**PEMODELAN *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION* DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA *BERNDT-HALL-HALL-HAUSMAN***

**(Studi Kasus: Kematian Ibu dan Neonatal di Sulawesi Selatan Tahun 2021)**


**NURUL IKHSANI**
**H062222015**

| | | |
|---|---|---|
| **Dosen Pembimbing** | : | **1. Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.** |
| | : | **2. Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.** |
| **Dosen Penguji** | : | **1. Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si.** |
| | | **2. Prof. Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.** |
| | | **3. Dr. Nirwan, M.Si.** |

**PROGRAM STUDI MAGISTER STATISTIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**
**2024**

**PEMODELAN *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION* DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA *BERNDT-HALL-HALL-HAUSMAN***

**(Studi Kasus: Kematian Ibu dan Neonatal di Sulawesi Selatan Tahun 2021)**

**NURUL IKHSANI**

**H062222015**

**PROGRAM STUDI MAGISTER STATISTIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**
**2024**

# PEMODELAN *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION* DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA *BERNDT-HALL-HALL-HAUSMAN*

**(Studi Kasus: Kematian Ibu dan Neonatal di Sulawesi Selatan Tahun 2021)**

Tesis
sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Magister Statistika

Disusun dan diajukan oleh

NURUL IKHSANI
H062222015

Kepada

**PROGRAM STUDI MAGISTER STATISTIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2024**

**TESIS**

PEMODELAN *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION* DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA *BERNDT-HALL-HALL-HAUSMAN*
(Studi Kasus: Kematian Ibu dan Neonatal di Sulawesi Selatan Tahun 2021)

**NURUL IKHSANI**
**H062222015**

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Magister pada 20 November 2024
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Magister Statistika
Departemen Statisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:

| Pembimbing Utama | Pembimbing Pendamping |
|---|---|
| **Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.** | **Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.** |
| NIP. 19750429 200003 2 001 | NIP. 19770808 200501 2 002 |

| Ketua Program Studi Magister Statistika | Dekan Fakultas Matematika dan Magister Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin |
|---|---|
| **Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.** | **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** |
| NIP. 19750429 200003 2 001 | NIP. 19720515 199702 1 002 |

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS HASANUDDIN FAKULTAS MIPA

# PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

# DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Pemodelan *Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* Dengan Menggunakan Algoritma *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (Studi Kasus: Kematian Ibu dan Neonatal di Sulawesi Selatan Tahun 2021)" adalah benar karya saya dengan arahan dari tim pembimbing (Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si. dan Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.). Karya Ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi manapun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari tesis ini akan dipublikasikan di *Communication in Mathematical Biology and Neoroscience* sebagai artikel dengan judul "*Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression Modeling With The Berndt-Hall-Hall-Hausman Algorithm On Maternal And Neonatal Mortality Data*".

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 20 November 2024

NURUL IKHSANI

NIM. H062222015

## UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji hanya milik Allah *Subhanallahu Wa Ta'ala* atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis. Shalawat dan salam tercurahkan kepada Rasulullah *Shallallahu 'Alaihi Wa sallam*, keluarganya, *tabi'in*, *tabi'ut tabi'in*, serta orang-orang sholeh yang haq hingga kadar Allah berlaku atas diri mereka. *Alhamdulillaahirobbil'aalamiin*, berkat rahmat dan kemudahan dari Allah *Subhanallahu Wa Ta'ala*, penulis dapat menyelesaikan tesis berjudul "Pemodelan *Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* Dengan Menggunakan Algoritma *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (Studi Kasus: Kematian Ibu dan Neonatal di Sulawesi Selatan Tahun 2021)" sebagai salah satu syarat memperoleh gelar magister pada Program Studi Magister Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian tesis ini tidak lepas dari bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Ibu Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si., selaku pembimbing utama dan Ibu Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si., selaku pembimbing pertama yang dengan sabar telah menyisihkan waktu dan pikirannya di tengah berbagai kesibukan dan prioritasnya, selalu memberikan panduan, dorongan, motivasi, dan kemudahan kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada Ibu Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si., Ibu Prof. Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si., dan Bapak Dr. Nirwan, M.Si., selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan membangun, arahan dalam penyempurnaan penyusunan tesis ini, serta waktu yang telah diluangkan untuk penulis.

Penulis haturkan rasa terima kasih yang setulus-tulusnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya untuk kedua orang tua penulis, Bapak Muhammad Said dan Ibu Suheni atas segala doa, kasih sayang, pengertian, perhatian yang tulus, pengorbanan dan perjuangaan serta dukungan yang luar biasa yang telah diberikan selama ini. Spesial untuk sahabat penulis yaitu Nur Hidayah L dan Rifka Yulia Sari Ifadah Latif, terima kasih atas waktu, dukungan, dorongan, dan motivasi yang telah diberikan selama proses perkuliahan dan penyusunan tesis ini. Teman seperjuangan di Program Studi Magister Statistika Angkatan 7, Uli, Nuge, Kak Haura, Kak Ani, Kak Miftah, Hikmah, Lili, Kak Ikka, Kak Nola, Mega, Isra, Kak Cici, Fira dan lainnya terima kasih atas bantuan, dukungan, dan kebersamaannya selama ini. Terima kasih untuk Kak Fadil atas dukungan, bantuan, motivasi dan kebersamaannya selama penyusunan tesis ini. Terima kasih untuk teman seperjuangan di ruang asisten, Mba Putri, Haksar, Syahrul, Edi, Musafir, Afiq dan lainnya atas bantuan dan kebersamaannya selama ini. Terima kasih untuk teman dan senior seperjuangan di ruang diskusi, Kak Fadly, Fiska, Kak Taufiq dan lainnya atas dukungan dan kebersamaan selama penyusunan tesis ini. Serta kepada pihak yang tidak dapat penulis tuliskan satu-persatu, terimakasih atas bantuannya.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam tesis ini, untuk itu dengan segala kerendahan hati, penulis memohon maaf.

Makassar, 20 November 2024

Nurul Ikhsani

# ABSTRAK

NURUL IKHSANI. **Pemodelan *Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* Dengan Menggunakan Algoritma *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (Studi Kasus: Kematian Ibu dan Neonatal di Sulawesi Selatan Tahun 2021)** (dibimbing oleh Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si. dan Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.)

**Latar Belakang:** Angka kematian ibu dan neonatal masih menjadi masalah ksehatan di Indonesia. Provinsi Sulawesi Selatan merupakan salah satu provinsi yang memiliki angka kematian ibu dan neonatal yang masih tinggi dibanding dengan rata-rata semua provinsi di Indonesia. Data kejadian tersebut sering mengalami masalah overdispersi. Regresi *Bivariate Poisson Inverse Gaussian* dapat digunakan untuk mengatasi masalah tersebut tetapi tidak dapat mengatasi masalah heterogenitas spasial antar lokasi pengamatan. Pemodelan *Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* (GWBPIGR) merupakan pengembangan metode sebelumnya untuk mengatasi masalah heterogenitas spasial antar lokasi pengamatan. Parameter model GWBPIGR diestimasi menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan algoritma *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (BHHH) yang merupakan pengembangan dari algoritma Newton Raphson. **Tujuan:** Penelitian ini bertujuan untuk melakukan pemodelan GWBPIGR dengan menggunakan algoritma BHHH pada kasus kematian ibu dan neonatal di setiap kabupaten/kota Provinsi Sulawesi Selatan tahun 2021. **Metode:** Adapun metode pada penelitian ini yaitu menggunakan metode GWBPIGR dengan estimasi MLE dengan bantuan algoritma BHHH. **Hasil:** Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa nilai AIC dari model GWBPIGR dengan algoritma BHHH lebih kecil dibanding model BPGR. **Kesimpulan:** Dari hasil penelitian, penggunaan metode GWBPIGR menghasilkan tiga kelompok variabel predictor yang berpengaruh signifikan di kabupaten/kota Provinsi Sulawesi Selatan. Dengan demikian, metode GWBPIGR lebih baik dalam memodelkan data kasus kematian ibu dan neonatal di setiap kabupaten/kota Provinsi Sulawesi Selatan tahun 2021.

Kata Kunci: GWBPIGR, overdispersi , heterogenitas spasial, algoritma *Berndt-Hall-Hall-Hausman*, kematian ibu, kematian neonatal

# ABSTRACT

NURUL IKHSANI. **Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression Modeling Using the Berndt-Hall-Hall-Hausman Algorithm (Case Study: Maternal and Neonatal Mortality in South Sulawesi in 2021)** (supervised by Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si. and Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.).

**Background:** Maternal and neonatal mortality rates are still a health problem in Indonesia. South Sulawesi Province is one of the provinces that has a high maternal and neonatal mortality rate compared to the average of all provinces in Indonesia. The data of these events often experience overdispersion problems. The Gaussian Poisson Inverse Bivariate Regression can be used to solve the problem but cannot solve the problem of spatial heterogeneity between observation sites. Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression (GWBPIGR) modeling is a development of a previous method to overcome the problem of spatial heterogeneity between observation sites. The parameters of the GWBPIGR model were estimated using the Maximum Likelihood Estimation (MLE) with the Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) algorithm which is a development of Newton Raphson's algorithm. **Objective:** This study aims to model GWBPIGR using the BHHH algorithm in cases of maternal and neonatal deaths in each district/city of South Sulawesi Province in 2021. **Methods:** The method in this study is using the GWBPIGR method with MLE estimation with the help of the BHHH algorithm. **Results:** The results of this study show that the AIC value of the GWBPIGR model with the BHHH algorithm is smaller than that of the BPGR model. **Conclusion:** From the results of the study, the use of the GWBPIGR method produced three groups of predictor variables that had a significant effect in the districts/cities of South Sulawesi Province. Thus, the GWBPIGR method is better in modeling data on maternal and neonatal mortality cases in each district/city of South Sulawesi Province in 2021.

Keywords: GWBPIGR, overdispersion, spatial heterogeneity, Berndt-Hall-Hall-Hausman algorithm, maternal death, neonatal death

# DAFTAR ISI

Halaman


HALAMAN JUDUL ........ i

PERNYATAAN PENGAJUAN ........ ii

HALAMAN PENGESAHAN ........ iii

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS ........ iv

UCAPAN TERIMA KASIH ........ v

ABSTRAK ........ vii

ABSTRACT ........ viii

DAFTAR ISI ........ viii

DAFTAR TABEL ........ x

DAFTAR GAMBAR ........ xi

DAFTAR LAMPIRAN ........ xii

BAB I PENDAHULUAN ........ 1

1.1 Latar Belakang ........ 1

1.2 Rumusan Masalah ........ 2

1.3 Batasan masalah ........ 3

1.4 Tujuan Penelitian ........ 3

1.5 Manfaat Penelitian ........ 3

1.6 Teori……….. ........ 3

1.6.1 Regresi *Poisson Inverse Gaussian* ........ 3

1.6.2 Regresi Bivariate Poisson Inverse Gaussian ........ 4

1.6.3 Metode *Maximum Likelihood Estimation* ........ 5

*1.6.4 Geographically Weighted Regression* ........ 6

*1.6.5 Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* ........ 6

1.6.6 Pembobot ........ 7

1.6.7 Algoritma Berndt-Hall-Hall-Hausman ........ 8

1.6.8 Pengujian hipotesis model regresi Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian ........ 9

1.6.8.1 Uji korelasi variabel respon ........ 9

1.6.8.2 Uji asumsi distribusi Bivariate Poisson ........................................ 9
1.6.8.3 Uji multikolinearitas ........................................ 10
1.6.8.4 Uji overdispersi ........................................ 10
1.6.8.5 Uji heterogenitas spasial ........................................ 10
1.6.8.6 Uji serentak parameter model ........................................ 11
1.6.8.7 Uji parsial parameter model ........................................ 11
1.6.9 Pemilihan model terbaik ........................................ 12
1.6.10 Kematian Ibu dan Neonatal ........................................ 12
1.6.11 Kerangka konseptual ........................................ 13
BAB II METODE PENELITIAN ........................................ 14
2.1 Sumber Data ........................................ 14
2.2 Variabel Penelitian ........................................ 14
2.3 Langkah Analisis ........................................ 14
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN ........................................ 17
3.1 Statistik Deskriptif ........................................ 17
3.2 Uji Korelasi Variabel Respon ........................................ 18
3.3 Uji Distribusi Bivariate Poisson ........................................ 19
3.4 Uji Overdispersi ........................................ 19
3.5 Uji Multikolinearitas ........................................ 20
3.6 Uji Heterogenitas Spasial ........................................ 20
3.7 Pembentukan Bobot Spasial ........................................ 21
3.8 Estimasi Parameter Model Regresi GWBPIG dengan Menggunakan Algoritma BerndtHallMan pada Kasus Kematian Ibu dan Neonatal di Sulawesi Selatan tahun 2021 ........................................ 23
3.9 Pemodelan Regresi GWBPIG Pada Data Kasus Kematian Ibu dan Kematian Neonatal di Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2021 .............. 33
3.10 Pemilihan Model Terbaik ........................................ 35
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN ........................................ 37
4.1 Kesimpulan.. ........................................ 37
4.2 Saran……… ........................................ 37
DAFTAR PUSTAKA ........................................ 39
LAMPIRAN ........................................ 41

# DAFTAR TABEL

Nomor urut Halaman

1. Variabel Penelitian ........................................................................................ 14
2. Deskriptif Data ................................................................................................ 17
3. Uji Overdispersi ............................................................................................... 19
4. Uji Multikolinearitas ......................................................................................... 20
5. Uji Heterogenitas Spasial ................................................................................ 21
6. Bandwith Model GWBPIGR ............................................................................. 21
7. Bandwith optimum untuk setiap kabupaten/kota di Sulawesi Selatan ................ 22
8. Hasil pemodelan GWBPIGR ............................................................................ 33
9. Pemilihan model terbaik ................................................................................... 35

## DAFTAR GAMBAR

Nomor urut Halaman

1. Kerangka konseptual ........................................................................................13
2. Sebaran pengaruh variabel kematian ibu pada model GWBPIGR ......................34
3. Sebaran pengaruh variabel kematian neonatal pada model GWBPIGR ............35

# DAFTAR LAMPIRAN

Nomor urut Halaman

1. Data Penelitian ......................................................................................42
2. Jarak Euclidean ......................................................................................43
3. Matriks Pembobot....................................................................................47
4. Pemodelan GWBPIGR ............................................................................51

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Regresi Poisson merupakan metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel respon dan variabel predictor yang berdistribusi Poisson. Distribusi Poisson adalah distribusi diskrit dan nilai variabel random berupa nilai bulat positif sehingga menjadi opsi yang baik akan pemodelan data cacahan. Distribusi Poisson semata-mata ditentukan oleh satu parameter yang menerangkan baik mean maupun varians dari distribusi tersebut, sehingga dalam regresi Poisson terdapat asumsi yang harus terpenuhi yaitu mean dan varians variabel respon harus sama (*equidispersion*). Namun pada kenyataannya kerap ada pelanggaran asumsi yaitu varians lebih besar dari mean (*overdispersion*) (Alrweili, 2024).

Adapun langkah untuk mengatasi terjadinya overdispersi adalah memilih sejumlah pemodelan yang merupakan kombinasi dari distribusi poisson dengan sejumlah distribusi baik diskrit maupun kontinu (*mixed Poisson distribution*). Salah satu *mixed Poisson distribution* yang kerap digunakan dalam penelitian untuk mengatasi kasus overdispersi adalah distribusi *Poisson Inverse Gaussian* (PIG) (Consul dan Famoye, 1992). PIG merupakan gabungan dari distribusi Poisson dan *Inverse Gaussian*. PIG lebih sensitif untuk mengatasi overdispersi dibanding metode Binomial Negatif (Alrweili, 2024). Penelitian tentang PIG telah banyak dilakukan diantaranya yaitu Zha et al (2014) telah membahas model regresi linear umum PIG pada kasus data kecelakaan bermotor. Saraiva et al (2022) telah membahas tentang PIG pada kasus demam berdarah.

Dalam metode PIG, terdapat tahap pengestimasian parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang berfungsi untuk memaksimumkan fungsi *likelihood*. Dalam proses tersebut tidak semuanya bisa diselesaikan dengan cara analitik. Jika diperoleh bentuk implisit dan non linear, maka dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH). Algoritma BHHH merupakan pengembangan dari algoritma *Newton Raphson.* Algoritma *Newton Raphson* memiliki matriks Hessian yang isinya turunan kedua sehingga iterasi nya lebih kompleks. Oleh karena itu, dikembangkan menjadi algoritma BHHH yang hanya memerlukan turunan pertama dalam matriks Hessian yang lebih simple (Berndt et al., 1974). Penelitian sebelumnya yang dilakukan Calveria, A. I. (2021) mendapatkan hasil bahwa algoritma BHHH lebih baik dibandingkan dengan algoritma *Fisher Scoring.*

Pada kenyataannya, terdapat variabel respon yang saling berhubungan dengan variabel respon lainnya. Penerapan dua regresi pada jumlah kejadian bersama yang berpasangan menghasilkan estimator yang tidak konsisten dan tidak efisien. Sehingga lebih baik diestimasi secara bersama-sama dibandingkan dengan satu-satu. Salah satu contoh data cacahan dalam lingkungan kesehatan adalah kasus kematian ibu dan kematian neonatal. Hasil dari Survey Demografi Kesehatan

Indonesia untuk tahun 2019 menunjukkan bahwa angka kematian ibu mencapai 359 per 100.000 kelahiran hidup dan angka kematian bayi mencapai 34 per 1000 kelahiran hidup yang berarti angka yang diperoleh jauh dari target MDGs (Dinkes, 2021). Menurut UNICEF (2018), lebih dari setengah kematian bayi, terjadi pada masa neonatus. Usia bayi 0-28 hari (masa neonatus) merupakan masa paling rentang untuk terkena berbagai masalah Kesehatan. Berdasarkan data Kemenkes (2019), 80% kematian bayi terjadi pada periode enam hari pertama kehidupan. Berdasarkan hal tersebut, hasil dari eksplorasi data menunjukkan bahwa kasus tersebut saling berkorelasi dan mengalami overdispersi, maka analisis yang digunakan disebut regresi *Bivariat Poisson Inverse Gaussian* (BPIG). Penelitian sebelumnya yang membahas metode BPIGR salah satunya yaitu Mardalena et al (2021) mendapatkan hasil bahwa model BPIGR merupakan model yang tepat untuk pemodelan jumlah kematian bayi dan ibu. Ikhsani et al (2022) juga menggunakan metode BPIGR untuk kasus kematian ibu dan kematian neonatal di Sulawesi Selatan, namun model yang dihasilkan hanya mewakili seluruh kabupaten/kota di Sulawesi Selatan yang tidak menjelaskan pengaruh variabel predictor di setiap kabupaten/kota di Sulawesi Selatan. Sehingga, metode sebelumnya dikembangkan menjadi metode yang bisa mengatasi efek spasial yang terjadi pada data yaitu *Geographically Weighted Bivarite Poisson Inverse Regression* (GWBPIGR).

GWBPIGR merupakan suatu metode statistika yang merupakan pengembangan dari regresi BPIGR namun yang membedakan adalah dalam metode ini memperhatikan pembobot berupa letak lintang dan letak bujur dari titik-titik pengamatan yang diamati. Sehingga dalam model GWBPIGR variabel respon dipengaruhi oleh variabel prediktor yang koefisien regresinya dipengaruhi letak geografis. Model GWBPIGR menghasilkan penaksir parameter model yang bersifat lokal untuk setiap titik pengamatan. Dalam GWBPIGR digunakan matriks pembobot yang besarnya bergantung pada kedekatan antar lokasi pengamatan. Penaksiran parameter model GWBPIGR telah dilakukan oleh Junita Amalia (2020) pada kasus baru kusta PB dan MB dengan menggunakan algoritma *Newton Raphson*. Penelitian tersebut memiliki saran bahwa algoritma *Newton* Raphson terkendala jika deteriminan matriks Hessian bernilai nol.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis akan meneliti penerapan metode *Geographycally Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* (GWBPIGR) pada data yang mengalami overdispersi dengan menggunakan algoritma BHHH pada kasus kematian ibu dan neonatal di Sulawesi Selatan tahun 2021.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter model regresi GWBPIG dengan menggunakan algoritma BerndHallMan pada kasus kematian ibu dan neonatal di Sulawesi Sulatan tahun 2021?

2. Bagaimana model regresi GWBPIG dengan menggunakan algoritma BerndHallMan pada data kasus kematian ibu dan kematian neonatal di Sulawesi Selatan tahun 2021?

### 1.3 Batasan masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi kasus yang digunakan yaitu kasus kematian ibu dan kematian neonatal di Sulawesi Selatan tahun 2021. Jumlah kasus kematian ibu dan kematian neonatal di Sulawesi Selatan saling berkorelasi, berdistribusi *Bivariate Poisson,* dan overdispersi.
2. Terjadi heterogenitas pada studi kasus di setiap wilayah di Sulawesi Selatan.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini yaitu

1. Mengestimasi parameter model regresi GWBPIG dengan menggunakan algoritma BHHH pada kasus kematian ibu dan neonatal di Sulawesi Sulatan tahun 2021.
2. Memodelkan regresi GWBPIG dengan menggunakan algoritma BHHH pada data kasus kematian ibu dan kematian neonatal di Sulawesi Selatan tahun 2021.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini yaitu

1. Salah satu sumber referensi keilmuwan tentang cara mengestimasi metode GWBPIGR yang memiliki relevansi dengan penelitian ini.
2. Memberikan informasi kepada instansi pemerintah khususnya provinsi Sulawesi Selatan untuk mengevaluasi upaya penurunan jumlah kasus kematian ibu dan neonatal.

### 1.6 Teori

#### 1.6.1 Regresi *Poisson Inverse Gaussian*

Salah satu solusi memodelkan data cacahan yaitu dengan menggunakan distribusi *mixed Poisson*. Salah satu distibusi dari *mixed Poisson* yaitu distribusi *Poisson Inverse Gaussian* (PIG). Distribusi PIG merupakan gabungan dari distribusi Poisson dan *Inverse* Gaussian.

Misalkan Y adalah variabel respon yang berdistribusi *Poisson Inverse Gaussian*, maka fungsi kepadatan peluang bagi Y adalah

$$P(Y = y|\mu, \tau) = \int_0^\infty f(y|\mu, v)g(v, \tau)\, dv$$

dengan

$f(y|\mu, v) = \frac{e^{-v\mu}(\mu v)^y}{y!}$

$g(v,\tau) \quad = (2\pi v^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-(v-1)^2/2\tau v}$

$v$ = efek random yang berdistribusi *inverse* gaussian

Berdasarkan parameternya, distribusi PIG terdiri dari dua parameter,yaitu parameter rata-rata ($\mu$) dan parameter dispersi ($\tau$). Jika Y adalah variabel respon yang berdistribusi PIG, maka distribusi PIG dapat dinotasikan dengan $Y \sim PIG(\mu,\tau)$. Sehingga fungsi kepadatan peluang dapat ditulis pada persamaan berikut (Putri et al., 2020):

$$P(y|\,\mu,\tau) = e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\mu)^{-\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)}{2}} \frac{\mu^y}{y\,!} \;; y = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

dengan

$z \quad = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\mu}{\tau}}$

$s \quad = y - \frac{1}{2}$

$K_s(z) = K_{y-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\mu}{\tau}}$ sebagai fungsi Bessel modifikasi jenis ketiga.

Untuk

$y$ = variabel respon

$\tau$ = parameter dispersi

$\mu$ = rata-rata.

Shoukri et al., (2004) dalam publikasinya "*The Poisson Inverse Gaussian Regression Model in the Analysis of Clustered Counts Data*" mengatakan bahwa dengan memanfaatkan sifat-sifat fungsi Bessel maka diketahui bahwa:

$$M(y_i) = \frac{1}{\sqrt{1+2\tau\mu}} \frac{K_{y+\frac{1}{2}}(z)}{K_{y-\frac{1}{2}}(z)} \tag{2}$$

Regresi PIG digunakan sebagai alternatif dari model regresi Poisson yang mengalami masalah overdispersi. Pada regresi PIG dimisalkan $Y_i$ adalah variabel respon untuk pengamatan ke-i. Sehingga model regresi PIG dapat dituliskan seperti pada persamaan berikut (Willmot, 1987):

$$\mu_i = e^{\boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{\beta}} \text{ atau } ln(\mu_i) = \boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{\beta} \tag{3}$$

dengan

$\boldsymbol{X}_i^T$: vektor variabel prediktor pengamatan ke-i

$\boldsymbol{\beta}$: vektor koefisien regresi

untuk $i = 1,2,\ldots,n$ sebagai pengamatan.

### 1.6.2 Regresi Bivariate Poisson Inverse Gaussian

Jika terdapat dua variabel random $Y_1$ dan $Y_2$ yang berdistribusi Poisson dan tidak saling bebas, yang mempunyai rata-rata $v\mu_1$ dan $v\mu_2$. Variabel *v* merupakan variabel random yang berdistribusi *Inverse Gaussian*. Hal tersebut menunjukkan bahwa $Y_1$ dan $Y_2$ berdistribusi *mixed Poisson*, yaitu *Bivariate Poisson Inverse Gaussian* (BPIG). Berdasarkan Persamaan (1), distribusi BPIG memiliki fungsi kepadatan gabungan sebagai berikut (Mardalena et al., 2021):

$$P(y_j | j = 1,2) = e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_j\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_j - 1\right)}{4}} \prod_{j=1}^{2} \frac{\mu_j^{\,y_j}}{y_j\,!} \tag{4}$$

dengan

$z \quad = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{2(\mu_1+\mu_2)}{\tau}}$

$s \quad = y_1 + y_2 - \frac{1}{2}$

$K_s(z) = K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{2\tau(\mu_1 + \mu_2) + 1}\right)$ sebagai fungsi Bessel modifikasi jenis ketiga

Model regresi *Bivariate Poisson Inverse Gaussian* (BPIG) memiliki dua variabel respon yang saling berkorelasi. Misalkan $y_{ij}$ sebagai variabel respon untuk pengamatan ke-*i* dan variabel respon ke-*j* dengan sampel random $Y_{1i}Y_{2i} \sim BPIG(\mu_{ij}, \tau)$ dimana $i = 1,2,..,n$ dan $j = 1,2,$ .Fungsi penghubung log natural (ln) diperlukan dalam pemodelan BPIG. Fungsi penghubung ln digunakan untuk menghubungkan parameter $\mu_{ij}$ dengan variabel penjelas. Sehingga model regresi BPIG pada persamaan berikut (Mardalena et al., 2021):

$$\mu_{ij} = exp\left(\boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{\beta}_j + \varepsilon_{ij}\right)$$

$$ln\left(\mu_{ij}\right) = \boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{\beta}_j + \varepsilon_{ij} \tag{5}$$

dengan

$\boldsymbol{X}_i^T = \left[1\ X_{i1}\ X_{i2}\ \dots\ X_{ip}\right]_{1\times(p+1)}$ sebagai vektor variabel prediktor $k = 1,2, \dots, p$ pada pengamatan ke- $i = 1,2, \dots, n$

$\boldsymbol{\beta}_j = \left[\beta_{j0}\ \beta_{j1}\ \beta_{j2}\ \cdots\ \beta_{jp}\right]_{1\times(p+1)}^T$ sebagai vektor koefisien regresi

$\varepsilon_{ij}$ = galat

### 1.6.3 Metode *Maximum Likelihood Estimation*

Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) digunakan untuk mengestimasi parameter suatu model yang fungsi probabilitasnya diketahui. Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai fungsi probabilitas bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ yang dimisalkan sebagai fungsi dari θ yang dituliskan pada persamaan berikut:

$$L(\theta |\, y) = f(y_1, y_2, \dots, y_n |\, \theta) = f(y_1|\theta).f(y_2|\theta) \dots f(y_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\theta) \tag{6}$$

Penaksir dari maksimum *likelihood* yakni nilai $\theta$, diperkenalkan fungsi ln *likelihood* yang dapat dituliskan pada persamaan berikut.

$$l(\theta|\, y) = L(\theta|\, y) = \ln\left\{\prod_{i=1}^{n} f(y_i|\theta)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \ln f(y_i|\theta) \tag{7}$$

Langkah selanjutnya yaitu mencari nilai $\theta$ yang memaksimumkan fungsi ln *likelihood* pada Persamaan (7). Hal ini dilakukan dengan cara menurunkan fungsi ln *likelihood* terhadap $\theta$ kemudian disamakan dengan nol yang dapat dituliskan pada persamaan berikut (Amalia et al 2022):

$$\frac{\partial\, l(\theta|\, y)}{\partial\theta} = 0 \tag{8}$$

### *1.6.4 Geographically Weighted Regression*

Model Geographically Weighted Regression (GWR) adalah model regresi linear untuk setiap lokasi dari data sampel. Pada model GWR, variabel respon Y diestimasi dengan variabel predictor X yang masing-masing koefisien regresinya bergantung pada lokasi data diamati. Model GWR dapat dinyatakan pada Persamaan (9) berikut (Fotheringham et al, 2002):

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik} + \varepsilon_i \tag{9}$$

Untuk
$y_i$ : variabel respon lokasi ke-i
$x_{ik}$ : variabel predictor ke-k lokasi ke-i
$\beta_0$ : nilai intersep model GWR pada lokasi ke-i
$\beta_k$ : koefisien regresi ke-k pada lokasi ke-i
$u_i$ : garis lintang pada lokasi ke-i
$v_i$ : garis bujur pada lokasi ke-i

### *1.6.5 Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression*

*Geographically Weighted Bivarite Poisson Inverse Regression* (GWBPIGR) merupakan suatu metode statistika yang merupakan pengembangan dari regresi Bivariate Poisson Inverse Gaussian namun yang membedakan adalah dalam metode ini memperhatikan pembobot berupa letak lintang dan letak bujur dari titik-titik pengamatan yang diamati. Distribusi GWBPIG memiliki fungsi kepadatan gabungan sebagai berikut

$$P\big(y_j|j = 1{,}2\big) = e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z(u, v)) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_j(u, v)\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_j - 1\right)}{4}} \prod_{j=1}^{2} \frac{\mu_j(u, v)^{y_j}}{y_j\,!}$$

(10)

dengan

$z \quad = \sqrt{\frac{1}{\tau^2}+\frac{2\sum_{j=1}^{2}\mu_j(u,v)}{\tau}}$

$s \quad = y_1 + y_2 - \frac{1}{2}$

$K_s(z) = K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_j(u,v)+1}\right)$ sebagai fungsi Bessel modifikasi jenis ketiga

Model persamaan GWBPIGR dapat dinyatakan pada persamaan berikut (Amalia et al., 2020)

$$\begin{aligned}(\mu_{ij}) &= \boldsymbol{X}_i^T\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i)\\ \ln(\mu_{ij}) &= exp\left(\boldsymbol{X}_i^T\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i)\right)\end{aligned} \quad (11)$$

dengan

$\boldsymbol{X}_i^T \quad = \left[1\ X_{i1}\ X_{i2}\ \ldots\ X_{ip}\right]_{1\times(p+1)}$ sebagai vektor variabel prediktor $k = 1,2,\ldots,p$ pada pengamatan ke- $i = 1,2,\ldots,n$

$\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i) = \left[\beta_{j0}(u_i,v_i)\quad \beta_{j1}(u_i,v_i)\quad \cdots\ \beta_{jp}(u_i,v_i)\right]_{1\times(p+1)}^T$ sebagai vektor koefisien regresi dengan matriks pembobot spasial.

### 1.6.6 Pembobot

Pembobot digunakan ketika analisis atau pemodelan memerlukan pertimbangan terhadap lokasi atau unsur geografis.. Penduga parameter di suatu lokasi ke-i akan lebih dipengaruhi oleh titik-titik yang dekat lokasi daripada titik-titik yang lebih jauh. Lokasi yang berdekatan menunjukkan hubungan kemiripan dan sebaliknya lokasi yang berjauhan akan menunjukkan keragaman spasial. Keragaman spasial antara lokasi pengamatan satu dengan yang lainnya ditunjukkan dengan adanya matriks pembobot $\boldsymbol{W}(u_i,v_i)$ berukuran n x n yang elemen-elemennya merupakan fungsi jarak *Euclidean* antar lokasi. (Fotheringham et al, 2002).

Langkah sebelum menentukan matriks pembobot yakni menentukan terlebih dahulu fungsi pembobot dan $d_{ij}$ menggunakan jarak *Euclidean* dengan persamaan sebagai berikut:

$$d_{ij} = \sqrt{\left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2} \quad (12)$$

Selanjutnya, untuk pembobot fungsi kernel terdapat empat jenis fungsi pembobot yang sering digunakan yaitu:

a. *Fixed Gaussian Kernel*

$$W_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^2\right) \quad (13)$$

*b. Adaptive Bisquare Kernel*

$$W_{ij} = \begin{cases} \left(1-\left(\frac{d_{ij}}{h_i}\right)^2\right)^2 & d_{ij} \le h_i \\ 0 & d_{ij} > h_i \end{cases} \quad (14)$$

*c. Adaptive Tricube Kernel*

$$W_{ij} = \begin{cases} \left(1-\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^3\right)^3 & d_{ij} \le h \\ 0 & d_{ij} > h \end{cases} \quad (15)$$

Diketahui $h_i$ adalah nilai *bandwith* pada lokasi pengamatan ke-i (Fotheringham et al, 2002).

Bandwidth dapat dianalogikan sebagai radius dari suatu lingkaran, sehingga sebuah titik yang terdapat dalam radius lingkaran tersebut masih dianggap memiliki pengaruh di titik lokasi. Penentuan bandwidth optimum memiliki peranan penting dalam pembentukan matriks pembobot karena akan berpengaruh pada ketepatan model terhadap data yang berkaitan dengan variansi dan bias dari penaksir yang dihasilkan. Salah satu metode untuk mendapatkan bandwith optimum adalah menggunakan *Generalized Cross Validation* (GCV) dengan Persamaan GCV sebagai berikut (Fotheringham et al, 2022):

$$GCV = n\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \hat{y}_i(h)\right)^T (y_i - \hat{y}_i(h))}{(n-v_i)^2} \quad (16)$$

Dengan

$\hat{y}_i(h)$ : nilai penaksir $y_i$

$h$ : *bandwith*

$y_i$ : nilai pengamatan variabel respon ke- *i*

$n$ : jumlah pengamatan

$v_i$ : $tr(\boldsymbol{S})$

$\boldsymbol{S}$ $= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X^T w_i X})^{-1}\boldsymbol{X^T w_i}$ sebagai matriks penaksir GWBPIGR

### 1.6.7 Algoritma Berndt-Hall-Hall-Hausman

Algoritma *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (BHHH) merupakan salah satu bentuk perluasan dari algortima *Newton Raphson* yang digunakan dalam statistik untuk menemukan Solusi optimal dari persamaaan *nonlinear*. Algoritma BHHH serupa dengan algoritma *Newton Raphson*, perbedaanya adalah BHHH tidak memerlukan turunan kedua. Langkah-langkah penaksiran parameter menggunakan algoritma BHHH sebagai berikut (Berndt et al, (1974):

a. Tentukan nilai taksiran awal.
b. Tentukan vector gradien $\boldsymbol{D}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}\right)$ untuk $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\beta}_1(u_i, v_i) \;\; \boldsymbol{\beta}_2(u_i, v_i) \;\; \tau]$ dengan menggunakan turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap parameter yang ingin ditaksir ke dalam persamaan berikut:

$$\boldsymbol{D}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right) = \left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau}\right]$$

c. Tentukan matriks Hessian yaitu

$$\boldsymbol{H}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{D}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right)\boldsymbol{D}^{T}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right).$$

d. Melakukan iterasi mulai $t = 0$ pada persamaan berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(t+1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)} - \left(\boldsymbol{H}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right)\right)^{-1} \boldsymbol{D}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right) \tag{17}$$

e. Iterasi akan berhenti jika nilai $\| \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(t+1)} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)} \| \leq \varepsilon$, dengan $\varepsilon$ merupakan $10^{-4}$.

### 1.6.8 Pengujian hipotesis model regresi Geographically Weighted Bivariate Poisson Inverse Gaussian

Pengujian hipotesis regresi GWBPIG menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Sebelum melakukan pengujian model regresi GWBPIGR, dilakukan pengujian asumsi yang harus dipenuhi pada model regresi terlebih dahulu. Pengujian asumsi dalam metode GWBPIGR terdiri atas lima pengujian, yaitu:

#### 1.6.8.1 Uji korelasi variabel respon

Salah satu syarat pada regresi GWBPIG yaitu adanya hubungan linier antar variabel respon. Uji korelasi bertujuan untuk mengetahui ada atau tidaknya hubungan antara variable respon satu dengan variabel respon lainnya. Pengujian korelasi untuk variabel respon menggunakan uji Korelasi *Pearson* dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \rho_{y_1 y_2} = 0$ ($Y_1$ dan $Y_2$ tidak berkorelasi)

$H_1 : \rho_{y_1 y_2} \neq 0$ ($Y_1$ dan $Y_2$ berkorelasi)

Statistik uji yang digunakan untuk uji korelasi adalah sebagai berikut:

$$T = \frac{r_{y_1,y_2}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{y_1,y_2}^2}} \tag{18}$$

dengan:

$$r_{y_1,y_2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_{i1} y_{i2} - \sum_{i=1}^{n} y_{i1} \sum_{i=1}^{n} y_{i2}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_{i1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_{i1}\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_{i2}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_{i2}\right)^2}}$$

dengan kriteria penolakan, $H_0$ ditolak jika $T > t_{(\frac{\alpha}{2}, n-2)}$ (Mardelena et al, 2021).

#### 1.6.8.2 Uji asumsi distribusi Bivariate Poisson

Uji distribusi *Bivariate Poisson* berfungsi untuk mengetahui variabel respon mengikuti distribusi *Bivariate Poisson* atau tidak. Pengujian asumsi distribusi *Bivariate Poisson*

dapat dilakukan dengan pendekatan *index of dispersion test* $(I_B)$. Hipotesis yang digunakan yaitu:
$H_0 : F(y_1, y_2) = F_0(y_1, y_2) = 0$ ($Y_1$ dan $Y_2$ tidak mengikuti distribusi *Bivariate Poisson*)
$H_1 : F(y_1, y_2) \neq F_0(y_1, y_2) \neq 0$ ($Y_1$ dan $Y_2$ mengikuti distribusi *Bivariate Poisson*)
Statistik uji yang digunakan untuk pengujian hipotesis sebagai berikut:

$$I_B = \frac{n\left(\bar{Y}_2 S_{Y_1}^2 - 2m_{11}^2 + \bar{Y}_1 S_{Y_2}^2\right)}{(\bar{Y}_1 \bar{Y}_2 - m_{11}^2)} \tag{19}$$

dengan
$S_{Y_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)^2}{n}$ ; $S_{Y_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{2i}-\bar{Y}_2)^2}{n}$ dan $m_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)(Y_{2i}-\bar{Y}_2)}{n}$
untuk $n =$ jumlah data pada variabel respon
Kriteria penolakan $H_0$ jika $I_B > \mathcal{X}_{(\alpha;2n-3)}^2$ (Best, 1999).

#### 1.6.8.3 Uji multikolinearitas

Uji multikolinearitas bertujuan untuk mengetahui adanya korelasi yang tinggi antar variabel prediktor pada model regresi. Kasus multikolinieritas bisa diketahui dengan melihat nilai VIF (*Variance Inflation Factors*). Rumus yang digunakan dalam uji multikolinearitas yaitu:

$$VIF = \frac{1}{1-R^2}$$

dengan $R^2$ adalah kofisien determinasi antar variabel prediktor satu dengan yang lainnya. Kriteria penolakan, $H_0$ ditolak jika $VIF > 10$. (Pendi, 2021).

#### 1.6.8.4 Uji overdispersi

Pada model regresi Poisson terdapat sejumlah asumsi yang harus dipenuhi. Salah satunya adalah asumsi mean dan variansi yang sama disebut equidispersi. Akan tetapi, dalam analisis data statistik sering dijumpai kondisi data dengan varians terkadang lebih besar dari mean (*overdispersion*) (Saputro et al.,2021).

Overdispersi bisa menimbulkan perkiraan parameter yang diperoleh tidak efisien. Penggunaan yang tidak benar pada model regresi Poisson (yang mengalami overdispersi) bisa berakibat fatal dalam interpretasi model, terutama pada perkiraan parameter model karena bisa menaksir *standard error* yang terlalu rendah dan bisa menyampaikan kesimpulan yang salah tentang signifikan atau tidaknya parameter regresi yang terlibat. Overdispersi dapat ditulis $Var(Y) > E(Y)$. Dalam mendeteksi kasus overdispresi dalam data, dapat dilihat nilai statistik deviance dan Pearson chi-square yang dibagi dengan derajat bebasnya. Jika kedua nilai lebih dari 1 maka terjadi overdispersi pada data (Nurfajrin et al.,2023).

#### 1.6.8.5 Uji heterogenitas spasial

Uji heterogenitas spasial bertujuan untuk mengetahui apakah lokasi pengamatan memiliki perbedaan karakteristik atau tidak. Heterogenitas spasial dapat diidentifikasi menggunakan pengujian Breusch Pagan dengan hipotesis sebagai berikut:
$H_0 : \sigma^2(u_i, v_i) = \sigma^2$ (Tidak terjadi heterogenitas spasial)
$H_1 : \sigma^2(u_i, v_i) \neq \sigma^2$ (Terjadi heterogenitas spasial)
Statistik uji sebagai berikut

$$BP = \frac{1}{2}\boldsymbol{f^T Z}(\boldsymbol{Z^T Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z^T} \tag{20}$$

Dengan vector $\boldsymbol{f}$ berukuran $n \times 1$ adalah

$$\boldsymbol{f} = \left[\left(\frac{e_1^2}{\sigma^2}\right) - 1, \dots, \left(\frac{e_n^2}{\sigma^2}\right) - 1\right]^T$$

Untuk
$\boldsymbol{Z}$ : matriks berdimensi n x (p + 1) yang berisi variabel independen yang telah distandarisasikan untuk setiap pengamatan
$\sigma^2$: ragam residual ($e_i$) dari model regresi Poisson
Dengan kriteria penolakan, $H_0$ ditolak jika nilai $BP > \chi^2_{(\alpha;p)}$ atau *p-value* < $\alpha$ (Diastina et al., 2019).

#### 1.6.8.6 Uji serentak parameter model

Uji serentak digunakan untuk mengetahui paling tidak terdapat satu prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap respon pada lokasi pengamatan. Parameter yang diuji pada pengujian ini mencakup seluruh parameter $\beta$ secara bersama-sama dengan hipotesis sebagai berikut:
$H_0 : \beta_{jk}(u_i, v_i) = 0$ untuk $j = 1,2 \,; k = 1,2, \dots, p$
$H_1$ : setidaknya ada satu $\beta_{jk}(u_i, v_i) \neq 0$ untuk $j = 1,2$; $k = 1,2, \dots, p$
Statistik uji yang digunakan untuk pengujian hipotesis sebagai berikut:

$$G^2 = -2\, ln\left(\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right) = 2\left[ln\left(L(\widehat{\Omega})\right) - ln\left(L(\widehat{\omega})\right)\right]$$

Keterangan:
$L(\widehat{\omega}) =$ nilai *maximum likelihood* untuk model lengkap yang tidak menyertakan variabel prediktor
$L(\widehat{\Omega}) =$ nilai *maximum likelihood* untuk model lengkap yang menyertakan variabel prediktor

Dengan kriteria penolakan $H_0$ jika nilai $G^2 > \chi^2_{\alpha;dk}$ dengan $dk$ merupakan derajat kebebasan yakni parameter dibawah populasi dikurangi parameter dibawah $H_0$, sehingga variabel prediktor secara bersama-sama memiliki pengaruh terhadap variabel respon (Fathurahman et al., 2020).

#### 1.6.8.7 Uji parsial parameter model

Uji parsial digunakan untuk mengetahui secara spesifik prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap respon pada setiap lokasi pengamatan. Parameter yang diuji pada pengujian ini yaitu parameter $\beta$ . Statistik uji yang digunakan dalam pengujian ini yaitu menggunakan uji wald. Hipotesis untuk menguji signifikansi parameter $\beta$ sebagai berikut:
$H_0$ : $\beta_{jk}(u_i, v_i) = 0$ untuk $j = 1,2;\ k = 1,2, \dots, p$
$H_1$ : setidaknya ada satu $\beta_{jk}(u_i, v_i) \neq 0$ untuk $j = 1,2;\ k = 1,2, \dots, p$
Statistik uji yang digunakan untuk pengujian hipotesis sebagai berikut:

$$W(\hat{\beta}_{jp}) = \left(\frac{\hat{\beta}_{jp}(u_i, v_i)}{se\left(\hat{\beta}_{jp}(u_i, v_i)\right)}\right)^2$$

Kriteria penolakan $H_0$ jika $W\left(\hat{\beta}_{jp}(u_i, v_i)\right) > \chi^2_{\alpha;1}$ artinya variabel prediktor memiliki pengaruh signifikan terhadap variabel respon $Y_j$ (Fathurahman et al., 2020).

### 1.6.9 Pemilihan model terbaik

Salah satu metode untuk pemilihan model terbaik yaitu menggunakan *Akaike Information Criterion* (AIC). AIC merupakan indicator yang pada dasarnya menghitung informasi yang hilang pada model. Pada penerapannya, semakin sedikit informasi yang hilang pada suatu model maka semakin baik model tersebut. Artinya, semakin kecil nilai AIC maka semakin baik model yang dibentuk. AIC dinyatakan pada Persamaan berikut (Sutherland et al.,2023)

$$AIC = -2l + 2k$$

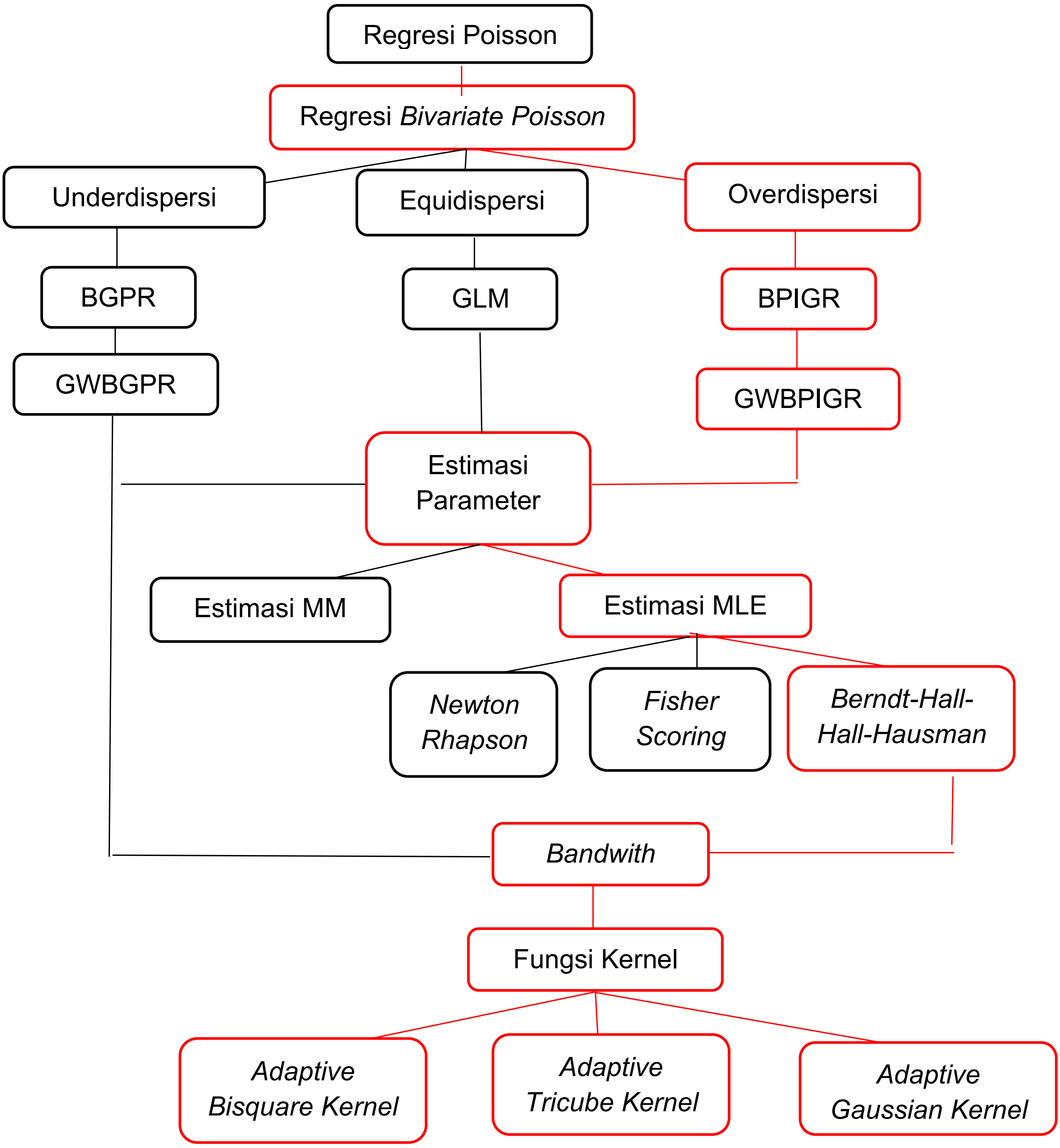
Dengan
$l$ : fungsi ln *likelihood* model
$k$ : jumlah parameter yang diestimasi

### 1.6.10 Kematian Ibu dan Neonatal

Kematian ibu adalah angka kematian ibu pada saat hamil, bersalin, atau dalam periode 42 hari setelah akhir kehamilan per 100.000 kelahiran hidup di wilayah dan waktu tertentu. Penyebab kematian ibu berkaitan dengan kehamilan atau pengobatan dan tidak disebabkan oleh kecelakaan, cedera atau alasan insidental lainnya (Aini et al., 2020).

Kematian neonatal adalah banyaknya kematian bayi yang terjadi pada bulan pertama setelah dilahirkan dan umumnya disebabkan oleh faktor yang dibawa anak sejak lahir yang diperoleh dari orang tua pada saat konsepsi atau selama kehamilan. Angka Kematian Neonatal (AKN) merupakan jumlah bayi yang meninggal satu bulan pertama setelah kelahiran (0-28 hari) yang dinyatakan dalam 1.000 kelahiran hidup pada tahun yang sama. Kematian neonatal dapat disebabkan oleh dua faktor, yaitu faktor dari ibu antara lain pelayanan kesehatan ibu hamil, infeksi ibu hamil, gizi ibu hamil, dan karakteristik dari ibu hamil (umur, paritas, dan jarak kehamilan) serta faktor dari janin antara lain bayi berat badan lahir rendah (BBLR), asfiksia, dan pneumonia (Dinkes, 2021).

### 1.6.11 Kerangka konseptual




**Gambar 1.** Kerangka Konseptual

# BAB II

# METODE PENELITIAN

## 2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang mencakup data kasus kematian ibu dan kematian neonatal di Sulawesi Selatan tahun 2021 di setiap kabupaten dan kota di Provinsi Sulawesi Selatan. Data tersebut diperoleh dari *http://dinkes.sulselprov.go.id* tepatnya pada Profil Kesehatan Sulawesi Selatan tahun 2021. Pada penelitian ini, digunakan bantuan *software R-Studio* dan IBM SPSS *Statistik*s 25.

## 2.2 Variabel Penelitian

Variabel respon dan variabel prediktor pada penelitian ini yaitu dua variabel respon (Y) dan lima variable predictor (X). Variabel respon tersebut yakni jumlah kasus kematian ibu dan kematian neonatal. Sedangkan variable predictor terdiri dari penduduk miskin, posyandu aktif, peserta KB aktif, penanganan komplikasi neonatal, dan puskesmas. Variable penelitian dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1.** Variabel Penelitian

| Variabel | Definisi Operasional |
|---|---|
| Jumlah kematian ibu ($Y_1$) | Banyaknya kematian perempuan pada saat hamil atau kematian dalam kurun waktu 42 hari setelah akhir kehamilan tanpa memandang lamanya kehamilan. |
| Jumlah kematian neonatal ($Y_2$) | Banyaknya kematian bayi yang terjadi pada bulan pertama (1-28 hari) setelah dilahirkan. |
| Persentase penduduk miskin ($X_1$) | Banyaknya penduduk miskin dibagi dengan jumlah penduduk. |
| Persentase posyandu aktif ($X_2$) | Banyaknya posyandu aktif dibagi dengan jumlah strata posyandu. |
| Persentase peserta KB aktif ($X_3$) | Banyaknya peserta KB aktif dibagi dengan jumlah pasangan usia subur. |
| Persentase penanganan komplikasi neonatal ($X_4$) | Banyaknya penanganan komplikasi neonatal dibagi dengan perkiraan penanganan neonatal komplikasi. |
| Rasio puskesmas ($X_5$) | Banyaknya fasilitas Kesehatan berupa puskesmas di daerah tersebut dibagi dengan 1000 penduduk. |

## 2.3 Langkah Analisis

Metode dan tahapan analisis yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian ini sebagai berikut:

a. Menentukan estimasi parameter model regresi GWBPIGR dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi *likelihood* berdasarkan distribusi GWBPIGR

$$L(\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i);\tau;j=1,2)=\prod_{i=1}^{n} f(y_j|\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i);\tau;j=1,2)$$

$$=e^{\frac{1}{\tau}}K_s(z(u_i,v_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\boldsymbol{X}_i^T\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i)}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_j-1\right)}{4}}\prod_{j=1}^{2}\frac{e^{\boldsymbol{X}_i^T\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i)y_j}}{y_j\,!}$$

2. Membentuk fungsi ln *likelihood* dari fungsi *likelihood*

$$ln\,L\left(\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i);\tau;j=1,2\right)=l\,(\boldsymbol{\theta})$$

3. Mencari turunan pertama fungsi logaritma natural *likelihood* dibawah populasi dan disama dengankan nol

   Misalkan $\boldsymbol{\theta}=[\boldsymbol{\beta}_1(u_i,v_i)\;\;\boldsymbol{\beta}_2(u_i,v_i)\;\;\tau\,]^T$ maka $\widehat{\boldsymbol{\theta}}=\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1\;\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2\;\hat{\tau}\,\right]^T$

   Kemudian

   $\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i);\tau;j=1,2)}{\partial\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i)}=0$ dan $\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}_j(u_i,v_i);\tau;j=1,2)}{\partial\tau}=0$

4. Hasil persamaan yang akan dihasilkan adalah persamaan implisit sehingga digunakan algoritma BHHH untuk menaksir parameter, dengan persamaan sebagai berikut :

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(t+1)}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}-\boldsymbol{H}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{D}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right)$$

   Langkah-langkah penaksiran parameter menggunakan algoritma BHHH sebagai berikut:

   a. Tentukan nilai taksiran awal.
   b. Tentukan vector gradien $\boldsymbol{D}\left(\hat{\theta}_{(t)}(u_i,v_i)\right)$ dengan menggunakan turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap parameter yang ingin ditaksir ke dalam persamaan berikut:

   $$\boldsymbol{D}\left(\hat{\theta}_{(t)}(u_i,v_i)\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1(u_i,v_i)} & \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2(u_i,v_i)} & \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau}\end{bmatrix}$$

   c. Tentukan matriks Hessian yaitu

   $$\boldsymbol{H}\left(\hat{\theta}_{(t)}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{D}\left(\hat{\theta}_{(t)}(u_i,v_i)\right)\boldsymbol{D}^T\left(\hat{\theta}_{(t)}(u_i,v_i)\right).$$

   d. Melakukan iterasi mulai $t=0$
   e. Iterasi akan berhenti jika nilai $\|\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(t+1)}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}\,\|\leq\varepsilon$, dengan $\varepsilon$ merupakan $10^{-4}$.

b. Mengaplikasikan model regresi GWBPIGR pada jumlah kasus kematianibu dan kematian neonatal di Sulawesi Selatan pada tahun 2021:

1. Melakukan eksplorasi pada data yang digunakan
2. Melakukan pengujian asumsi model regresi GWBPIGR yaitu:

   a. Uji korelasi variabel respon dengan statistik uji sebagai berikut:

   $$T=\frac{r_{y_1,y_2}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{y_1,y_2}^2}}$$

   b. Uji kecocokan distribusi *Bivariate Poisson* dengan statistik uji sebagai berikut:

$$I_B = \frac{n\left(\bar{Y}_2 S_{Y_1}^2 - 2m_{11}^2 + \bar{Y}_1 S_{Y_2}^2\right)}{\left(\bar{Y}_1 \bar{Y}_2 - m_{11}^2\right)}$$

c. Uji multikolinearitas dengan statistik uji sebagai berikut:

$$VIF = \frac{1}{1-R^2}$$

d. Uji overdispersi dengan statistik uji sebagai berikut:

$$\phi = \frac{D^2}{db}$$

e. Uji heterogenitas spasial

3. Melakukan penaksiran parameter model regresi GWBPIGR dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan algoritma BHHH.
4. Melakukan pengujian hipotesis parameter model regresi GWBPIGR.
5. Menginterpretasi dan menarik kesimpulan dari model regresi GWBPIGR yang telah diperoleh.
6. Melakukan pemilihan model terbaik antara model GWBPIGR dengan algoritma *Newton Raphson* dan model GWBPIGR dengan algoritma BHHH serta dibandingkan dengan BPIGR dengan algoritma BHHH.