SOLUSI MEDAN EINSTEIN MASSA BERPUTAR SIMETRI AKSIAL *SPHEROIDAL-PROLATE* DENGAN POTENSIAL ERNST

STEVAN JONATHAN V. SITUMORANG
H021201012

DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

PERNYATAAN PENGAJUAN

SOLUSI MEDAN EINSTEIN MASSA BERPUTAR SIMETRI AKSIAL *SPHEROIDAL-PROLATE* DENGAN POTENSIAL ERNST

STEVAN JONATHAN V. SITUMORANG
H021201012

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi S1 Fisika

Pada

PROGRAM STUDI S1 FISIKA
DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

SOLUSI MEDAN EINSTEIN MASSA BERPUTAR SIMETRI AKSIAL *SPHEROIDAL-PROLATE* DENGAN POTENSIAL ERNST

STEVAN JONATHAN V. SITUMORANG
H021201012

Skripsi,

telah dipertahankan didepan Panitia Ujian Sarjana S1 pada 23 Oktober 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan pada

Program Studi S1 Fisika
Departemen Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:
Pembimbing tugas akhir,

Drs. Bansawang B.J., M.Si
NIP. 196312061994121001

Mengetahui:
Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Arifin M.T
NIP. 196705201994031002

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Solusi Medan Einstein Massa Berputar Simetri Aksial *Spheroidal-Prolate* Dengan Potensial Ernst" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing (Drs. Bansawang B.J., M.Si). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keselurusan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar,6 Agustus 2024

METERAI TEMPEL

STEVAN JONATHAN V. SITUMORANG
H021201012

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur saya panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa (Ιησούς Χριστός) atas rahmat dan karunia-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Solusi Medan Einstein Massa Berputar Simetri Aksial *Spheroidal-Prolate* Dengan Potensial Ernst" ini dengan baik. Saya menyadari bahwa tugas akhir ini tidak akan terselesaikan tanpa dukungan, bantuan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, saya ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Drs. Bansawang B.J., M.Sc, selaku pembimbing utama yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan bimbingan yang baik selama proses penyusunan tugas akhir ini.

2. Prof. Dr. Tasrief Surungan, M.Sc., selaku penguji pertama yang telah memberikan saran dan kritik yang konstruktif dalam pengujian akan tugas akhir ini.

2. Prof. Dr. Nurlaela Rauf, M.Sc., selaku penguji kedua yang telah memberikan saran dan kritik yang konstruktif dalam pengujian akan tugas akhir ini.

3. Seluruh Dosen dan Staf Departemen Fisika Universitas Hasanuddin, atas ilmu dan dukungan yang telah diberikan selama masa studi saya.

4. Orang Tua dan Keluarga Tercinta, atas doa, kasih sayang, dan dukungan moral serta material yang sangat berjasa untuk sepanjang waktu.

5. Teman-teman, yang memberikan suasana hangat, penyusunan tugas akhir ini.

Saya menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saya sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk perbaikan di masa mendatang.

Hormat saya,

STEVAN JONATHAN V. SITUMORANG

ABSTRAK

Solusi Medan Einstein Massa Berputar Simetri Aksial *Spheroidal-Prolate* Dengan Potensial Ernst

Metrik Kerr merupakan satu-satunya contoh yang diketahui dari solusi eksterior eksak yang merepresentasikan medan gravitasi dari sebuah massa yang berputar. Dalam catatan ini kita akan menyajikan solusi untuk metrik yang tidak tereduksi ke metrik Schwarzschild dalam batas momentum sudut J = 0, tetapi tereduksi ke salah satu metrik Weyl yang mewakili medan massa yang berubah bentuk. Menurut perumusan Ernst, solusi *axisymmetric* stasioner dalam ruang kosong dapat diturunkan dari fungsi kompleks ξ. Solusi yang sesuai dengan metrik Weyl dengan nilai bilangan bulat dari δ akan diperoleh dalam bentuk analitik, tetapi sifat kualitatifnya tidak akan jauh berbeda dengan solusi untuk δ = 2 yang sesuai untuk solusi Massa berputar simetri aksial *spheroidal-prolate.*

Kata kunci: Medan Einstein, Potensial Ernst, Solusi simetri aksial, Metrik Lewis-Papapetrou, Massa berputar *spheroidal-prolate*

ABSTRACT

***Spheroidal-Prolate* Axial Symmetry Rotating Mass Einstein Field Solution with Ernst Potential**

*The Kerr metric is the only known example of an exact exterior solution that represents the gravitational field of a rotating mass. In this treatise, we shalt present a solution for a metric that doth not reduce to the Schwarzschild metric in the limit of vanishing angular momentum (**J = 0**), instead, it doth reduce to one of the Weyl metrics, representing a morphing mass field. According to Ernst's formulation, axisymmetric stationary solutions in empty space may be derived from the complex function **ξ**. A solution with integer values of δ shall be attained in an analytic form, albeit its qualitative nature shall not markedly differ from our solution for **δ = 2**, which suitable for the Massa* berputar *simetri aksial spheroidal-prolate Solution.*

Keywords*:* *Ernst Formulation, Axisymmetric Stationary Solutions, Weyl Metric, Exact Exterior Solutions, Massa* berputar *simetri aksial spheroidal-prolate Solution.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Albert Einstein memperkenalkan teori relativitas umum pada tahun 1915, telah diketahui tiga hukum tentang gerak, yakni hukum gerak Newton, relativitas khusus, dan hukum gravitasi Newton. Mekanika Newton adalah cara pandang yang sangat baik untuk menjelaskan bagaimana benda bergerak dengan kecepatan rendah. Namun, mekanika ini tidak dapat menjelaskan gerakan benda yang mendekati kecepatan cahaya. Einstein memperbaiki kekurangan ini dengan memperkenalkan teori relativitas khusus. Teori ini berhasil menjelaskan bagaimana benda bergerak saat mendekati kecepatan cahaya. Sementara itu, hukum gravitasi Newton berlaku ketika gaya gravitasi lemah terjadi. Einstein mencoba berulang kali untuk menciptakan teori gravitasi yang selaras dengan teori relativitas khusus, dan pada tahun 1915, ia berhasil dengan teori relativitas umum. Einstein memberikan ide yang sangat inovatif bahwa gravitasi tidak sama dengan gaya-gaya yang lain. Sebaliknya, gravitasi disebabkan oleh bagaimana ruang dan waktu menjadi melengkung karena ada massa dan energi yang tersebar di dalamnya. Dengan konsep ini, teori relativitas umum memberikan pandangan baru tentang ruang dan waktu. Ide bahwa ruang dan waktu dapat melengkung ketika terdapat materi massif di dalamnya membawa beberapa konsekuensi baru (Norton, J., 1984).

Selain itu, teori relativitas umum juga membawa ide tentang adanya gelombang gravitasi yang timbul akibat pergerakan materi massif di dalam ruang dan waktu. Salah satu hal yang sangat menarik adalah munculnya ide tentang lubang hitam, yang memiliki suatu wilayah batas disebut horison peristiwa. Di dalam horison peristiwa, semua kejadian tidak dapat teramati dari luar. Lubang hitam adalah suatu konsep matematika yang muncul dari penyelesaian persamaan gravitasi Einstein, dan memiliki sifat-sifat fisik. Mereka adalah fenomena alam yang sangat luar biasa yang telah ditemukan dalam fisika saat ini. Lubang hitam adalah seperti mesin penghasil kalor, mengikuti hukum-hukum termodinamika, dan bahkan memiliki temperatur dan entropi. Entropi adalah ukuran dari informasi yang hilang dan tingkat dari ketidakteraturan yang terkait dengan panas. Dalam ruang tertutup dan sistem yang terisolasi, entropi selalu meningkat dan tidak pernah berkurang. Pada tahun 1916, Karl Schwarzschild berhasil menyelesaikan persamaan medan Einstein dalam vakum untuk sistem koordinat bola bermuatan. Solusinya dikenal sebagai solusi Schwarzschild, yang menggambarkan jenis lubang hitam paling sederhana, yaitu lubang hitam Schwarzschild. Lubang hitam ini hanya ditentukan oleh satu parameter tunggal, yaitu massa M. Lubang hitam sebagian besar berdasarkan pada teori relativitas umum (Schwarzschild K., 1999).

Berikutnya, sekitar 48 tahun setelah Einstein, pada tahun 1963, Roy Kerr menemukan solusi asimetris untuk persamaan vakum ruang, yang kemudian menyadarkan kita bahwa rotasi lubang hitam dapat dijelaskan menggunakan metrik. Dalam kasus ini, di mana tensor metrik hanya bergantung pada dua variabel, persamaan gravitasi membentuk suatu sistem yang dapat diintegrasikan dengan menggunakan metode masalah hamburan terbalik. Studi telah dilakukan pada kasus di mana salah satu variabel adalah waktu dan variabel lainnya adalah ruang, berdasarkan pada solusi kosmologis dan gelombang dari persamaan gravitasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa menerapkan metode ini tidak menimbulkan kesulitan pada kasus di mana kedua variabel yang mendasari tensor metrik adalah ruang, sesuai dengan medan gravitasi yang stabil. Salah satu penafsiran mungkin untuk kasus ini adalah adanya medan gravitasi yang stabil dengan simetri aksial. Jenis solusi ini sangat penting dalam teori gravitasi karena memiliki arti fisik yang jelas. Dalam situasi ini, sangat menarik untuk mempertimbangkan kasus medan yang stabil dengan simetri aksial secara terpisah dan menemukan konstruksi solusi soliton yang sesuai serta makna fisiknya. Inilah tujuan dari penelitian ini. Kami juga akan menggunakan kasus ini sebagai contoh untuk melengkapi langkah-langkah yang telah dijelaskan sebelumnya untuk membangun solusi Massa berputar simetri aksial spheroidal-prolate yang tepat dan untuk membahas aspek penting yang belum sepenuhnya terpecahkan (Stephani *et al*, 2009).

Selain Einstein, para ahli dalam teori gravitasi seperti Tomimatsu dan Sato juga memberikan kontribusi besar. Salah satu hal penting yang mereka kontribusi adalah pengembangan solusi massa berputar simetri aksial *spheroidal-prolate* menggunakan persamaan Ernst. Solusi massa berputar simetri aksial *spheroidal-prolate* adalah salah satu penyelesaian eksak dari persamaan medan Einstein yang memberikan wawasan mendalam tentang struktur ruang-waktu di sekitar lubang hitam yang berputar. Dalam mengembangkan solusi ini, mereka menggunakan persamaan matematika yang modern yang dikenal sebagai persamaan Ernst. Persamaan Ernst memungkinkan untuk memodelkan ruang-waktu di sekitar objek bermassa besar seperti lubang hitam dengan tingkat ketelitian yang tinggi. Dengan menggunakan persamaan Ernst, para peneliti dapat membayangkan bagaimana rotasi lubang hitam mempengaruhi cakrawala peristiwa. Mereka juga dapat melihat bagaimana jalur dan orbit materi terpengaruh oleh keberadaan lubang hitam yang berputar. Mengintegrasikan solusi massa berputar simetri aksial *spheroidal-prolate* dengan persamaan Ernst membuka jalan untuk penelitian mendalam tentang sifat-sifat lubang hitam berotasi, memberikan wawasan yang lebih mendalam tentang bagaimana ruang dan waktu melengkung di sekitar lubang hitam. Dengan memahami solusi massa berputar simetri aksial *spheroidal-prolate* melalui penggunaan persamaan Ernst, kita bisa mendapatkan salah satu solusi dalam menganalisis lubang hitam (Voorhes, H. B., 1970).

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan metrik massa berputar simetri aksial *spheroidal-prolate* menggunakan potensial Ernst.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini menambah pengetahuan dalam bidang Teori dan Komputasi, terutama dalam analisis persamaan analitik.

BAB II
METODE PENELITIAN

2.1 Elemen Garis Dalam Koordinat Empat

Pada bab ini, konsep penting tentang bagaimana berpindah dari satu sistem koordinat ke sistem koordinat lainnya akan dipahami. Sistem ini disebut tanpa tanda dan dengan tanda. Perpindahan ini dijelaskan oleh serangkaian fungsi yang halus dan satu-satu:

$$x'^j = f^j(x^n) \tag{1}$$

Untuk mempersingkat, seringkali transformasi dan inversenya ditulis dengan cara singkat:

$$x'^j = x'^j(x^n), \quad x^k = x^k(x'^j) \tag{2}$$

Turunannya masing-masing dapat dinyatakan sebagai $\frac{\partial x'^j}{\partial x^n}, \ \frac{\partial x^j}{\partial x'^k}$.

Transformasi koordinat ini sangat penting dalam teori Relativitas Umum, yang menggambarkan interaksi fundamental antara gravitasi dan geometri ruang-waktu. Hal ini memungkinkan perpindahan dari berbagai kerangka referensi.

Dalam konteks simetri aksial stasioner, struktur tambahan yang berkaitan dengan persamaan relativitas umum yang diciptakan oleh Einstein pada tahun 1915 juga diperkenalkan. Simetri aksial stasioner ini menggambarkan skenario di mana suatu sistem fisik tetap tidak berubah di bawah translasi waktu dan rotasi sekitar suatu sumbu tertentu. Simetri ini sangat relevan dalam astrofisika, di mana sering dihadapi objek seperti lubang hitam yang berputar. Pemahaman tentang sistem semacam ini sangat bergantung pada pemahaman yang cermat tentang bagaimana koordinat dapat disesuaikan untuk menyederhanakan deskripsi matematika yang rumit.

Setiap titik di ruang empat dimensi, titik-titik yang berdekatan dihubungkan melalui elemen garis, sebagai berikut:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu \tag{3}$$

Ekspresi ini mendefinisikan apa yang disebut sebagai metrik. (Ryder, L., 2009)

2.2 Aksi Hilbert-Einstein

Aksi Hilbert-Einstein dituliskan dalam persamaan berikut:

$$S_{EH} = \int_R R\sqrt{-g}\, d^4x \tag{4}$$

Dengan skalar Ricci sebagai $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Variasi orde pertama dalam aksi Einstein-Hilbert (δS_{EH}) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int_R \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x + \int_R g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x + \int_R g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\, d^4x \\ &\equiv \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Dimana komponen-komponen $\delta S_1,\ \delta S_2,\ \delta S_3$ masing-masing adalah:

$$\delta S_1 = \int_R \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x, \delta S_2 = \int_R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x, \delta S_3 = \int_R g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g}\, d^4x$$

Selanjutnya, penting untuk disebutkan bahwa turunan parsial dan turunan kovarian bertepatan di titik P, menghasilkan:

$$\delta R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \nabla_\nu \left(\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right) - \nabla_\rho \left(\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right) \tag{6}$$

Sekarang, kita amati bahwa kuantitas di sebelah kanan adalah tensor. Oleh karena itu, persamaan (6) berlaku tidak hanya dalam koordinat geodesik di titik P, tetapi juga dalam sistem koordinat sembarang. Hal ini menyiratkan bahwa hasilnya berlaku secara universal dan dikenal sebagai persamaan Palatini. Variasinya pada tensor Ricci sesuai diperoleh dengan melakukan kontraksi pada σ dan ρ dalam persamaan (6), menghasilkan:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu \left(\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}\right) - \nabla_\sigma \left(\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right) \tag{7}$$

Akibatnya, kita dapat menyatakan istilah kedua di sebelah kanan persamaan (5) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\delta S_2 &= \int_R g^{\mu\nu} \left[\nabla_\nu \left(\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\right) - \nabla_\sigma \left(\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right)\right] \sqrt{-g}\, d^4x \\ &= \int_R \nabla_\nu \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}\right) \sqrt{-g}\, d^4x \end{aligned} \tag{8}$$

Suku pada δS_2 variasi akan hilang sebagai konsekuensi dari integral luasan Gauss sebagai berikut:

$$\int_R \left(\nabla_\mu V^\mu\right) \sqrt{|g|}\, d^4x = \int_{\partial R} \eta_\mu V^\mu \sqrt{|\gamma|}\, d^3y = 0 \tag{9}$$

Selanjutnya ditinjau variasi suku ketiga, δS_3 dalam persamaan (5), yakni pada $\delta\sqrt{-g}$ dinyatakan dalam variasi $\delta g^{\mu\nu}$ berikut:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{10}$$

Dengan memasukkan persamaan (10) pada suku ketiga δS_3, dan juga $\delta S_2 = 0$, maka akhirnya diperoleh variasi aksi Einstein-Hilbert (δS_{EH}) pada persamaan (5), yakni:

$$\delta S_{EH} = \int_R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x \tag{11}$$

Karena δS_{EH} = 0, maka: (Blau M., 2012)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{12}$$

2.3 Persamaan Medan Einstein

Dalam mekanika klasik, terdapat sebuah teori yang cukup efektif dalam menggambarkan interaksi medan gravitasi, yaitu teori gravitasi Newton. Dalam mekanika Newtonian, terbentuklah hubungan antara potensial skalar dan kerapatan massa, dinyatakan dalam bentuk persamaan Poisson yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho \tag{13}$$

Dengan G adalah tetapan gravitasi Newton (6,67 × 10⁻⁹ dalam satuan cgs) dan ρ menandakan kerapatan sumber massa. Berdasarkan kesimpulan Einstein mengenai kesetaraan massa dan energi, serta generalisasi dari rapat materi-energi dalam relativitas khusus yang diungkapkan dalam bentuk tensor, Einstein merumuskan persamaan matematis di dalam bentuk tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$. Ini mengimplikasikan generalisasi dari Persamaan (13) dalam relativitas umum, yang memasukkan tensor energi-momentum dari persamaan yang sama. Potensial gravitasi dalam Persamaan (13) harus memasukkan tensor metrik $g_{\mu\nu}$, yang memiliki sifat-sifat khusus, yaitu mencapai orde maksimal dua dalam turunannya dan berada dalam kondisi linier pada turunan orde kedua (Anugraha, R., 2004).

Selanjutnya, untuk menjelaskan bagaimana tensor energi-momentum T dengan indeks $\mu\nu$ dihitung dalam suatu aksi I yang melibatkan rapat Langrangian materi $\mathcal{L}$ yang dinyatakan oleh persamaan (22):

$$I = \int_{\Omega} \sqrt{-g}(R - 2KL_M) d^4x \tag{14}$$

Disini, L_M adalah tingkat kepadatan energi dari materi, L_Ω adalah tingkat kepadatan energi dari medan gravitasi, dan $\mathcal{R}$ adalah kelengkungan scalar Ricci yang dijelaskan sebagai $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ dengan $R_{\mu\nu}$ adalah tensor Ricci (Puri, P, S., 2013).

Kemudian, untuk mendapatkan variasi dari rapat Langrangian medan gravitasi sebagaimana dijelaskan dalam persamaan (11), variasi dari aksi dalam persamaan (14) dapat disederhanakan terhadap rapat Langrangian $\mathcal{L}_M$ dengan akar kuadrat dari determinan metrik $(-g)$ seperti berikut:

$$\delta \int_D L_M \sqrt{-g} d^4x = \int_D \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \partial g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \partial g^{\mu\nu}_{,\alpha} \right] d^4x \tag{15}$$

Sehingga, dapat diintegrasikan menjadi:

$$\delta \int_D L_M \sqrt{-g} d^4x$$

$$= \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \delta g^{\mu\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \delta g^{\mu\nu} \right) \right] \tag{16}$$

Karena perubahan medan lenyap di batas, teori integral Gauss memungkinkan kita untuk menghilangkan bagian kedua dari persamaan (15). Hal ini menghasilkan formulasi berikut:

$$\delta \int_D L_M \sqrt{-g} d^4x = \int_D \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right) \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

$$= \frac{1}{2} \int_D \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \tag{17}$$

Di mana tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$ didefinisikan sebagai:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right) \right] \tag{18}$$

Dengan demikian, variasi dari persamaan (11) dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\delta I = \int_D \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - K T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \tag{19}$$

Karena pada akar kuadrat determinan metrik, $\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}$ adalah variabel bebas dalam wilayah $\mathcal{D},$ maka variasi dari aksi $\delta I = 0$. Hal ini menghasilkan persamaan medan Einstein berikut (Bansawang, BJ., 2023):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = KT_{\mu\nu} \tag{20}$$

2.4 Elemen Garis Simetrial Aksial Stationer

Sekarang, mari kita membahas tentang jenis deskripsi matematis khusus yang disebut Metrik Aksial Simetri Statis. Untuk menemukan versi stasionernya, kita mengikuti langkah-langkah berikut. Kita memiliki sesuatu yang disebut Rotasi Stasioner Simetri Klasik yang dijelaskan oleh suatu ekspresi matematis yang disebut Kepadatan Lagrangian, dilambangkan sebagai $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ ini tidak tergantung pada waktu (t) atau sudut yang disebut koordinat azimutal dilambangkan sebagai ϕ. Ini berarti bahwa besaran yang disebut momentum sudut, dilambangkan sebagai $\mathcal{J}$, tetap tidak berubah. Ini dihitung menggunakan suatu operasi matematis yang disebut turunan parsial, dilambangkan sebagai ∂, dan ini berhubungan dengan tingkat perubahan dari ϕ, ditulis sebagai $\mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ ini tetap konstan bahkan jika kita melakukan perubahan matematis tertentu.

Hal ini menyarankan bahwa cara kita menggambarkan suatu jenis deskripsi matematis khusus yang disebut medan simetri aksial yang stationer seharusnya tidak bergantung pada koordinat waktu (t) dan sudut yang disebut ϕ. Harus ada sifat yang tetap sama bahkan ketika terjadi perubahan matematis tertentu. Jadi, ketika kita membicarakan cara mengukur sesuatu, seharusnya tidak ada istilah yang melibatkan $dx^t d\phi,\ dx^2 d\phi,\ dtdx^1\ and\ dtdx^2$. Namun, istilah seperti $dtd\phi$ mungkin dimasukkan. Ini membawa kita pada persamaan:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\phi + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}d\phi^2 \tag{21}$$

Di sini, tensor metrik tidak bergantung pada koordinat t dan ϕ, dan x^1, x^2 adalah dua koordinat yang terkait dengan ruang.

Dalam istilah yang lebih sederhana, karena adanya sifat matematis tertentu, tensor konformal Weyl selalu nol dalam dua dimensi. Sekarang, kita sedang berurusan dengan suatu permukaan yang dijelaskan oleh suatu ekspresi matematis, dan ditulis seperti ini:

$$ds_{tt}^2 = g_{tt}(dx^t)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 \tag{22}$$

Permukaan ini memiliki sifat khusus yang disebut datar konformal, yang membuat perhitungan tertentu lebih mudah. Jadi, sama seperti dalam kasus ketika hal-hal tidak bergerak, harus ada cara untuk menghubungkan aspek-aspek berbeda secara matematis. Kita memiliki ekspresi matematis yang mendefinisikan dua kuantitas baru, dilambangkan sebagai x'^1 dan x'^2, yang bergantung pada koordinat asli x^1 dan x^2. Transformasi ini diwakili oleh:

$$\begin{aligned} x'^1 &= x'^1(x^1,x^2) \\ x'^2 &= x'^2(x^1,x^2) \end{aligned} \tag{23}$$

Dengan transformasi ini, cara kita mengukur jarak (metrik) mengambil bentuk khusus:

$$ds_{tt}^2 = -e^{\mu}[(dx'^1)^2 + (dx'^2)^2] \tag{24}$$

Di sini, μ adalah suatu fungsi yang bergantung pada koordinat baru x'^1 dan x'^2. Transformasi ini tidak mengubah cara kita mengukur waktu (t) dan sudut yang disebut ϕ dari persamaan sebelumnya yaitu persamaan (15). Jadi, dengan menggunakan transformasi ini, kita selalu dapat menggambarkan pengukuran dari situasi aksisimetris yang stabil seperti ini:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\phi - e^{\mu}[(dx'^1)^2 + (dx'^2)^2] + g_{33}d\phi^2 \qquad (25)$$

Ini adalah bentuk paling umum dari metrik untuk situasi yang bersifat aksisimetris dan stabil. Ketika kita menyederhanakannya lebih lanjut, kita mendapatkan metrik statis:

$$ds^2 = a(dx^0)^2 + e^{\mu}[(dx'^1)^2 + (dx'^2)^2] + ed\phi^2 \qquad (26)$$

Dalam kasus ini, kita mengasumsikan bahwa g_{03} sama dengan nol untuk elemen garis simetrial aksial stationer. Sekarang, kita memperkenalkan metrik yang awalnya diusulkan oleh Lewis, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$ds^2 = Vdt^2 - 2Wdtd\phi - e^{\mu}(dx^t)^2 - e^{\nu}(dx^2)^2 - Xd\phi^2 \qquad (27)$$

Di sini, V, W, μ, ν, dan X adalah fungsi yang tergantung sepenuhnya pada x^t dan x^2. Bentuk Persamaan (27) setara dengan Persamaan (21) dan (26). Penting untuk dicatat bahwa kita masih dapat menerapkan kondisi $\mu = \nu$, yang sesuai dengan transformasi x^2 menjadi $x'^2(x^t, x^2)$.

Keunggulan utama dari persamaan garis (27) terletak pada kemampuannya untuk menghasilkan rangkaian persamaan diferensial orde pertama yang sederhana untuk μ. Sebaliknya, elemen garis dalam persamaan (25) hanya akan menghasilkan satu persamaan orde kedua untuk μ. Untuk garis yang dijelaskan oleh persamaan (27), kita dapat menyatakan akar kuadrat dari $(-g)$ sebagai berikut:

$$\sqrt{-g} = \rho e^{\frac{\mu+\nu}{2}} \qquad (28)$$

Di mana:

$$\rho^2 = VX + W^2 \qquad (29)$$

Tensor metrik kontra-varian diungkapkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial s^2} = \rho^{-2}\left(X\frac{\partial}{\partial t^2} - 2W\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \phi} - V\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) - e^{-\mu}\frac{\partial^2}{\partial (x^t)^2} - e^{-\nu}\frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} \qquad (30)$$

Ini memungkinkan untuk menghitung simbol Christoffel yang relevan.

Dengan memanfaatkan rumus-rumus yang disebutkan sebelumnya, kita temukan bahwa densitas Lagrangian $\mathcal{L}$ dinyatakan sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)}\left(\frac{V_{,1}\,X_{,1} + W_{,1}^2}{\rho} + 2\rho_{,1}\nu_{,1} + \frac{V_{,2}\,X_{,1} + W_{,2}^2}{\rho} + 2\rho_{,2}\mu_{,2}\right) \qquad (31)$$

Dalam persamaan yang diberikan, kita dapat menyatakan fungsi-fungsi V, X, dan W dalam istilah dua potensi baru, f dan ω, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$V = f \qquad (32)$$

$$W = \omega f \qquad (33)$$

$$X = f^{-1}\rho^2 - \omega^2 f \qquad (34)$$

Dengan demikian, dalam koordinat standar, elemen garis dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$ds^2 \ = \ f(dt - \omega d\phi)^2 - \ f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \tag{35}$$

Di mana:

$$e^{\mu} \ = \ f^{-1}e^{2\gamma} \tag{36}$$

Elemen garis yang dijelaskan dalam Persamaan (36) dikenal sebagai metrik Papapetrou.

2.5 Persamaan Ernst

Di dalam persamaan Ernst, terdapat sebuah bentuk ekspresi matematis yang dikenal sebagai densitas *Lagrange* yang terkait dengan sumbu simetri ruang waktu stationer, diekspresikan dalam koordinat silinder (ρ, z, ϕ, t). Bentuk persamaan ini diekspresikan sebagai berikut (Ernst, F. J., 1968):

$$\mathcal{L} \ = \ -\frac{1}{2}\rho f^{-2}\nabla f.\nabla f \ + \frac{1}{2}\rho^{-1}f^2\nabla\omega.\nabla\omega \tag{37}$$

Ernst menunjukkan bahwa persamaan ini juga dapat diperoleh secara langsung melalui prinsip variasional dari densitas Lagrange $\mathcal{L}$, yang terkait dengan elemen garis ds.

Dengan menggunakan persamaan Euler-Langrange berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} - \ \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu x_\mu)}\right) = \ 0 \tag{38}$$

Maka dengan fungsi f dan ω, diperoleh persamaan medan masing-masing sebagai berikut:

$$f\nabla^2 f \ = \ \nabla f.\nabla f \ + \ \rho^{-2}f^4\nabla\omega.\nabla\omega \tag{39}$$

$$\nabla.(\rho^{-2}f^2\nabla\omega) = \ 0 \tag{40}$$

Selanjutnya dari persamaan (40) maka sesuai teori vektor menyiratkan adanya vektor **A** sehingga dituliskan sebagai berikut:

$$\rho^{-2}f^2\nabla\omega \ = \ \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{41}$$

Karena $\nabla\omega$ tegak lurus terhadap arah azimut **n**, ini mengarah pada kondisi:

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})\,.\,\hat{\boldsymbol{n}} \ = \ 0 \tag{42}$$

Sekarang, curl dalam koordinat silinder dinyatakan sebagai:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \hat{\rho}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial z}\right)\right] + \hat{z}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\right] + \hat{\phi}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right] \tag{43}$$

Oleh karena itu, persamaan (42) mengarah pada:

$$\frac{\partial A_z}{\partial\rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \tag{44}$$

Ini membawa pada keberadaan fungsi $F(\rho, z, \phi)$ sehingga (secara lokal):

$$A_\rho = \frac{\partial F}{\partial\rho} \tag{45}$$

$$A_z = \frac{\partial F}{\partial z} \tag{46}$$

Akibatnya, persamaan (43) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left(\hat{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \hat{z}\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right) \tag{47}$$

Dimana:

$$\phi = \frac{\partial F}{\partial \phi} - \rho A_{\phi,} \tag{48}$$

Dan akhirnya:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \rho^{-1}\hat{n} \times \nabla\phi \tag{49}$$

Sekarang, dengan menggantikan persamaan (49) ke dalam persamaan (41), kita peroleh:

$$\nabla\omega = \rho f^{-2}\hat{n} \times \nabla\phi \tag{50}$$

Untuk mendapatkan persamaan medan untuk potensial rotasi Φ, kita ambil produk vektor dengan $\hat{\boldsymbol{n}}$ dari persamaan (50), menghasilkan:

$$\rho^{-1}f^{2}\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\omega = -\nabla\Phi \tag{51}$$

Oleh karena itu:

$$f^{-2}\nabla\Phi = -\rho^{-1}\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\omega \tag{52}$$

Selain itu, kita memiliki:

$$\nabla.(f^{-2}\nabla\Phi) = 0 \tag{53}$$

Persamaan ini memenuhi persyaratan untuk medan potensial baru. Signifikansi dari formulasi persamaan medan ini terletak pada kemampuannya untuk memperkenalkan potensial kompleks:

$$\mathcal{E} = f + i\Phi \tag{54}$$

Dengan menggunakan potensial kompleks ini, persamaan (39) dan (40) dapat dinyatakan secara ekuivalen sebagai persamaan kompleks:

$$(Re\mathcal{E})\nabla^{2}\mathcal{E} = \nabla\mathcal{E}.\nabla\mathcal{E} \tag{55}$$

Menurut definisi dari persamaan (50), ini dapat diubah menjadi:

$$2\nabla f.\nabla\Phi = f\nabla^{2}\Phi \tag{56}$$

Dengan memulai dari persamaan (54), kita temukan bahwa:

$$\nabla.(f^{-2}\nabla\Phi) = -2f^{-3}\nabla f.\nabla\Phi + f^{-2}\nabla^{2}\Phi \tag{57}$$

Dan oleh karena itu:

$$2\nabla f.\nabla\Phi = f\nabla^{2}\Phi \tag{58}$$

Sekarang, akan lebih menguntungkan bila memperkenalkan potensial kompleks baru ξ yang didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \tag{59}$$

Dengan melakukan substitusi persamaan (2,59) kedalam persamaan (55) maka diperoleh:

$$\left(\xi\bar{\xi} - 1\right)\nabla^2\xi \ = \ 2\bar{\xi}\nabla\xi . \nabla\ \xi \tag{60}$$

Dengan $\bar{\xi}$ adalah konjugat kompleks dari ξ. Persamaan (60) dikenal sebagai persamaan Ernst (Carmeli, M., 1933).

Fungsi metrik f, ω, dan γ dapat dinyatakan dalam istilah ξ menggunakan persamaan (51), (54), (39), dan (40) (Tomimatsu, A and Sato, H., 1973):

$$f \ = \ Re\frac{\xi-1}{\xi+1} \tag{61}$$

$$\nabla\omega \ = \ \frac{2\rho}{\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2} Im\left[\left(\bar{\xi}+1\right)^2 \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\xi\right] \tag{62}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \frac{\rho}{\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\rho} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial z}\right) \tag{63}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{2\rho}{\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2} Re\left(\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial z}\right) \tag{64}$$

Dalam koordinat spheroidal, persamaan (63) dan (64) menjadi:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{1-y^2}{\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2(x^2-y^2)} \otimes \tag{65}$$

$$\left[x(x^2-1)\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x} - x(1-y^2)\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y} - y(x^2-1)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right]$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y} = \frac{x^2-1}{\left(\xi\bar{\xi}-1\right)^2(x^2-y^2)} \otimes \tag{66}$$

$$\left[y(x^2-1)\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x} - y(1-y^2)\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y} - x(1-y^2)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right]$$