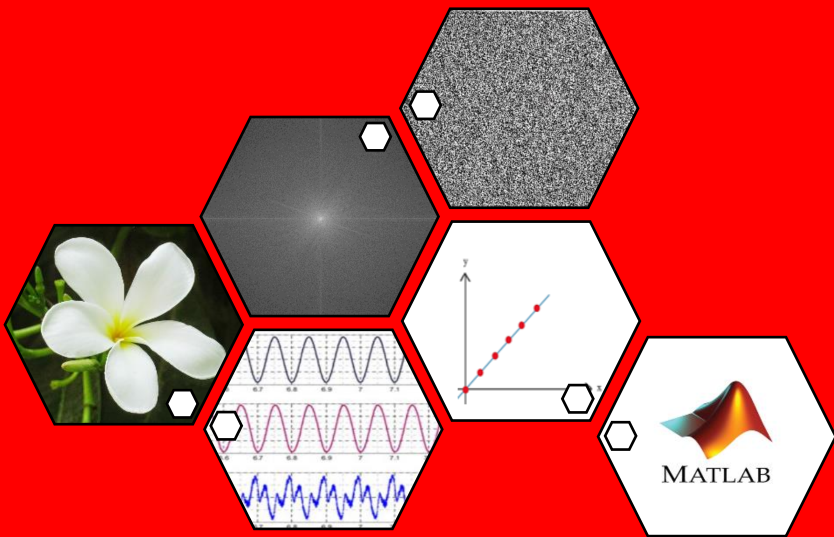
BEBERAPA SIFAT TRANSFORMASI FOURIER DISKRIT DAN APLIKASINYA PADA PEMROSESAN CITRA DIGITAL



ESRA BETI TANDI

H011201048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2024

BEBERAPA SIFAT TRANSFORMASI FOURIER DISKRIT DAN APLIKASINYA PADA PEMROSESAN CITRA DIGITAL

ESRA BETI TANDI

H011201048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

BEBERAPA SIFAT TRANSFORMASI FOURIER DISKRIT DAN APLIKASINYA PADA PEMROSESAN CITRA DIGITAL

ESRA BETI TANDI

H011201048

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

Pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

SKRIPSI

BEBERAPA SIFAT TRANSFORMASI FOURIER DISKRIT DAN APLIKASINYA PADA PEMROSESAN CITRA DIGITAL

<u>ESRA BETI TANDI</u>
H011201048

Skripsi

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Sains pada 9 Juli 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan
Pada

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:	Mengetahui:
Pembimbing tugas akhir	Ketua Program Studi
<u>Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si, M.Si</u>	<u>Dr. Firman, S.Si., M.Si.</u>
NIP. 197012311998021001	NIP. 196804292002121001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi berjudul "Beberapa Sifat Transformasi Fourier Diskrit dan Aplikasinya pada Pemrosesan Citra Digital" dengan arahan dari Pembimbing (Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si, M.Si). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi maupun yang tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks yang dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 11 Juli 2024

ESRA BETI TANDI
NIM. H011201048

UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji Syukur bagi Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan kasihnya kepada penulis sehingga skripsi dengan judul “Beberapa Sifat Transformasi Fourier Diskrit dan Aplikasinya pada Pemrosesan Citra Digital”, sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis mengucapkan terima kasih khusus kepada kedua orang tua yaitu Bapak Yohanis Tandi dan Ibu Esther Datu yang telah mengasihi, mendidik serta membesarkan penulis dengan penuh ketulusan baik secara langsung maupun tidak langsung melalui doa, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini. Kepada saudara sedarah yang selalu memotivasi dari jauh, terima kasih atas segala doa dan dukungannya.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam proses penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari dukungan, bimbingan dan bantuan dari banyak pihak. Karena itu, dengan penuh kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc., selaku Rektor Universitas Hasanuddin
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si., Selaku Dekan Fakutas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si., selaku pembimbing utama yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam proses penulisan skripsi.
4. Bapak Dr. Khaeruddin, M.Sc. dan Ibu Naimah Aris, S.Si., M.Math. selaku penasehat akademik dan penguji yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberi saran serta arahan kepada penulis dalam skripsi.
5. Bapak/Ibu Dosen dan Staff Departemen Matematika yang telah membagikan ilmu serta pengalaman.
6. Kakak Friska dan Adik Novika atas dukungan dan canda tawa sehingga penulis selalu semangat mengerjakan skripsi.
7. Teman-teman Matematika 2020 atas semua dukungan dan kebersamaan selama kuliah.

Penulis menyadari penuh bahwa Skripsi ini jauh dari kata sempurna, karena itu diharapkan kritik dan saran yang membangun dari pihak lain dalam perbaikan dan pengembangan penelitian lebih lanjut. Akhir semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, Juli 2024

Penulis

ABSTRAK

ESRA BETI TANDI. **Beberapa Sifat Transformasi Fourier Diskrit dan Aplikasinya pada Pemrosesan Citra Digital** (dibimbing oleh Prof. Dr. Eng. Mawardi S.Si., M.Si.)

Transformasi Fourier sebagai salah satu alat matematis dalam pengolahan sinyal digital, yang memungkinkan analisis sinyal berhingga dan mengubah sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi sehingga beberapa sifat perlu dikaji lebih dalam. Penelitian ini bertujuan membuktikan beberapa sifat transformasi Fourier diskrit dan mengaplikasikan transformasi Fourier dalam pemrosesan citra digital. Penelitian dibagi tiga tahap, yakni: 1) Pengkajian beberapa literatur dan jurnal ilmiah mengenai transformasi Fourier diskrit; 2) Pembuktian beberapa sifat transformasi Fourier diskrit; 3) Pengaplikasian transformasi Fourier diskrit pada citra digital. Hasil dari penelitian menunjukkan bahwa Transformasi Fourier diskrit memiliki sifat-sifat seperti lemma, teorema dan proposisi dengan menggunakan sifat-sifat umum transformasi Fourier seperti linearitas, periodisitas,invers dan konjugat sebagai pembangun dalam membuktikan beberapa sifat ini. Transformasi Fourier Diskrit dalam pemrosesan citra digital dengan penggabungan dengan filter high-pass dan low-pass jenis Gaussian, menghasilkan citra yang tajam ataupun halus, pemberian nilai cut-off pada masing-masing filter akan menghasilkan citra sesuai yang kita butuhkan. Sebagai kesimpulan, transformasi Fourier diskrit memiliki sifat-sifat seperti lemma, teorema dan proposisi juga memiliki peran penting dalam pemrosesan citra digital dalam menghasilkan citra yang lebih tajam, halus, ataupun blur sesuai dengan kebutuhan.

Kata kunci: Konvolusi, Diskrit, Transformasi Fourier, Citra Digital,Filter.

ABSTRACT

ESRA BETI TANDI. **Some Properties of the Discrete Fourier Transform and Its Application to Digital Image Processing** (supervised by Prof. Dr. Eng. Mawardi S.Si., M.Si.)

The discrete Fourier transform as one of the mathematical tools in digital signal processing, which allows the analysis of finite signals and converts signals from the time domain to the frequency domain so that some properties need to be studied more deeply. This research aims to prove some properties of discrete Fourier transform and apply Fourier transform in digital image processing. The research is divided into three stages, namely: 1) Review of some literature and scientific journals on discrete Fourier transform; 2) Proving some properties of discrete Fourier transform; 3) Application of discrete Fourier transform on digital image. The results of the research show that the discrete Fourier transform has properties such as lemmas, theorems and propositions by using general properties of the Fourier transform such as linearity, periodicity, time reversal, and conjugates as constructs in proving some of these properties. Discrete Fourier Transform in digital image processing by combining with high-pass and low-pass filters of the Gaussian type, producing sharp or smooth images, giving cut-off values to each filter will produce the image we need. In conclusion, The discrete Fourier transform has properties such as convolution, inverse and conjugate. The discrete Fourier transform has properties such as convolution, inverse and conjugate. The discrete Fourier transform has an important role in digital image processing in producing sharper, smoother, or blurrier images as needed.

Keywords: Convolution, Discrete, Fourier Transform, Digital Image, Filter.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Transformasi Fourier merupakan salah satu alat matematis yang sangat penting dalam bidang pengolahan sinyal digital. Transformasi ini memungkinkan kita untuk menganalisis sinyal yang berhingga, dan digunakan untuk mengubah sinyal diskrit dengan domain waktu kedalam spektrum diskrit dengan domain frekuensi[11]. Dalam konteks pengolahan citra digital, transformasi Fourier diskrit (TFD) memegang peranan yang krusial.

Citra digital pada dasarnya adalah sinyal dua dimensi, sehingga TFD dua dimensi (2D) menjadi sangat relevan untuk digunakan[6]. Transformasi Fourier pada citra digital memungkinkan kita untuk menganalisis frekuensi spasial dan menerapkan berbagai teknik pemrosesan sinyal yang efektif, seperti peningkatan kualitas citra.

Meskipun TFD telah banyak dimanfaatkan dalam berbagai aplikasi pengolahan citra digital, masih terdapat beberapa sifat penting dari TFD yang perlu dikaji lebih dalam. Sifat-sifat tersebut, memiliki implikasi yang signifikan terhadap efisiensi dan efektivitas algoritma pemrosesan citra yang digunakan.

Oleh karena itu, skripsi ini akan meneliti beberapa sifat penting dari transformasi Fourier diskrit, serta menganalisis penerapannya dalam pemrosesan sinyal citra digital. Pemahaman yang mendalam tentang sifat-sifat TFD diharapkan dapat membantu mengembangkan teknik-teknik pemrosesan sinyal citra digital yang lebih efisien dan efektif.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar yang telah dikemukakan, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat transformasi Fourier diskrit (TFD) dalam konteks satu dimensi 1D?
2. Bagaimana aplikasi transformasi Fourier dalam pemrosesan citra digital 2D dengan teknik filtering?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

Penelitian ini berfokus pada sifat-sifat dasar transformasi Fourier diskrit dan aplikasinya dalam pemrosesan sinyal citra digital dua dimensi dengan teknik filter Gaussian high-pass dan low-pass. Penelitian ini tidak membahas tentang transformasi Fourier multi dimensi.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan dan membuktikan beberapa sifat transformasi Fourier diskrit.
2. Mengaplikasikan transformasi Fourier dalam pemrosesan sinyal citra digital dengan filtering.

1.5 Manfaat Penelitian

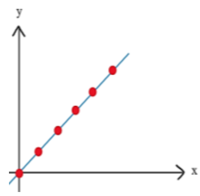
Diharapkan penelitian ini dapat memberi manfaat seperti berikut:

1. Meningkatkan pemahaman tentang sifat-sifat dasar transformasi Fourier diskrit.
2. Sebagai bahan penelitian lebih dalam tentang sifat-sifat dan aplikasi transformasi Fourier dalam pemrosesan citra digital.

1.6 Landasan Teori

1.6.1 Fungsi Diskrit

Fungsi diskrit didefinisikan sebagai fungsi yang memiliki nilai-nilai terbatas pada bilangan bulat. Sesuatu dikatakan diskrit jika elemen-elemennya terpisah (distinct) secara individual atau elemen-elemennya tidak bersambungan (unconnected), begitupun dengan fungsi diskrit. Agar bisa membedakan fungsi diskrit dan kontinu perhatikan gambar berikut;



Gambar 1 Grafik fungsi diskrit dan kontinu

Dari Gambar 1 diatas, fungsi diskrit di definisikan oleh titik titik merah yang terpisah, sedangkan untuk fungsi kontinu oleh garis biru yang kontinu. Dalam pengolahan data digital, informasi yang disimpan oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit, misalnya sebuah gambar yang ditangkap oleh kamera akan direpresentasikan dalam bentuk diskrit berupa kumpulan piksel yang merupakan elemen diskrit dari sebuah gambar.

1.6.2 Konvolusi

Konvolusi merupakan salah satu cara matematis dalam mengkombinasikan dua sinyal diskrit, yang kemudian menghasilkan sinyal baru, sebelumnya sinyal ini akan dicerminkan dan digeser sebelum di konvolusikan. Secara matematis konvolusi dalam ranah spasial akan mengkonvolusikan x yaitu pixel dari citra dan y yaitu kernel atau penapis[11]. Konvolusi sendiri disimbolkan dengan asterisk (*). $x * y = z$ yaang berarti fungsi x dikonvolusikan dengan fungsi y menghasilkan fungsi z[11].

1. Komutatif

   $x * y = y * x.$
2. Asosiatif

$(x * y) * z = x * (y * z)$.

3. Distributif
   $x * (y_1 + y_2) = (x * y_1) + (x * y_2)$.
4. Homogen
   $x * (\lambda y) = \lambda x * y$.

1.6.2.1 Definisi (Konvolusi Diskrit)

Diberikan dua barisan yaitu x dan y dengan keduanya memiliki periode-N dari barisan bilangan bulat, maka konvolusi dari barisan x dan y adalah[1, 10, 11]

$$(x * y)(k) = \sum_{J=0}^{N-1} x(j)y(k-j), \qquad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{1}$$

Konvolusi 2 dimensi diperoleh dengan formula berikut:
Misalkan f, g terdefinisi pada bilangan bulat $\mathbb{Z}$, maka konvolusi dua dimensi dari f dan g adalah[11],

$$h(x,y) = f(x,y) * g(x,y) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} f(i,j)g(x-i+1, y-j+1). \tag{2}$$

Beberapa cara dalam menghitung konvolusi:
1. Menggunakan definisi
2. Teknik zero Padding
3. Program komputer (Matlab)

Contoh 1 Diberikan dua sinyal $x = \{1,1,1,2\}$ dan $y = \{-1,1,3,-2\}$, tentukan hasil konvolusi 1 dimensi dari $(x * y)$.
Penyelesaian:
1. Menggunakan definisi

Sesuai dengan definisi konvolusi pada persamaan (1), diperoleh
Untuk $k = 0$,

$$\begin{aligned}(x * y)(0) &= \sum_{J=0}^{3} x(j)y(0-j)\\ &= x(0)y(0) + x(1)y(-1) + x(2)y(-2) + x(3)y(-3)\\ &= (1 \cdot -1) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (2 \cdot 0)\\ &= -1.\end{aligned}$$

Untuk $k = 1$,

$$\begin{aligned}(x * y)(1) &= \sum_{J=0}^{3} x(j)y(1-j)\\ &= x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(-1) + x(3)y(-2)\\ &= (1 \cdot 1) + (1 \cdot -1) + (1 \cdot 0) + (2 \cdot 0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Untuk $k = 2$,

$$
\begin{aligned}
(x * y)(2) \quad &= \sum_{J=0}^{3} x\,(j) y(2-j) \\
&= x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(-1) \\
&= (1 \cdot 3) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot -1) + (2 \cdot 0) \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Untuk $k = 3$,

$$
\begin{aligned}
(x * y)(3) \quad &= \sum_{J=0}^{3} x\,(j) y(3-j) \\
&= x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0) \\
&= (1 \cdot -2) + (1 \cdot 3) + (1 \cdot 1) + (2 \cdot -1) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Untuk $k = 4$,

$$
\begin{aligned}
(x * y)(4) \quad &= \sum_{J=0}^{3} x\,(j) y(4-j) \\
&= x(0)y(5) + x(1)y(4) + x(2)y(3) + x(3)y(2) \\
&= (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot -2) + (2 \cdot 3) \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Untuk $k = 5$,

$$
\begin{aligned}
(x * y)(k) \quad &= \sum_{J=0}^{3} x\,(j) y(5-j) \\
&= x(0)y(5) + x(1)y(4) + x(2)y(3) + x(3)y(2) \\
&= (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot -2) + (2 \cdot 3) \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Untuk $k = 6$,

$$
\begin{aligned}
(x * y)(k) \quad &= \sum_{J=0}^{3} x\,(j) y(6-j) \\
&= x(0)y(6) + x(1)y(5) + x(2)y(4) + x(3)y(3) \\
&= (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (2 \cdot -2) \\
&= -4.
\end{aligned}
$$

Jadi hasil konvolusi $(x * y) = \ [-1\ ,0, 3, 0, 3, 4, -4]$.

2. Teknik zero padding

Putar y 180^0, menjadi {-2,3,1,-1}

Tempatkan data terakhir dari y yang diputar 180^0 {2, 3, 1, -1} pada data pertama dari data x sehingga diperoleh[3]

0	0	0	1	1	1	2
-2	3	1	-1	0	0	0

Hasil = -1

Pergeseran-1

0	0	1	1	1	2	0
-2	3	1	-1	0	0	0

Hasil = 1+(-1)=0

Pergeseran-2

0	1	1	1	2	0	0
-2	3	1	-1	0	0	0

Hasil = 3+1+(-1) = 3

Pergeseran-3

1	1	1	2	0	0	0
-2	3	1	-1	0	0	0

Hasil = -2+3+1-2 = 0

Pergeseran-4

1	1	2	0	0	0	0
-2	3	1	-1	0	0	0

Hasil = -2+3+2= 3

Pergeseran-5

1	2	0	0	0	0	0
-2	3	1	-1	0	0	0

Hasil = -2+6 = 4

Pergeseran-6

2	0	0	0	0	0	0
-2	3	1	-1	0	0	0

Hasil = -4

Jadi hasil konvolusi sesuai teknik zero padding $(x * y) = [-1, 0, 3, 0, 3, 4, -4]$

3. Menggunakan pemrograman matlab

Masukan:

```
x = [1 1 1 2];
```

```
y = [-1 1 3 -2];
x*y = imfilter(x,y,'conv','full')
```

keluaran:

```
x*y =
    -1      0      3      0      3      4     -4
```

Contoh 2 Tentukan hasil konvolusi dari

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

1. Menggunakan Definisi

Sesuai dengan definisi konvolusi 2 dimensi pada persamaan (2), ubah kedua matriks menjadi matriks 3x3 diperoleh,

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk,

$$\begin{aligned} h(1,1) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} f\,(i,j)\cdot g(1-i+1,1-j+1) \\ &= f(1,1)\cdot g(1,1) + f(1,2)\cdot g(1,2) + f(1,3)\cdot g(1,-1) + \\ &\quad f(2,1)\cdot g(0,1) + f(2,2)\cdot g(0,0) + f(2,3)\cdot g(0,-1) + \\ &\quad f(3,1)\cdot g(-1,1) + f(3,1)\cdot g(-1,1) + f(3,3)\cdot g(-1,-1) \\ &= 1\cdot 2 + 3\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(1,2) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} f\,(i,j)\cdot g(1-i+1,2-j+1) \\ &= f(1,1)\cdot g(1,2) + f(1,2)\cdot g(1,2) + f(1,3)\cdot g(1,0) + \\ &\quad f(2,1)\cdot g(0,2) + f(2,2)\cdot g(0,1) + f(2,3)\cdot g(0,0) + \\ &\quad f(3,1)\cdot g(-1,2) + f(3,1)\cdot g(-1,2) + f(3,3)\cdot g(-1,0) \\ &= 1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ &= 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(1,3) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N-1} f\,(i,j)\cdot g(x-i+1,y-j+1) \\ &= f(1,1)\cdot g(1,3) + f(1,2)\cdot g(1,2) + f(1,3)\cdot g(1,1) + \\ &\quad f(2,1)\cdot g(0,3) + f(2,2)\cdot g(0,2) + f(2,3)\cdot g(0,1) + \\ &\quad f(3,1)\cdot g(-1,3) + f(3,2)\cdot g(-1,2) + f(3,3)\cdot g(-1,1) \\ &= 1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ &= 3, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h(2,1) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N-1} f\,(i,j)\cdot g(2-i+1,1-j+1) \\
&= f(1,1)\cdot g(2,1) + f(1,2)\cdot g(1,0) + f(1,3)\cdot g(2,-1) + \\
&\quad f(2,1)\cdot g(1,1) + f(2,2)\cdot g(1,0) + f(2,3)\cdot g(1,-1) + \\
&\quad f(3,1)\cdot g(0,1) + f(3,2)\cdot g(0,0) + f(3,3)\cdot g(0,-1) \\
&= 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2 + 4\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \\
&= 5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(2,2) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N-1} f\,(i,j)\cdot g(x-i+1,y-j+1) \\
&= f(1,1)\cdot g(2,2) + f(1,2)\cdot g(2,1) + f(1,3)\cdot g(2,0) + \\
&\quad f(2,1)\cdot g(1,2) + f(2,2)\cdot g(1,1) + f(2,3)\cdot g(1,0) + \\
&\quad f(3,1)\cdot g(0,2) + f(3,2)\cdot g(0,1) + f(3,3)\cdot g(0,0) \\
&= 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \\
&= 14,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(2,3) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N-1} f\,(i,j)\cdot g(x-i+1,y-j+1) \\
&= f(1,1)\cdot g(2,3) + f(1,2)\cdot g(2,2) + f(1,3)\cdot g(2,1) + \\
&\quad f(2,1)\cdot g(1,3) + f(2,2)\cdot g(1,2) + f(2,3)\cdot g(1,1) + \\
&\quad f(3,1)\cdot g(0,3) + f(3,2)\cdot g(0,2) + f(3,3)\cdot g(0,1) \\
&= 1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \\
&= 7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(3,1) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N-1} f\,(i,j)\cdot g(x-i+1,y-j+1) \\
&= f(1,1)\cdot g(3,1) + f(1,2)\cdot g(3,0) + f(1,3)\cdot g(3,-1) + \\
&\quad f(2,1)\cdot g(2,1) + f(2,2)\cdot g(2,0) + f(2,3)\cdot g(2,-1) + \\
&\quad f(3,1)\cdot g(1,1) + f(3,2)\cdot g(1,0) + f(3,3)\cdot g(1,-1) \\
&= 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 4\cdot 0 + 6\cdot(-2) + 7\cdot 0 + 8\cdot 0 + 9\cdot 0 \\
&= 2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(3,2) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N-1} f\,(i,j)\cdot g(x-i+1,y-j+1) \\
&= f(1,1)\cdot g(3,2) + f(1,2)\cdot g(3,1) + f(1,3)\cdot g(3,0) + \\
&\quad f(2,1)\cdot g(2,2) + f(2,2)\cdot g(2,1) + f(2,3)\cdot g(2,0) + \\
&\quad f(3,1)\cdot g(1,2) + f(3,2)\cdot g(1,1) + f(3,3)\cdot g(1,0) \\
&\quad = 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(3,3) \quad &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N-1} f\,(i,j)\cdot g(x-i+1, y-j+1)\\
&= f(1,1)\cdot g(3,3) + f(1,2)\cdot g(3,2) + f(1,3)\cdot g(3,1) + \\
&\quad f(2,1)\cdot g(2,3) + f(2,2)\cdot g(2,2) + f(2,3)\cdot g(2,1) + \\
&\quad f(3,1)\cdot g(1,3) + f(3,2)\cdot g(1,2) + f(3,3)\cdot g(1,1)\\
&= 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0\\
&= 4,
\end{aligned}
$$

Jadi, hasil konvolusi $h(x,y) = f(x,y) * g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 14 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Teknik zero padding

Matriks $f(x,y)$ tidak diputar, tetapi matriks $g(x,y)$ diputar 180^0 menjadi[10]

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad g(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1	0	1	0	0	0
1	0	2	1	3	0
0		2		4	0
0		0		0	0

2		

0	1	0	1	0	0
0	1	1	2	3	0
0	2		4		0
0	0		0		0

2	7	

0	0	1	0	1	0
0	1	1	3	2	0
0	2	4		0	
0	0	0		0	

2	7	3

1		2		0	0
1	0	1	1	3	0
1	0	2	2	4	0
0		0		0	0

2	7	3
5		

0	0		0		0
0	1	1	1	3	0
0	1	2	2	4	0
0	0		0		0

2	7	3
5	14	

0	0	0		0	
0	1	1	3	1	0
0	2	1	4	2	0
0	0	0		0	

2	7	3
5	14	7

0		0		0	0
0		1		3	0
1	0	1	2	4	0
1	0	2	0	0	0

2	7	3
5	14	7
2		

0	0		0		0
0	1		3		0
0	1	2	1	4	0
0	1	0	2	0	0

2	7	3
5	14	7
2	6	

0	0	0		0	
0	1	3		0	
0	2	1	4	1	0
0	0	1	0	2	0

2	7	3
5	14	7
2	6	4

Jadi, hasil Konvolusi $h(x,y) = f(x,y) * g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 14 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

3. Pemrograman matlab

Menggunakan sintax berikut:

Masukan:

```
disp('Masukkan data input x menggunakan [] (matrix): ');
f(x,y) = input('');
disp('Masukkan data kernel y menggunakan [] (matrix): ');
g(x,y) = input('');
z = conv2(f(x,y),g(x,y));
disp(z);
```

Keluaran:

```
2    7    3
5    14   7
2    6    4
```

Atau dengan menggunakan sintax berikut:

```
f(x,y) = input('Masukkan data input menggunakan [] (dipisahkan dengan spasi): ');
g(x,y) = input('Masukkan data input menggunakan [] (dipisahkan dengan spasi): ');
```

```
konvolusi=imfilter(x,y,'conv','full')
```

1.6.3 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier pertama kali dikemukakan oleh Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)[9]. Pada awal tahun 1800-an sebuah persamaan yaitu persamaan panas (heat equation) yang memodelkan bagaimana distribusi panas terhadap waktu. Persamaan ini merupakan salah satu bentuk Persamaan Differensial Parsial, yang mana tidak memiliki Solusi umum, tetapi memiliki Solusi khusus yakni hanya bisa digunakan pada kondisi khusus yaitu jika masukan/sumber panasnya merupakan fungsi sin & cos yang sederhana. Transformasi Fourier digunakan untuk mengubah sinyal waktu kontinu ke domain frekuensi. Transformasi Fourier mencirikan spektrum kontinu dari sinyal nonperiodik. Untuk menggunakan transformasi Fourier dalam operasi digital, diperlukan sampel domain waktu. Sampel domain waktu sinyal kontinu akan mewakili sinyal yang lengkap. Sampel-sampel ini akan mengubah sinyal kontinu menjadi sinyal diskrit, sehingga memerlukan penggunaan transformasi Fourier diskrit. Transformasi Fourier berdasarkan sinyal input terdiri dari transformasi Fourier kontinu dan diskrit.

1.6.3.1 Transformasi Fourier Kontinu

Pada transformasi Fourier kontinu mentransformasi fungsi dalam domain waktu yang kontinu menjadi fungsi dengan domain frekuensi yang kontinu[4, 9, 14]

$$\mathcal{F}\{f\}(u) = \hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx, \tag{5}$$

dimana, dalam hal ini i adalah imaginer satuan sehingga.

$$i = \sqrt{-1}.$$

Biasanya $f \epsilon L^1(\mathbb{R})$ yang merupakan ruang Lebesgue. Invers dari transformasi Fourier kontinu adalah[9, 14]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)e^{i2\pi ux}du, \tag{6}$$

asalkan $f \epsilon L^1(\mathbb{R})$ dan $\hat{f} \epsilon L^1(\mathbb{R})$.

1.6.3.2 Transformasi Fourier Diskrit

Transformasi Fourier Diskrit atau dikenal dengan TFD adalah suatu teknik dalam matematika untuk mengubah nilai dari serangkaian atau urutan nilai diskrit selama periode tertentu dalam domain waktu ke domain frekuensi[5]. TFD mengubah nilai sinyal kontinu (analog) menjadi nilai diskrit dalam domain waktu, yang kemudian diterjemahkan ke dalam domain frekuensi dan diproses atau dihitung secara digital menggunakan mikrokontroler atau komputer [10, 13].

Definisi Transformasi Fourier Diskrit 1D

Diberikan N-barisan berhingga $x = \{x(0), x(1), \dots . x(N-1)\}$, definisikan transformasi Fourier diskrit disingkat TFD, dengan[1,5,6,7, 12, 13]

$$\mathcal{F}_D\{x\}(k) = X(k) = \sum_{J=0}^{N-1} x\,(j) e^{-2\pi i j \frac{k}{N}}, \qquad k = 0,1, \cdots, N-1. \tag{7}$$

Mengingat kesamaan Euler yaitu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{8}$$

Selanjutnya, persamaan (7) dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathcal{F}_D\{x\}(k) = X(k) = \sum_{J=0}^{N-1} x\,(j) \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right). \tag{9}$$

Dengan invers atau balikan[6,7, 12,13]

$$\mathcal{F}_D^{-1}\{X\}(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} X\,(k) e^{2\pi i j \frac{k}{N}}, \quad k = 0,1, \cdots, N-1, \tag{10}$$

atau

$$\mathcal{F}_D^{-1}\{X\}(j) = x(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\,(k) \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi jk}{N}\right). \tag{11}$$

Teorema 1.6.3.2 (Invers dari transformasi Fourier diskrit 1D)

Untuk setiap N-barisan dari x maka

$$\mathcal{F}_D^{-1}(\mathcal{F}_D\{x(k)\}) = x(k), \qquad k = 0, 1, \dots, N-1 \tag{12}$$

Contoh 3 Hitunglah transformasi Fourier diskrit satu dimensi dan inversnya dari $x = (0,1,1,-1)$

Penyelesaian:

Sesuai definisi transformasi Fourier diskrit satu dimensi pada persamaan (7) diperoleh,

$$\mathcal{F}_D\{x\}(k) = \sum_{J=0}^{3} x\,(j) e^{-2\pi i j \frac{k}{4}}, \qquad k = 0,1,2,3.$$

Ganti $x(j)$ dengan nilai masing masing, sehingga diperoleh hasil;

$$\mathcal{F}_D\{x\}(0) = \sum_{J=0}^{3} x\,(j) = (0 + 1 + 1 + (-1) = 1$$

$$\mathcal{F}_D\{x\}(1) \quad = \sum_{J=0}^{3} x\,(j)e^{-i\frac{j\pi}{2}} = (0 + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\pi} - e^{i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$= (cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) + (\cos\pi - i\sin\pi) - (\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2})$$

$$= -1 - 2i.$$

$$\mathcal{F}_D\{x\}(2) \quad = \sum_{J=0}^{3} x\,(j)e^{-ij\pi} = (0 + e^{-i\pi} + e^{-i2\pi} - e^{-i3\pi} = \frac{1}{2}$$

$$= (cos\pi - i\sin\pi) + (\cos 2\pi - i\, sin2\,\pi) - (\cos 3\pi - i\sin 3\pi)$$

$$= 1.$$

$$\mathcal{F}_D\{x\}(3) \quad = \sum_{J=0}^{3} x\,(j)e^{-i\frac{3\pi}{2}} = (0 + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\pi} - e^{i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$= (cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}) + (\cos 3\pi - i\sin 3\pi) - (\cos\frac{3*3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2})$$

$$= -1 + 2i.$$

Jadi, TFD dari $x = (0,1,1,-1)$ adalah $X = (1,-1-2i,1,-1+2i)$.

Dengan menggunakan rumus invers TFD pada persamaan (10) dengan $X = (1,-1-2i,1,-1+2i)$ diperoleh,

$$\mathcal{F}_4^{-1}\{X\}(k) = \frac{1}{4}\sum_{J=0}^{3} X\,(j)e^{\pi i j\frac{k}{2}}, \quad k = 0,1,2,3$$

Untuk,

$$\mathcal{F}_D^{-1}\{X\}(0) \quad = \frac{1}{4}\sum_{J=0}^{3} X\,(j) = 1 - 1 - 2i + 1 - 1 + 2i$$

$$= 0 = x(0).$$

$$\mathcal{F}_D^{-1}\{X\}(1) \quad = \frac{1}{4}\sum_{J=0}^{3} X\,(j)e^{i\frac{j\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + (-1-2i)e^{i\frac{\pi}{2}} + 1\cdot e^{\pi i} + (-1+2i)e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + (-1-2i)\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right) + (cos\pi + i\,sin\pi)\right.$$
$$\left. + (-1+2i)(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - i + 2 - 1 + i + 2)$$

$$= 1 = x(1).$$

$$\mathcal{F}_D^{-1}\{X\}(2) \quad = \frac{1}{4}\sum_{J=0}^{3} X\,(j)e^{ij\pi}$$

$$= \frac{1}{4}(1 + (-1 - 2i)e^{i\pi} + 1 \cdot e^{i2\pi} + (-1 + 2i)e^{i3\pi})$$

$$= \frac{1}{4}(1 + (-1 - 2i)(cos\pi + i\ sin\pi) + (cos2\pi + i\ sin2\pi)$$

$$+ (-1 + 2i)(cos3\pi + i\ sin3\pi))$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 1 + 2i + 1 + 1 - 2i)$$

$$= 1 = x(2).$$

$$\mathcal{F}_D^{-1}\{X\}(3) \quad = \frac{1}{4}\sum_{J=0}^{3} X\,(j)e^{i\frac{j3\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + (-1 - 2i)e^{i\frac{3\pi}{2}} + 1 \cdot e^{3\pi i} + (-1 + 2i)e^{i\frac{3\cdot 3\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + (-1 - 2i)\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\ sin\frac{3\pi}{2}\right) + (cos3\pi + i\ sin3\pi)\right.$$

$$\left. + (-1 + 2i)(\cos\frac{3 \cdot 3\pi}{2} + i\ sin\frac{3 \cdot 3\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + i - 2 - 1 - i - 2)$$

$$= -1 = x(3).$$

Jadi, diperoleh $\mathcal{F}_D^{-1}\{X\} = \mathcal{F}_D^{-1}(\mathcal{F}_D\{x\}) = x(k)$

Definisi 1.6.3.3 Transformasi Fourier Diskrit 2D)

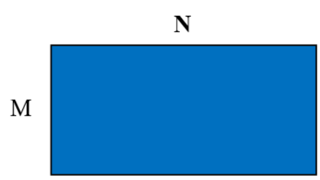
Transformasi Fourier 2 dimensi didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}_D(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{k}{M}m+\frac{l}{N}n\right)}. \tag{5}$$

dimana $k = 0, 1, \ldots., M - 1$

$l = 0, 1, \ldots.., N - 1$

Perhatikan bahwa,



Gambar 2 Ilustrasi citra sederhana

M = tinggi citra (banyaknya baris)
N = lebar citra (banyaknya kolom)

Invers dari transformasi Fourier (IDFT) adalah

$$f(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\mathcal{F}_D(k,l)e^{i2\pi\left(\frac{k}{M}m+\frac{l}{N}n\right)}, \tag{6}$$

dimana $\mathcal{F}_D(k,l)$ disebut sebagai koefisien Fourier dari ekspansi.

Contoh 4 Hitunglah TFD 2 dimensi dari,

$$f(m,n) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian:

1. Menggunakan definisi TFD 2D

Dengan menggunakan rumus TFD pada persamaan (11) diperoleh

$$\mathcal{F}_D(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{u}{M}m+\frac{v}{N}n\right)}.$$

Untuk,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_D(0,0) \quad &= \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{0}{2}m+\frac{0}{2}n\right)} \\
&= \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{0} \\
&= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) \\
&= 1 + 3 + 2 + 4 \\
&= 10, \\
\mathcal{F}_D(0,1) \quad &= \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{0}{2}m+\frac{1}{2}n\right)} \\
&= \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} (m,n)e^{-i\pi \mathrm{n}} \\
&= f(0,0)\cdot\ e^{0} + f(0,1)\cdot e^{-i\pi} + f(1,0)\cdot e^{0} + f(1,1)\cdot e^{-i\pi} \\
&= 1\cdot\ 1 + 3(\cos\pi - i\ sin\pi) + 2\cdot 1 + 4(\cos\pi - i\ sin\pi) \\
&= 1 - 3 + 2 - 4 \\
&= -4, \\
\mathcal{F}_D(1,0) \quad &= \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{1}{2}m+\frac{0}{2}n\right)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{-i\pi m}$$
$$= f(0,0)\cdot\ e^{0} + f(0,1)\cdot e^{0} + f(1,0)\cdot e^{-i\pi} + f(1,1)\cdot e^{-i\pi}$$
$$= 1\cdot\ 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot(\cos\pi - i\ sin\pi) + 4(\cos\pi - i\ sin\pi)$$
$$= 1 + 3 - 2 - 4$$
$$= -2,$$

$$\mathcal{F}_D(1,1) \quad = \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n\right)}$$
$$= \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{-i\pi(m+n)}$$
$$= f(0,0)\cdot\ e^{0} + f(0,1)\cdot e^{-i\pi} + f(1,0)\cdot e^{-i\pi} + f(1,1)\cdot e^{-i2\pi}$$
$$= 1\cdot\ 1 + 3(\cos\pi - i\ sin\pi) + 2(\cos\pi - i\ sin\pi) + 4(\cos 2\pi - i\ sin\ 2\ \pi)$$
$$= 1 - 3 - 2 + 4$$
$$= 0,$$

Jadi, hasil TFD 2D adalah

$$\mathcal{F}_D(k,l) = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan rumus invers TFD

$$\mathcal{F}_D^{-1}(k,l) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{F}_D(m,n)e^{i2\pi\left(\frac{u}{M}m+\frac{v}{N}n\right).}$$

Diperoleh;

$$f(0,0) \quad = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} \mathcal{F}_D(m,n)e^{i2\pi\left(\frac{0}{2}m+\frac{0}{2}n\right)}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{0}$$
$$= \frac{1}{4}(f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1))$$
$$= \frac{1}{4}(10 - 4 - 2 + 0)$$
$$= 1 = \mathcal{F}_D^{-1}(0,0),$$

$$f(0,1) \quad = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} \mathcal{F}_D(m,n)e^{i2\pi\left(\frac{0}{2}m+\frac{1}{2}n\right)}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} F(m,n)e^{-i\pi \mathrm{n}}$$
$$= \frac{1}{4}(f(0,0)\cdot\ e^{0} + f(0,1)\cdot e^{-i\pi} + f(1,0)\cdot e^{0} + f(1,1)\cdot e^{-i\pi})$$

$$= \frac{1}{4}(10 \cdot\ 1 - 4(\cos\pi + i\ sin\pi) - 2 \cdot 1 + 0(\cos\pi + i\ sin\pi))$$
$$= \frac{1}{4}(10 + 4 - 2 + 0)$$
$$= 3 = \mathcal{F}_D^{-1}(0,1),$$

$$f(1,0) \quad = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1}\mathcal{F}_D(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{1}{2}m+\frac{0}{2}n\right)}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f(m,n)e^{-i\pi m}$$
$$= \frac{1}{4}(f(0,0) \cdot\ e^0 + f(0,1) \cdot e^0 + f(1,0) \cdot e^{-i\pi} + f(1,1) \cdot e^{-i\pi})$$
$$= \frac{1}{4}(10 \cdot\ 1 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot (\cos\pi + i\ sin\pi) + 0(\cos\pi + i\ sin\pi))$$
$$= \frac{1}{4}(10 - 4 + 2 + 0)$$
$$= 2 = \mathcal{F}_D^{-1}(1,0),$$

$$f(1,1) \quad = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1}\mathcal{F}_D(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n\right)}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} f[m,n]e^{-i\pi(m+n)}$$
$$= \frac{1}{4}(f(0,0) \cdot\ e^0 + f(0,1) \cdot e^{-i\pi} + f(1,0) \cdot e^{-i\pi} + f(1,1) \cdot e^{-i2\pi})$$
$$= \frac{1}{4}(10 \cdot\ 1 - 4(\cos\pi + i\ sin\pi) - 2(\cos\pi + i\ sin\pi)$$
$$+ 0(\cos 2\pi - i\ sin\ 2\ \pi))$$
$$= \frac{1}{4}(10 + 4 + 2 + 0)$$
$$= 4 = \mathcal{F}_D^{-1}(1,1)$$

Jadi, hasil invers TFD adalah $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Menggunakan perangkat Lunak Matlab

Menggunakan sintax berikut:

Masukan:

```
disp('Masukkan data input menggunakan [] (matrix): ');
x = input('');
X = fft2(x);
disp('Hasil DFT 2D:');
```

```
disp(X);
```

keluaran:

```
Hasil DFT 2D
10    -4
-2    0
```

atau dengan menggunakan kode berikut:

```
m=input('Masukkan Banyak Data m : ');
n=input('Masukkan Banyak Data n : ');
for k=1:(m)
    for l=1:(n)
        fprintf(['f(',num2str(k-1),',',num2str(l-1),')']);
X(k,l)= input(' = ');
    end
end
fprintf(['\nHasil 2D DFT\n']);
for k=1:(m)
    for l=1:(n)
        sumk(k,l)=0;
        for em=1:(m)
            for en=1:(n)
                c=cosd(2*180*(((k-1)*(em-1)/m)+((l-1)*(en-
1)/n)));
                s=-1j*sind(2*180*(((k-1)*(em-1)/m)+((l-
1)*(en-1)/n)));
                sumk(k,l)=X(em,en)*c+X(em,en)*s+sumk(k,l);
            end
        end
        fprintf(['\nF(',num2str(k-1),',',num2str(l-1),') =
',num2str(sumk(k,l)),'\n']);
    end
    fprintf('\n');
end
fprintf('Invers\n');
for k=1:(m)
    for l=1:(n)
        isum(k,l)=0;
        for em=1:(m)
            for en=1:(n)
                c=cosd(2*180*(((k-1)*(em-1)/m)+((l-1)*(en-
1)/n)));
                s=-1j*sind(2*180*(((k-1)*(em-1)/m)+((l-
1)*(en-1)/n)));
```

```
                isum(k,l)=sumk(em,en)*c+X(em,en)*s+isum(k,l);
            end
        end
        isum(k,l)=(isum(k,l)/(m*n));
        fprintf(['\nf(',num2str(k-1),',',num2str(l-1),') =
',num2str(isum(k,l)),'\n']);
    end
end[15]
```

1.6.4.1 Sifat Transformasi Fourier Diskrit

Transformasi Fourier sendiri memiliki beberapa sifat yang menjadi pembangun dalam pembuktian bebereapa teorema.

Beberapa sifat transfromasi Fourier diskrit seperti berikut,

1. Linear

$$\sum_{J=0}^{N-1}(a_1x_1+a_2x_2)\,e^{-2\pi i\frac{k}{N}} = a_1\sum_{J=0}^{N-1}(x_1)\,e^{-2\pi i\frac{k}{N}} + a_2\sum_{J=0}^{N-1}(x_2)\,e^{-2\pi i\frac{k}{N}} \tag{15}$$

dengan a_1, a_2 konstan riil.

Bukti:

$$\sum_{J=0}^{N-1}(a_1x_1(j)+a_2x_2(j))\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}} = \sum_{J=0}^{N-1}(a_1x_1(j))\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}} + \sum_{J=0}^{N-1}(a_1x_2(j))\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}}.$$

Karena a_1 dan a_2 konstan, maka bisa dikeluarkan sehingga diperoleh,

$$\sum_{J=0}^{N-1}(a_1x_1(j)+a_2x_2(j))\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}} = a_1\sum_{J=0}^{N-1}(x_1(n))\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}} + a_2\sum_{J=0}^{N-1}(x_2(n))\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}}.$$

2. Periodisitas

Jika $x(n+N) = x(n)$ untuk semua n, maka

$$\sum_{J=0}^{N-1} x(j)\,e^{-2\pi ij\frac{k+N}{N}} = \sum_{J=0}^{N-1} x(j)\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}}.\ \text{untuk semua } k. \tag{16}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi TFD pada persamaan (7) maka persamaan dengan domain $k+N$ dapat ditulis

$$\sum_{J=0}^{N-1} x(j)\,e^{-2\pi ij\frac{k+N}{N}} = \sum_{J=0}^{N-1} x(j)\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}}\,e^{-2\pi ij\frac{N}{N}}.$$

Untuk $e^{-2\pi ij\frac{N}{N}} = e^{-2\pi ij}$, berdasarkan persamaan (8) maka $e^{-2\pi ij} = 1$, Jadi diperoleh,

$$\sum_{J=0}^{N-1} x(j)\,e^{-2\pi ij\frac{k+N}{N}} = \sum_{J=0}^{N-1} x(j)\,e^{-2\pi ij\frac{k}{N}}.$$

3. Konjugat

$$\sum_{J=0}^{N-1} x(m)\, e^{-2\pi i j \frac{m}{N}} = \overline{\sum_{J=0}^{N-1} x(N-M)\, e^{-2\pi i j \frac{N-m}{N}}}. \quad (17)$$

Bukti:

Berdasarkan persamaan (8) diperoleh,

$$e^{-2\pi ij} = \cos(-2\pi j) + i\sin(-2\pi j) = \cos(2\pi j) - i\sin(2\pi j) = \overline{e^{2\pi ij}}.$$

Misalkan $\sum_{J=0}^{N-1} x(m)\, e^{-2\pi i \frac{N-m}{N}}$, maka

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i \frac{N-m}{N}} &= e^{2\pi i \frac{m-N}{N}} \\ &= e^{2\pi i \frac{m}{N}} \\ &= \overline{e^{-2\pi i \frac{m}{N}}}. \end{aligned}$$

1.6.4 Citra Digital

Citra digital merupakan representasi dari objek visual dalam bentuk yang dapat diproses oleh komputer. Dalam konteks pengolahan citra, citra digital adalah hasil dari pencuplikan dan kuantisasi dari sinyal visual yang kontinu. Pencuplikan (sampling) dilakukan untuk mengkonversi sinyal kontinu menjadi sinyal diskrit dengan mengambil nilai-nilai pada interval tertentu di dalam ruang citra. Secara matematis, citra digital dapat dianggap sebagai fungsi dua dimensi $f(x, y)$ dengan x dan y adalah koordinat spasial pada bidang citra[2]. Citra digital tersusun atas piksel-piksel diskrit yang memiliki nilai intensitas atau warna tertentu. Nilai intensitas ini biasanya direpresentasikan dalam format grayscale (tingkat keabuan) atau RGB (merah, hijau, biru). Pemrosesan citra digital adalah bidang ilmu yang mempelajari teknik-teknik untuk memanipulasi dan menganalisis citra digital.

1.6.5 Filtering

Dalam pemrosesan citra digital, filtering atau penyaringan adalah teknik yang digunakan untuk memodifikasi nilai piksel pada citra digital dengan tujuan tertentu. Proses ini dilakukan dengan menerapkan operasi matematis pada piksel-piksel citra, baik secara individual maupun dalam kelompok. Filtering frekuensi mengubah citra dari domain spasial ke domain frekuensi, di mana filter diterapkan untuk menghilangkan atau memperkuat komponen frekuensi tertentu. Contohnya termasuk filter low-pass, filter high-pass. Pemilihan jenis filter yang tepat tergantung pada tujuan pemrosesan citra dan karakteristik citra itu sendiri. Filter low-pass bertujuan untuk menekan komponen dengan frekuensi tinggi dan membiarkan komponen berfrekuensi rendah relatif tidak berubah. Salah satu jenis filter low-pass yaitu Gaussian *low-pass filter* (GLPF). Sedangkan filter *high-pass* bertujuan untuk menekan komponen dengan frekuensi rendah dan meloloskan komponen yang frekuensi tinggi. Salah satu jenis filter low-pass yaitu Gaussian high-pass filter(GHPF)[10].

Berikut adalah beberapa tujuan filtering:

Penajaman gambar: Penajaman gambar bertujuan untuk meningkatkan ketajaman tepi objek pada citra. Filtering dapat digunakan untuk mempertegas tepi objek dan membuat citra terlihat lebih tajam.

Penghalusan dan pengkaburan: Penghalusan dan pengkaburan bertujuan untuk membuat gambar lebih halus atau melakukan pengkaburan untuk kepentingan tertentu[10].

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

Dalam penelitian ini dilakukan pengolahan citra pada domain frekuensi. Citra yang digunakan adalah citra hasil kamera yang disimpan dalam format .jpg. Pengolahan data citra dilakukan dari sistem yang dibangun pada program Matrix Laboratory (Matlab) seri R2013b.

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi literatur atau penelitian pustaka melalui pengumpulan bahan-bahan penelitian dari jurnal, buku dan literatur lainnya, yang berkaitan dengan sifat-sifat transformasi Fourier dan aplikasinya dalam pemrosesan citra digital.

3.2 Tempat dan Waktu Penelitian

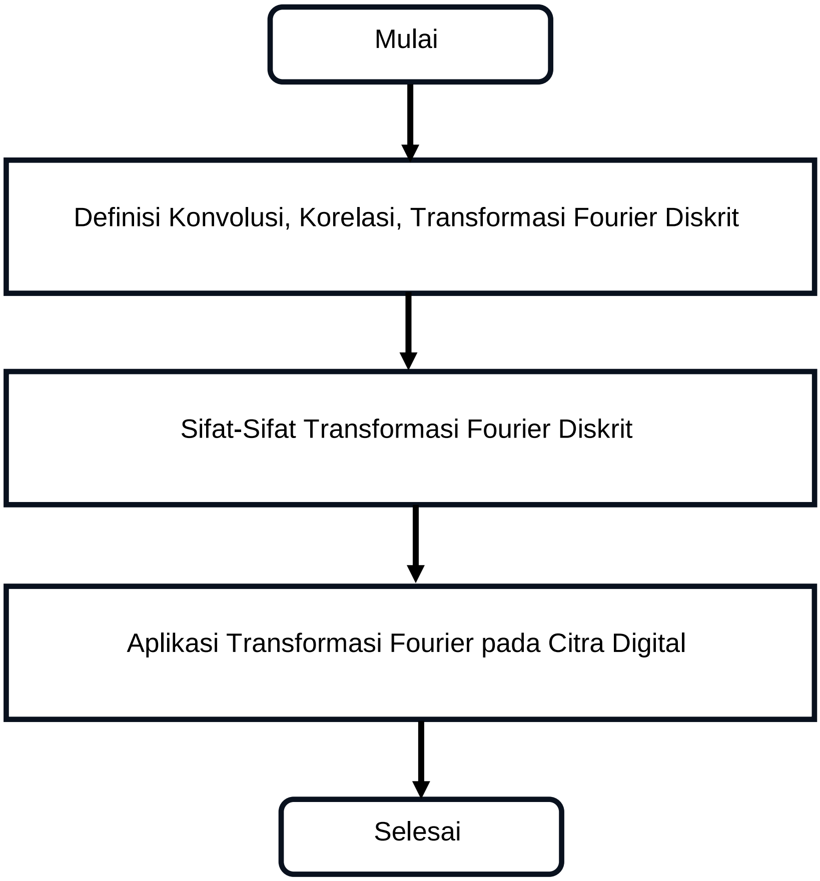
Penelitian ini dilakukan di Laboratorium Analisis Departemen Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin. Waktu pelaksanaan penelitian ini dimulai pada bulan Februari sampai Mei 2024

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan penelitian yang dilakukan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengumpulkan dan mengkaji jurnal serta literatur ilmiah yang berhubungan dengan konvlusi, korelasi, transformasi Fourier diskrit, sifat-sifat transformasi Fourier diskrit dan pemrosesan citra digital.
2. Membuktikan sifat sifat transformasi Fourier.
3. Mengumpulkan data berupa citra digital untuk diproses dengan menggunakan transfromasi Fourier diskrit.
4. Mengolah data citra digital menggunakan matlab dan membandingkan hasil masing-masing.
5. Penarikan kesimpulan.

3.4 Diagram Alur Penelitian



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian