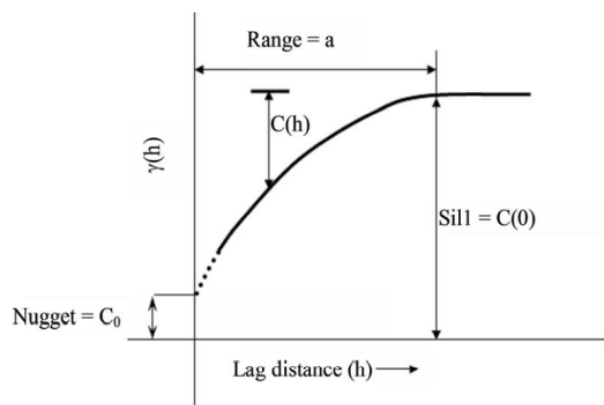
$|N(\mathbf{h})|$: Banyaknya pasangan titik yang mempunyai jarak \mathbf{h}

Memploting semivariogram eksperimental dapat dilakukan dengan 2 (dua) cara berikut (Setiyowati, 2015):

1. *Standart*, memplotkan rata-rata perbedaan kuadrat ($\gamma(\mathbf{h})$) dengan kelas jarak (\mathbf{h}). Kelebihan dari cara ini adalah semua informasi dapat disintesa ke dalam suatu titik per kelas, namun kelemahannya terkait detail informasi yang akan hilang.
2. Awan variogram (*variogram cloud*), memplotkan “awan” setiap selisih kuadrat ($[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s})]^2$) dengan kelas jarak (\mathbf{h}).

2.4.2 Semivariogram Teoritis

Semivariogram eksperimental yang berasal dari data masih memiliki bentuk yang tidak teratur dan sulit untuk ditafsirkan. Oleh karena itu, analisis lebih lanjut mengharuskan untuk mengganti semivariogram eksperimental dengan semivariogram teoritis. Hal ini memungkinkan untuk dilakukan karena semivariogram teoritis mempunyai kurva yang mendekati semivariogram eksperimental. Tujuan dari penggantian ini agar model semivariogram dapat sesuai dengan karakteristik variabel yang akan diestimasi. Secara umum grafik semivariogram teoritis diilustrasikan pada Gambar 2.3 berikut:



Gambar 2.3. Semivariogram Teoritis

Komponen atau parameter dalam semivariogram dijelaskan sebagai berikut (Cressie, 1993):

1. *Nugget Effect* (C_0) adalah nilai semivariogram atau keragaman pada jarak mendekati nol. Varians pada jarak yang sangat kecil termasuk kesalahan dalam pengukuran adalah hal yang dapat diketahui dari *nugget*. *Nugget effect* dinyatakan pada persamaan berikut:

$$C_0 = C_{MS} + C_{ME}$$

Dengan C_0 merupakan *nugget effect*, C_{MS} merupakan ragam jarak kecil, dan C_{ME} merupakan kesalahan pengukuran.

2. *Sill* ($C_0 + C$) adalah nilai saat semivariogram cenderung mencapai nilai yang stabil atau pada saat besarnya jarak konstan. Nilai *sill* sama dengan nilai varians dari data spasial. Semivariogram yang telah mencapai *sill* mengindikasikan tidak adanya korelasi antar sampel. *Sill* terdiri atas *nugget effect* dan *partial sill*.
3. *Range* (a) adalah jarak terjauh saat semivariogram telah mencapai *sill* yang menunjukkan tidak terdapat korelasi spasial. Asumsi yang digunakan adalah autokorelasi sama dengan 0 diluar dari *range*.

Derajat ketergantungan spasial yang didefinisikan sebagai rasio antara *nugget* dengan *sill* pada semivariogram, menunjukkan tingkat autokorelasi spasial. Adanya autokorelasi spasial mengindikasikan bahwa nilai suatu variabel pada area tertentu dipengaruhi oleh nilai variabel tersebut pada area lain yang terletak berdekatan. Tingkat autokorelasi spasial berdasarkan rasio *nugget-sill* terbagi menjadi tiga, yaitu < 25% tergolong kuat, 25-75% tergolong wajar atau sedang (*moderate*), dan > 75% tergolong lemah (Cambardella *et al.*, 1994).

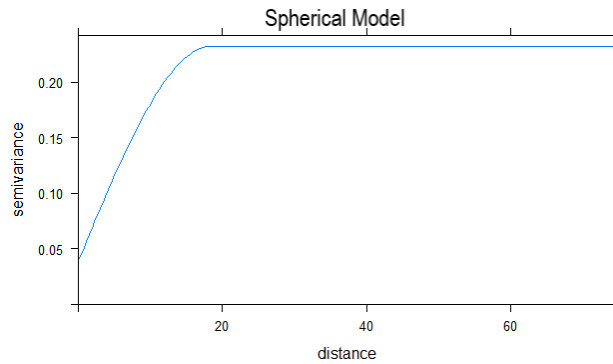
Model semivariogram teoritis yang umumnya digunakan dalam pemodelan adalah model *spherical*, *exponential*, dan *gaussian*. Untuk ketiga model, $C_0 + C$ merupakan *sill*, C_0 merupakan *nugget*, dan a merupakan *range*. Berikut penjelasan untuk masing-masing model:

1. Model *Spherical*

Secara umum, bentuk model *spherical* sesuai dengan variabel yang diamati dan mempunyai ekspresi polinomial yang sederhana. Semivariogram model *spherical* dinyatakan dalam persamaan berikut (Cressie, 1993):

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & , \mathbf{h} = 0 \\ C_0 + C \left\{ \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^3 \right\} & , 0 < |\mathbf{h}| \leq a \\ C_0 + C & , |\mathbf{h}| > a \end{cases} \quad (2.7)$$

Semua nilai untuk C_0 , C , dan a adalah positif. Bentuk grafik kenaikan dari model *spherical* hampir linier sampai pada satu jarak tertentu, kemudian mencapai nilai *sill*. Gambar 2.4 merupakan bentuk dari *spherical model*.



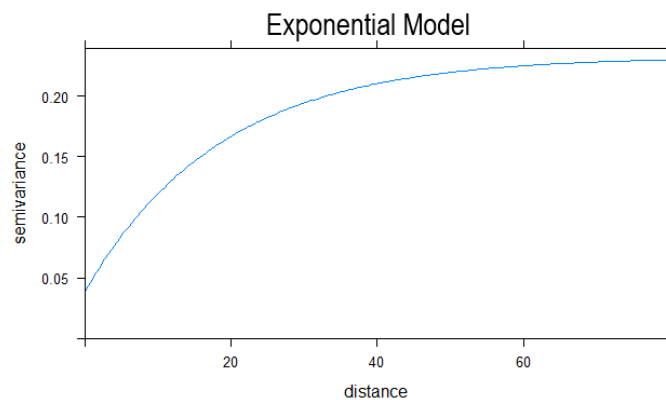
Gambar 2.4. Semivariogram Model *Spherical*

2. Model *Exponential*

Model *exponential* mengalami peningkatan nilai pada awal semivariogram dan mencapai *sill* secara asimtotik. Semivariogram model *exponential* dinyatakan dalam persamaan berikut (Robertson, 2008):

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & , \mathbf{h} = 0 \\ C_0 + C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right) \right\} & , \mathbf{h} \neq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Nilai dari C_0 , C , dan a adalah positif. *Range* pada model *exponential* merupakan nilai saat semivariogram mencapai 95% dari *sill*, dikarenakan untuk model ini *range* yang efektif adalah $3a$. Semivariogram *exponential model* diilustrasikan pada Gambar 2.5.



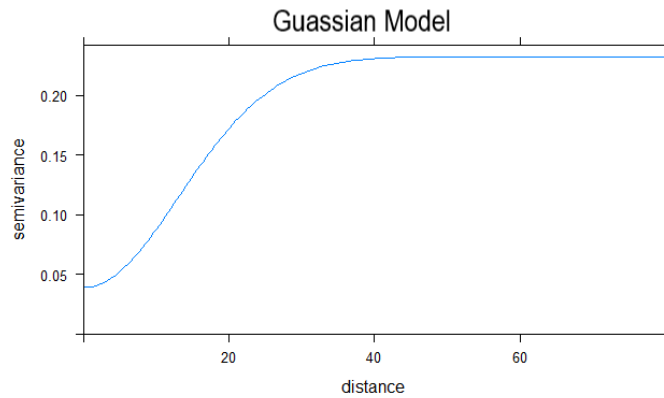
Gambar 2.5. Semivariogram Model *Exponential*

3. Model *Gaussian*

Model *gaussian* merupakan bentuk kuadrat dari eksponensial yang menghasilkan bentuk parabolik pada jarak yang dekat. Model ini juga mencapai *sill* secara asimtotik. Semivariogram model *gaussian* dinyatakan dalam persamaan berikut (Robertson, 2008):

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & , \mathbf{h} = 0 \\ C_0 + C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^2 \right\} & , 0 < |\mathbf{h}| < a \end{cases} \quad (2.9)$$

dengan nilai *range* yang efektif adalah sama dengan $3^{0,5}a$. Gambar 2.6 mengilustrasikan bentuk semivariogram model *gaussian*.



Gambar 2.6. Semivariogram Model *Gaussian*

Menurut Jian *et al.* (1996), metode analitik yang dapat digunakan dalam menaksir parameter semivariogram teoritis dari semivariogram eksperimental adalah metode *Maximum Likelihood* (ML) dan metode *Least Square*. Metode ML memiliki beberapa masalah seperti sangat bergantung pada asumsi distribusi normal dan estimasi bias. Selain itu, metode ini sangat lambat apabila diterapkan pada ukuran sampel yang lebih besar dari 150. Dibanding metode ML, metode *least square* lebih baik karena memperhitungkan kesesuaian antar plot semivariogram dengan model yang terbentuk (Cressie, 1993). Berdasarkan perbedaan skema pembobotan, metode *least square* terbagi dalam tiga jenis antara lain *Ordinary Least Square* (OLS), *Weighted Least Square* (WLS), dan *Generalized Least Square* (GLS). Diantara ketiga jenis metode *least square* tersebut, metode WLS merupakan metode yang tepat dalam menaksir parameter semivariogram. Berdasarkan prosedur WLS, semivariogram eksperimental digunakan untuk menentukan nilai Ψ yang meminimumkan *Weighted Sum of Square* (WSS) (Cressie, 1993):

$$WSS = \sum_{k=1}^K N(\mathbf{h}_k) [\hat{\gamma}(\mathbf{h}_k) - \gamma(\mathbf{h}_k; \Psi)]^2$$

Dengan,

$N(\mathbf{h}_k)$: banyaknya pasangan titik pengukuran pada *lag* ke- k , $k = 1, 2, \dots, K$, K adalah banyaknya lag

$\hat{\gamma}(\mathbf{h}_k)$: nilai semivariogram eksperimental pada *lag* ke- k

$\gamma(\mathbf{h}_k; \Psi)$: nilai semivariogram teoritis pada *lag* ke- j dengan parameter
 $\Psi = \{C_0, C, a\}$

2.4.3 Semivariogram Anisotropi

Semivariogram anisotropi merupakan semivariogram yang memperhatikan pengaruh jarak maupun arah dari vektor jarak \mathbf{h} dalam perhitungannya. Anisotropi terjadi ketika varians untuk setiap arah tidak sama. Terdapat dua kondisi dalam semivariogram anisotropi. Kondisi pertama disebut semivariogram geometri, terjadi apabila nilai *range* berubah mengikuti perubahan arah tetapi *sill* tetap maka. Kondisi kedua disebut semivariogram anisotropi zonal, terjadi apabila nilai *range* sama tetapi *sill* berubah seiring perubahan arah. Contoh anisotropi seperti pemantauan polusi udara berdasarkan arah angin, kontaminasi pada media penyerapan, dan lainnya.

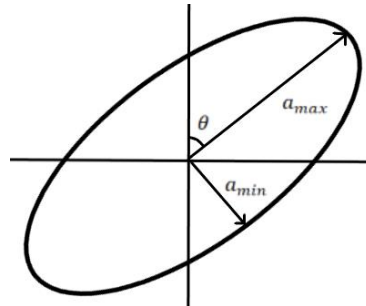
Pemodelan semivariogram merupakan dasar untuk analisis *cokriging*. Model variogram teoritis untuk *cokriging* didasarkan pada model isotropi, maka anisotropi perlu untuk dikoreksi kebentuk isotropi (Budrikaite & Ducinskas, 2005). Menurut Journal dan Huijbregts (1978) dalam Setiyowati (2015), pengkoreksian anisotropi dilakukan dengan transformasi linier koordinat dari vektor (h_x, h_y) dari vektor \mathbf{h} . Akan tetapi, hanya semivariogram anisotropi geometris yang dapat dikoreksi dengan transformasi linier sederhana sedangkan semivariogram anisotropi zonal tidak. Menurut Budrikaite dan Ducinskas (2005), anisotropi geometri dapat dimodelkan dengan memodifikasi model semivariogram untuk proses isotropi yang mengubah koordinat seperti pada persamaan berikut:

$$\gamma(\mathbf{h}') = \gamma(\|\mathbf{A}\mathbf{h}\|) \quad (2.11)$$

Dengan \mathbf{h}' merupakan vektor jarak hasil transformasi linier dan \mathbf{A} merupakan matriks transformasi. Tahapan dalam prosedur transformasi pada kasus dua dimensi sebagai berikut (Budrikaite & Ducinskas, 2005):

1. Mengidentifikasi sumbu anisotropi. Menurut Respatti *et al.* (2014), kondisi anisotropi biasanya diselidiki dengan memilih minimal empat arah. Empat arah yang sering dipakai diantaranya adalah Utara-Selatan ($\theta = 0^\circ$), Timur Laut-Barat Daya ($\theta = 45^\circ$), Barat-Timur ($\theta = 90^\circ$), dan Tenggara-Barat Laut ($\theta = 135^\circ$). Setelah penaksiran parameter pada grafik model semivariogram dilakukan, selanjutnya *range* diplot dalam dua dimensi

membentuk *ellips* yang digunakan untuk menentukan sumbu anisotropi meliputi sumbu mayor dan minor. Sumbu mayor ditentukan berdasarkan arah yang memiliki nilai *range* terpanjang sedangkan sumbu minor tegak lurus terhadap sumbu axis mayor. Gambar 2.7 secara sederhana menampilkan plot *range* anisotropi dua dimensi (Budrikaite & Ducinskas, 2005).



Gambar 2.7. Plot *range* anisotropi dua dimensi

2. Memutar sumbu dari data agar sesuai dengan sumbu anisotropi. Proses ini dapat dilakukan dengan menggunakan matriks rotasi.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Dengan θ merupakan sudut dari y (arah utara) ke sumbu mayor.

3. Mereduksi semivariogram (*directional semivariogram*) menjadi semivariogram tunggal dengan *range* yang terstandarisasi. Transformasi jarak dapat direpresentasikan sebagai matriks,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{min}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{max}} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Dengan a_{max} merupakan *range* pada sumbu mayor, dan a_{min} merupakan *range* dari sumbu minor.

4. Tahap akhir adalah menggabungkan matriks transformasi rotasi (2.12) dan matriks transformasi jarak (2.13) sehingga diperoleh matriks transformasi,

$$\mathbf{A} = \mathbf{TR} \quad (2.14)$$

Berdasarkan prosedur di atas, persamaan (2.14) disubstitusi ke persamaan (2.11) sehingga diperoleh persamaan keseluruhan,

$$\gamma(\mathbf{h}') = \gamma(\|\mathbf{TRh}\|) \quad (2.15)$$

2.5 Cross Semivariogram

Penggunaan variabel sekunder pada metode *ordinary cokriging* bertujuan untuk meningkatkan nilai prediksi dari variabel primer pada titik yang belum tersampel. Oleh karena itu, metode *ordinary cokriging* juga perlu memodelkan *cross semivariogram* untuk mengukur independensi spasial dua variabel. *Cross semivariogram* dinyatakan dalam persamaan (2.16) berikut (Donovan, 2015):

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{12}(\mathbf{h}) &= E[[Z_1(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z_1(\mathbf{s})][Z_2(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z_2(\mathbf{s})]] \\ \hat{\gamma}_{12}(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [Z_1(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - Z_1(\mathbf{s}_i)][Z_2(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - Z_2(\mathbf{s}_i)] \\ \hat{\gamma}_{12}(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z_1(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - z_1(\mathbf{s}_i)][z_2(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - z_2(\mathbf{s}_i)]\end{aligned}\quad (2.16)$$

Dengan:

- $\hat{\gamma}_{1,2}(\mathbf{h})$: *Cross semivariogram*
- $z_1(\mathbf{s}_i), z_1(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})$: Nilai pengamatan variabel primer di titik $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i + \mathbf{h}$
- $z_2(\mathbf{s}_i), z_2(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})$: Nilai pengamatan variabel sekunder di titik $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i + \mathbf{h}$
- $|N(\mathbf{h})|$: Banyaknya pasangan titik yang mempunyai jarak \mathbf{h}

Pemodelan *cross semivariogram* dapat dilakukan ketika lokasi pengambilan variabel tereregional bersifat *partial heterotopy* atau *isotopy*. Menurut Wackernagel (1995), dalam kasus *partial heterotopy*, *cross semivariogram* dapat dihitung menggunakan subset *isotopy* dari data.

2.6 Linear Model of Coregionalization

Hubungan antara variabel primer dan sekunder harus dimodelkan dengan fungsi matematika agar dapat diterima dalam proses *ordinary cokriging*. Proses ini membutuhkan model semivariogram untuk masing-masing variabel (*direct*) dan hubungan antar variabel (*cross*). Satu-satunya model yang dapat diterima adalah *Linear Model of Coregionalization* (LMC) (Donovan, 2015). LMC menjamin bahwa semua model semivariogram (*direct* dan *cross*) yang disesuaikan mengarah pada sistem *ordinary cokriging* definit positif. Semivariogram (*direct* dan *cross*) yang diperoleh melalui LMC memiliki model dan *range* yang sama, tetapi *partial sill* dan *nugget* kemungkinan berbeda. LMC dapat diterapkan pada kasus dua variabel acak atau lebih, tetapi paling umum digunakan di dua variabel acak. Jumlah struktur yang dapat ditangani adalah satu, dua, atau lebih, tetapi paling umum digunakan di dua struktur. Model semivariogram terkait dengan *nugget* dan model

struktural lainnya (*spherical, exponential, gaussian*, dll atau kombinasi dari beberapa model) (Goovaerts, 1997). LMC terbentuk dari model struktur tersarang dari kombinasi linier model semivariogram sebagai berikut:

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \sum_{l=0}^L b_{ijl} g_l(\mathbf{h}) \quad (2.17)$$

Dengan, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, p$, p merupakan banyaknya variabel, dan L merupakan jumlah struktur tersarang model yang digunakan. Bentuk matriks (*multivariate*) persamaan (2.17) sebagai berikut:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\mathbf{h}) & \dots & \gamma_{1p}(\mathbf{h}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{np}(\mathbf{h}) & \dots & \gamma_{pp}(\mathbf{h}) \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^L \mathbf{B}_l g_l(\mathbf{h}) \quad (2.18)$$

Dengan,

\mathbf{B}_l : matriks persegi definit positif koefisien semivariogram (matriks

$$\text{koregionalisasi), } \mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} b_{11l} & \dots & b_{1pl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{npl} & \dots & b_{ppl} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{h})$: matriks semivariogram pada jarak \mathbf{h} , diagonal $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{h})$ merupakan semivariogram dan *off diagonal* merupakan *cross semivariogram*.

g_l : dugaan fungsi semivariogram yang bersifat semi-definit positif.

l : struktur model dengan $s = 0, 1, 2, \dots, L$.

Berikut contoh LMC untuk 2 variabel acak dengan 2 struktur. Dalam kasus ini 3 semivariogram dengan model dan *range* yang sama, sedangkan *partial sill* dan *nugget* kemungkinan berbeda.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11}(\mathbf{h}) & \gamma_{12}(\mathbf{h}) \\ \gamma_{21}(\mathbf{h}) & \gamma_{22}(\mathbf{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{110} & b_{120} \\ b_{210} & b_{220} \end{bmatrix} g_0(\mathbf{h}) + \begin{bmatrix} b_{111} & b_{121} \\ b_{211} & b_{221} \end{bmatrix} g_1(\mathbf{h})$$

Definit positif apabila memenuhi:

$$b_{110} > 0, b_{220} > 0, b_{111} > 0, b_{221} > 0, b_{120} \leq \sqrt{b_{110} b_{220}}, b_{121} \leq \sqrt{b_{111} b_{221}}$$

Goulard (1989) dalam Goovaerts (1997) mengusulkan prosedur iteratif agar sesuai dengan *Linier Model of Coregionalization* (LMC) dibawah kendala definit positif dari matriks koregionalisasi \mathbf{B}_l . Algoritma ini bertujuan untuk meminimalkan jumlah kuadrat tertimbang (*weighted sum of square*) dari selisih antara nilai semivariogram eksperimental dan teoritis (*cross*):

$$WSS = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p N(\mathbf{h}_k) \cdot \frac{[\hat{\gamma}_{ij}(\mathbf{h}_k) - \gamma_{ij}(\mathbf{h}_k)]^2}{\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_j}$$

Pembobot dari *lag* ke-*k* sebanding dengan jumlah $N(\mathbf{h}_k)$ pasangan yang digunakan dalam estimasi. Guna mencegah variabel dengan varians terbesar mendominasi WSS, maka setiap galat $[\hat{\gamma}_{ij}(\mathbf{h}_k) - \gamma_{ij}(\mathbf{h}_k)]$ distandarisasi dengan simpangan baku $\hat{\sigma}_i$ dan $\hat{\sigma}_j$. Menggunakan notasi matriks, persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$WSS = \sum_{k=1}^K w(\mathbf{h}_k) \cdot tr \left([\mathbf{V}\{\hat{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{h}_k) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{h}_k)\}]^2 \right)$$

dengan *trace* “tr” adalah jumlah elemen diagonal dari matriks, dan \mathbf{V} adalah matriks diagonal invers standar deviasi. Matriks $\hat{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{h}_k) = \hat{\gamma}_{ij}(\mathbf{h}_k)$ dan $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{h}_k) = \gamma_{ij}(\mathbf{h}_k)$ adalah matriks semivariogram eksperimental dan teoritis. Kesulitan *fitting* LMC dengan metode *Weighted Least Square* (WLS) terletak pada syarat bahwa matriks estimasi koefisien $\hat{\mathbf{B}}_l = [\hat{b}_{ij}^l]$ harus semi-definit positif. Berikut tahapan *fitting* LMC dengan WLS:

1. Pilih nilai awal untuk $L + 1$ matriks koregionalisasi \mathbf{B}_l .
2. Hilangkan salah satu dari $L + 1$ model semivariogram teoritis, katakanlah $g_{l_0}(\mathbf{h})$, dan hitung selisih antar setiap matriks semivariogram eksperimental $\hat{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{h}_k)$ dan LMC termasuk L struktur dasar yang tersisa:

$$\Delta_{l_0} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{h}_k) = \hat{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{h}_k) - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq l_0}}^L \mathbf{B}_l g_l(\mathbf{h}_k)$$

3. Hitung matriks simetris \mathbf{G}_{l_0} :

$$\mathbf{G}_{l_0} = \sum_{k=1}^K \Delta_{l_0} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{h}_k) g_{l_0}(\mathbf{h}_k)$$

4. Tampilkan dekomposisi spektral dari matriks \mathbf{G}_{l_0} :

$$\mathbf{G}_{l_0} = \mathbf{Q}_{l_0} \mathbf{\Lambda}_{l_0} \mathbf{Q}_{l_0}^T$$

Dengan \mathbf{Q}_{l_0} adalah matriks ortogonal ($p \times p$) dari vektor eigen, dan $\mathbf{\Lambda}_{l_0} = [\lambda_{l_0}]$ adalah matriks diagonal dari nilai eigen. Matriks \mathbf{G}_{l_0} belum tentu semi-definit positif karena beberapa nilai eigen mungkin negatif. Matriks semi-definit positif yang paling dekat (dalam arti *least square*) ke matriks \mathbf{G}_{l_0} adalah

$$\mathbf{G}_{l_0}^+ = \mathbf{Q}_{l_0} \mathbf{\Lambda}_{l_0}^+ \mathbf{Q}_{l_0}^T$$

dengan $\mathbf{\Lambda}_{l_0}^+$ adalah matriks $\mathbf{\Lambda}_{l_0}$ dengan semua nilai eigen yang negatif diatur ulang ke nol.

5. Matriks koregionalisasi $\widehat{\mathbf{B}}_{l_0}$ yang meminimalkan WSS dibawah syarat semi-definit positif adalah

$$\widehat{\mathbf{B}}_{l_0} = \frac{\mathbf{G}_{l_0}^+}{\sum_{k=1}^K [g_{l_0}(\mathbf{h}_k)]^2}$$

6. Tentukan nomor indeks baru $l_0 = l_0 + 1$ (l_0 diatur ulang ke nol jika $l_0 > L$), dan ulangi langkah 2 hingga 5 sampai WSS lebih kecil dari nilai ambang batas yang ditentukan oleh peneliti.

Masalah yang dihadapi adalah memilih titik awal yang memuaskan, karena hal tersebut mempengaruhi kecepatan konvergensi. Berdasarkan hasil pengamatan, diperoleh fakta bahwa titik konvergensi selalu tercapai dan titik awal yang berbeda selalu mengarah ke titik konvergensi yang serupa. Oleh karena itu, permasalahan ini tidak terlalu penting, namun tetap harus diperhatikan (Goulard & Voltz, 1992).

2.7 Metode *Cokriging*

Cokriging merupakan metode geostatistika yang dapat mengatasi variabel tereregional multivariat. Apabila seluruh variabel yang diukur pada seluruh lokasi sampel tersebut berkorelasi, maka *cokriging* lebih tepat digunakan dari kriging (Wackernagel, 1995). *Cokriging* dalam prosesnya menggunakan kombinasi linier antara variabel primer dan sekunder. Variabel primer pada *cokriging* adalah variabel utama yang digunakan untuk menginterpolasi sedangkan variabel sekunder adalah variabel kovariat. Variabel sekunder dapat digunakan untuk meningkatkan ketepatan estimasi dan pengurangan jumlah variabel yang sulit diperoleh melalui *cokriging* (Pang *et al.*, 2009).

Hal yang perlu diperhatikan untuk memilih variabel sekunder adalah kandidat harus memiliki (Rossiter, 2012):

1. Korelasi ruang atau spasial dengan variabel target (primer).
2. Struktur spasial (yaitu dimodelkan sebagai variabel tereregional).
3. Varians spasial bersama (kovariansi spasial) dengan variabel target (primer).

Dua cara utama untuk memilih variabel sekunder sebagai berikut ini (Rossiter, 2012):

1. Secara teroris, variabel sekunder mempengaruhi atau berkorelasi dengan variabel primer.

2. Secara empiris, variabel mempengaruhi variabel primer. Dapat diketahui dengan memeriksa korelasi ruang atau spasial menggunakan diagram pencar serta melalui kovariansi spasial (*cross-correlogram* atau *cross-variogram*).

Cokriging bertujuan untuk menemukan pembobot yang akan meminimumkan varians galat dan membuat hasil estimasi menjadi tidak bias. Untuk memastikan ketidakhiasan tersebut, maka terdapat batasan yang dikenakan pada metode cokriging. *Ordinary Cokriging* merupakan salah satu jenis metode *cokriging* yang memberlakukan dua batasan yaitu pada koefisien: $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ dan $\sum_{j=1}^m b_j = 0$. Metode ini sangat membatasi pengaruh variabel sekunder dan mengasumsikan rata-rata variabel primer dan sekunder konstan tetapi tidak diketahui hasilnya.

2.7.1 Sifat-sifat pada *Ordinary Cokriging*

Salah satu tujuan *cokriging* adalah menghasilkan estimator yang bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE). Berikut sifat BLUE pada *Ordinary Cokriging*.

1. *Linear*

Estimasi *cokriging* merupakan kombinasi linier dari data variabel primer dan variabel sekunder yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{Z}_1(s_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Z_1(s_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j Z_2(s_j) \quad (2.19)$$

Dengan:

$\hat{Z}_1(s_0)$: nilai estimasi dari Z_1 pada lokasi yang tidak tersampel

$Z_1(s_i)$: data variabel primer (kadar O_3) pada n lokasi

$Z_2(s_j)$: data variabel sekunder (kadar CO) pada m lokasi

α_i dan β_j : nilai pembobot *cokriging*

Berdasarkan persamaan (2.19), $\hat{Z}_1(s_0)$ dapat dikatakan estimator yang bersifat linier karena merupakan fungsi linier dari $Z_1(s_i)$. Galat dari estimasi dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G &= \hat{Z}_1(s_0) - Z_1(s_0) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i Z_1(s_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j Z_2(s_j) - Z_1(s_0) \\ &= \alpha_1 Z_1(s_1) + \alpha_2 Z_1(s_2) + \dots + \alpha_n Z_1(s_n) + \beta_1 Z_2(s_1) \\ &\quad + \beta_2 Z_2(s_2) + \dots + \beta_m Z_2(s_m) - Z_1(s_0) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dalam bentuk matriks persamaan (2.20) dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{G} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_m \quad -1] \begin{bmatrix} Z_1(s_1) \\ Z_1(s_2) \\ \vdots \\ Z_1(s_n) \\ Z_2(s_1) \\ Z_2(s_2) \\ \vdots \\ Z_2(s_m) \\ Z_1(s_0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{w}^t \mathbf{Z} \tag{2.21}$$

2. *Unbiased*

Guna mengatasi kondisi ketidakbiasan pada estimator $\hat{Z}_1(s_0)$, maka nilai ekspektasi dari persamaan (2.20) harus sama dengan nol.

$$\begin{aligned} E\{G\} &= E\{\hat{Z}_1(s_0) - Z_1(s_0)\} \\ &= E\{\sum_{i=1}^n \alpha_i Z_1(s_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j Z_2(s_j) - Z_1(s_0)\} \\ &= E\{\sum_{i=1}^n \alpha_i Z_1(s_i)\} + E\{\sum_{j=1}^m \beta_j Z_2(s_j)\} - E\{Z_1(s_0)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i E\{Z_1(s_i)\} + \sum_{j=1}^m \beta_j E\{Z_2(s_j)\} - E\{Z_1(s_0)\} \end{aligned}$$

Dengan asumsi bahwa fungsi acak bersifat stationer, maka setiap nilai ekspektasi dapat dinyatakan sebagai $E\{Z_1\}$ untuk variabel primer dan $E\{Z_2\}$ untuk variabel sekunder. Sehingga diperoleh:

$$E\{G\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i E\{Z_1\} + \sum_{j=1}^m \beta_j E\{Z_2\} - E\{Z_1\}$$

Karena $E\{G\} = 0$, maka

$$\begin{aligned} E\{G\} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i E\{Z_1\} + \sum_{j=1}^m \beta_j E\{Z_2\} - E\{Z_1\} = 0 \\ (\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1)E\{Z_1\} + \sum_{j=1}^m \beta_j E\{Z_2\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &= 1 \text{ dan } \sum_{j=1}^m \beta_j = 0 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} E\{\hat{Z}_1(s_0)\} &= E\{\sum_{i=1}^n \alpha_i Z_1(s_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j Z_2(s_j)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i E\{Z_1(s_i)\} + \sum_{j=1}^m \beta_j E\{Z_2(s_j)\} \\ &= 1[E\{Z_1(s_i)\}] + 0[E\{Z_2(s_j)\}] \\ &= E\{Z_1(s_i)\} \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas, diperoleh bahwa $E\{\hat{Z}_1(s_0)\} = E\{Z_1(s_i)\}$. Hal ini menunjukkan bahwa *ordinary cokriging* menghasilkan penduga yang tak bias dengan $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ dan $\sum_{j=1}^m \beta_j = 0$.

3. *Best*

Sifat *best* pada *ordinary cokriging* dapat dibuktikan dengan meminimumkan variansi galat. Variansi dari galat pada persamaan (2.21) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Var(\mathbf{G}) &= Var(\mathbf{w}^t \mathbf{Z}) \\
 &= E \left[(\mathbf{w}^t \mathbf{Z} - E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z}))^2 \right] \\
 &= E \left[(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})^2 - 2(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z}) + (E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z}))^2 \right] \\
 &= [E((\mathbf{w}^t \mathbf{Z})(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})) - 2E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z}) + E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})]^{tt} \\
 &= [E((\mathbf{w}^t \mathbf{Z})(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})) - E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})E(\mathbf{w}^t \mathbf{Z})]^{tt} \\
 &= \mathbf{w}^t [E((\mathbf{Z})(\mathbf{Z})) - E(\mathbf{Z})E(\mathbf{Z})]^t \mathbf{w} \\
 &= \mathbf{w}^t [Cov(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})]^t \mathbf{w} \\
 &= \mathbf{w}^t Cov(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \mathbf{w} \\
 Var(\mathbf{G}) &= \mathbf{w}^t \mathbf{C}_Z \mathbf{w} \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Dengan \mathbf{C}_Z adalah matriks kovarians dari \mathbf{Z} . Selanjutnya diperoleh variansi dari estimasi galat pembobot *cokriging* dan kovarians antara variabel acak dengan menyederhanakan persamaan (2.22) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Var(\mathbf{G}) &= \mathbf{w}^t \mathbf{C}_Z \mathbf{w} \\
 Var(G) &= Var \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i Z_1(s_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j Z_2(s_j) - Z_1(s_0) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j Cov(Z_{1i}, Z_{1j}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j Cov(Z_{2i}, Z_{2j}) \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j Cov(Z_{1i}, Z_{2j}) - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i Cov(Z_{1i}, Z_{1,0}) \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^m \beta_i Cov(Z_{2i}, Z_{1,0}) + Cov(Z_{1,0}, Z_{1,0}) \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Dengan syarat $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ dan $\sum_{j=1}^m \beta_j = 0$.

Selanjutnya, untuk mencari nilai minimum dari variansi galat menggunakan *lagrange multiplier* dengan parameter *lagrange* $2\mu_1$ dan $2\mu_2$. Persamaan *lagrange multiplier* dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L &= \mathbf{w}^t \mathbf{C}_Z \mathbf{w} + 2\mu_1 (\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1) + 2\mu_2 (\sum_{j=1}^m \beta_j) \\
 L &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j Cov(Z_{1i}, Z_{1j}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j Cov(Z_{2i}, Z_{2j}) \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j Cov(Z_{1i}, Z_{2j}) - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i Cov(Z_{1i}, Z_{1,0}) \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^m \beta_i Cov(Z_{2i}, Z_{1,0}) + Cov(Z_{1,0}, Z_{1,0}) + 2\mu_1 (\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1) \\
 &\quad + 2\mu_2 (\sum_{j=1}^m \beta_j) \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Penyelesaian dari persamaan (2.24) dapat diperoleh dengan mencari turunan parsial dari L terhadap bobot variabel dan parameter *lagrange* sebagai berikut:

$$\frac{\partial(L)}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Cov}(Z_{1i}, Z_{1j}) + 2 \sum_{i=1}^m \beta_i \text{Cov}(Z_{2i}, Z_{1j}) - 2\text{Cov}(Z_{1,0}, Z_{1j}) + 2\mu_1$$

untuk $j = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial(L)}{\partial b_j} = 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Cov}(Z_{1i}, Z_{2j}) + 2 \sum_{i=1}^m \beta_i \text{Cov}(Z_{2i}, Z_{2j}) - 2\text{Cov}(Z_{1,0}, Z_{2j}) + 2\mu_2$$

untuk $j = 1, 2, \dots, m$

$$\frac{\partial(L)}{\partial \mu_1} = 2(\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1)$$

$$\frac{\partial(L)}{\partial \mu_2} = 2 \sum_{i=1}^m \beta_i$$

Dari penyelesaian *lagrange* di atas diperoleh $n + m + 2$ sistem *ordinary cokriging* yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Cov}(Z_{1i}, Z_{1j}) + \sum_{i=1}^m \beta_i \text{Cov}(Z_{2i}, Z_{1j}) + \mu_1 = \text{Cov}(Z_{1,0}, Z_{1j}) \quad (2.25)$$

untuk $j = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Cov}(Z_{1i}, Z_{2j}) + \sum_{i=1}^m \beta_i \text{Cov}(Z_{2i}, Z_{2j}) + \mu_2 = \text{Cov}(Z_{1,0}, Z_{2j}) \quad (2.26)$$

untuk $j = 1, 2, \dots, m$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_i = 0 \quad (2.28)$$

Persamaan (2.25) sampai dengan (2.28) dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c} \quad (2.29)$$

Dengan \mathbf{C} adalah matriks kovarians dari variabel primer dan sekunder antar lokasi pengamatan,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \text{Cov}(Z_{11}, Z_{11}) & \dots & \text{Cov}(Z_{1n}, Z_{11}) & \text{Cov}(Z_{21}, Z_{11}) & \dots & \text{Cov}(Z_{2m}, Z_{11}) & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}(Z_{11}, Z_{1n}) & \dots & \text{Cov}(Z_{1n}, Z_{1n}) & \text{Cov}(Z_{21}, Z_{1n}) & \dots & \text{Cov}(Z_{2m}, Z_{1n}) & 1 & 0 \\ \text{Cov}(Z_{11}, Z_{21}) & \dots & \text{Cov}(Z_{1n}, Z_{21}) & \text{Cov}(Z_{21}, Z_{21}) & \dots & \text{Cov}(Z_{2m}, Z_{21}) & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}(Z_{11}, Z_{2m}) & \dots & \text{Cov}(Z_{1n}, Z_{2m}) & \text{Cov}(Z_{21}, Z_{2m}) & \dots & \text{Cov}(Z_{2m}, Z_{2m}) & 0 & 1 \\ & 1 & \dots & 1 & & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 & & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{c} adalah vektor dari kovarians antar pengamatan pada lokasi yang diduga (U_0), dan $\boldsymbol{\lambda}$ adalah vektor pembobot dari variabel primer dan sekunder dan dua pengganda Lagrange.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} Cov(Z_{1,0}, Z_{11}) \\ \vdots \\ Cov(Z_{1,0}, Z_{1n}) \\ Cov(Z_{1,0}, Z_{21}) \\ \vdots \\ Cov(Z_{1,0}, Z_{2m}) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.29), maka pembobot yang optimal dapat diperoleh melalui persamaan:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{c} \tag{2.30}$$

2.8 Cross Validation

Cross validation merupakan metode evaluasi model yang lebih baik dibandingkan dengan hanya menguji galat. Menurut Cressie (1993), *cross validation* tidak membuktikan kebenaran dari model semivariogram yang digunakan, namun hanya membuktikan model semivariogram tersebut tidak terlalu salah. Prinsip dasar *cross validation* adalah mengestimasi nilai variabel terregional yang tidak diketahui $\hat{z}(\mathbf{s}_i)$ berdasarkan nilai variabel terregional yang diketahui $z(\mathbf{s}_1), z(\mathbf{s}_2), \dots, z(\mathbf{s}_{i-1})$, dengan $i = 1, 2, \dots, n$, nilai n adalah jumlah sampel dari variabel terregional yang diketahui. Selanjutnya, hasil estimasi melalui metode *ordinary cokriging* dibandingkan dengan nilai variabel terregional yang sebenarnya. Salah satu metode *cross validation* adalah *Leave-One-Out Cross Validation* (LOOCV).

Metode LOOCV digunakan untuk membagi *training-testing* ketika data yang tersedia dalam suatu penelitian tidak cukup banyak. Pada prosesnya, salah satu pasangan titik data untuk sementara dihapus dari kumpulan data pengamatan. Misalkan $(z_1(\mathbf{s}_1), z_2(\mathbf{s}_2))$ merupakan pasangan titik data pengamatan ke- N yang sementara dihapus. Kemudian dilakukan pengujian dengan metode *ordinary cokriging* pada $N - 1$ data pengamatan sisa. Selanjutnya membandingkan nilai estimasi $\hat{z}(\mathbf{s}_i)$ dengan $z(\mathbf{s}_i)$ dari data pengamatan yang dihapus. Galat estimasi dari titik pengamatan yang dihilangkan dihitung dengan persamaan sebagai berikut:

$$e^* = z(\mathbf{s}_i) - \hat{z}(\mathbf{s}_i) \quad (2.31)$$

Galat estimasi yang diperoleh digunakan untuk membandingkan teknik interpolasi yang berbeda. Perbedaan antara data aktual yang digunakan untuk pemodelan dengan data hasil estimasi akan diperiksa dengan menggunakan *Mean Error* (ME), *Root Mean Square Error* (RMSE), dan *Mean Square Deviation Ratio* (MSDR) (Rossiter, 2012).

a. *Mean Error* (ME)

Merupakan statistik rata-rata selisih antara nilai aktual dengan nilai estimasi. ME dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut:

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \{z(\mathbf{s}_i) - \hat{z}(\mathbf{s}_i)\} \quad (2.32)$$

b. *Root Mean Squared Error* (RMSE)

Dikenal juga sebagai *Root Mean Square Deviation* (RMSD), statistik ini digunakan untuk mengukur seberapa ketepatan estimasi. Nilai RMSE yang besar mengindikasikan ketidakakuratan estimasi yang dilakukan. Rumus RMSE sebagai berikut:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \{z(\mathbf{s}_i) - \hat{z}(\mathbf{s}_i)\}^2} \quad (2.33)$$

c. *Mean Square Deviation Ratio* (MSDR)

Statistik ini menghitung *ratio* dari galat terhadap kesalahan prediksi. Hasil MSDR yang ideal adalah 1 karena galat dari *cross validation* harus sama dengan kesalahan prediksi pada setiap titik yang dikeluarkan. MSDR dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$MSDR = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{\{z(\mathbf{s}_i) - \hat{z}(\mathbf{s}_i)\}^2}{\sigma_{e^*}(\mathbf{s}_i)} \quad (2.34)$$

Dengan $\hat{z}(\mathbf{s}_i)$ adalah nilai estimasi, $z(\mathbf{s}_i)$ adalah nilai aktual, N adalah jumlah data penelitian, dan $\sigma_{e^*}(\mathbf{s}_i)$ adalah varians *ordinary cokriging* untuk lokasi (\mathbf{s}_i) .

2.9 Pencemaran Udara

Udara merupakan salah satu komponen penting dalam kehidupan yang harus dijaga dan ditingkatkan kualitasnya demi menciptakan hidup sehat dengan udara yang bersih. Kualitas udara yang dapat mendukung kehidupan manusia apabila kadar pencemarannya tidak melebihi Baku Mutu Udara Ambien (BMUA) pada peraturan pemerintah tentang pengendalian pencemaran udara yang tertuang dalam

PP Nomor 41 Tahun 1999. Seiring dengan berkembangnya zaman, sumber pencemaran udara juga turut meningkat yang mengakibatkan kualitas udara tersebut menurun. Sumber pencemaran dapat berasal dari meningkatnya kegiatan transportasi, industri dan pembangkit, maupun aktifitas domestik seperti kebakaran hutan dan pembuangan sampah. Jenis sumber pencemaran dibedakan dalam dua kelompok berdasarkan perilakunya di atmosfer (Soedomo, 2001):

1. Pencemaran udara primer

Komposisi dari pencemaran jenis ini tidak akan mengalami perubahan di atmosfer baik secara kimia maupun fisis dalam jangka waktu yang relatif lama (harian sampai tahunan dan akan tetap seperti komposisinya seperti waktu diemisikan oleh sumber). Pencemaran ini misalnya CO, CO₂, NO₂, N₂O, TSP, SO₂, metana, senyawa halogen, partikel logam dan lain-lain. Jenis pencemaran ini memiliki waktu tinggal yang lama di atmosfer karena sifatnya yang stabil terhadap reaksi-reaksi kimia fisik atmosfer.

2. Pencemaran udara sekunder

Jenis pencemaran ini terbentuk di atmosfer sebagai hasil reaksi-reaksi atmosfer seperti hidrolisis, oksidasi, dan reaksi fotokimia. Pencemaran ini mempunyai sifat fisik dan kimia yang tidak stabil yang termasuk dalam pencemaran ini misalnya Ozon (O₃), *Peroxy Acyl Nitrat* (PAN), dan *Formalhedid*.

2.9.1 Ozon (O₃)

Ozon di permukaan adalah polutan sekunder yang terbentuk di atmosfer. Ozon di permukaan terbentuk melalui oksidasi fotokimia antara karbon monoksida (CO) dan senyawa organik yang mudah menguap (VOCs) dengan adanya nitrogen oksida (NO_x = NO + NO₂). Dampak dari ozon permukaan yaitu dapat memperburuk *bronchitis*, penyakit jantung, asma, mengurangi kapasitas paru-paru dan iritasi pada sistem pernafasan. Selain berdampak pada kesehatan manusia, ozon juga dapat merusak vegetasi (terutama daun) sehingga mengurangi kinerja proses fotosintesis, reproduksi, pertumbuhan, dan hasil panen (Wardoyo, 2016). Baku mutu udara ambien untuk Ozon (O₃) yang tertuang dalam PP Nomor 41 Tahun 1999 adalah 50 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ per tahun.

2.9.2 Karbon Monoksida (CO)

Karbon Monoksida (CO) adalah polutan primer dengan sumber utama berasal dari emisi kendaraan bermotor. Karbon monoksida merupakan salah satu prekursor (pembentuk) ozon yang sangat berpengaruh terhadap proses pembentukan ozon di atmosfer. Ambarsari *et al.* (2010) dalam penelitiannya menyimpulkan bahwa karbon monoksida berpengaruh sebesar 20-80% terhadap pembentukan ozon permukaan. Baku mutu udara ambien untuk karbon monoksida (CO) yang tertuang dalam PP Nomor 41 Tahun 1999 adalah $10.000 \mu\text{g}/\text{m}^3$ per 24 jam.