

**PENGGUNAAN METODE *INDIVIDUAL LEVEL*
PREMIUM DENGAN SUKU BUNGA STOKASTIK *COX*
INGERSOLL ROSS DALAM PERHITUNGAN DANA
PENSIUN PEGAWAI NEGERI SIPIL**

SKRIPSI



RAHMAT HERMAWAN

H081201027

PROGRAM STUDI ILMU AKTUARIA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2024

**PENGGUNAAN METODE INDIVIDUAL LEVEL
PREMIUM DENGAN SUKU BUNGA STOKASTIK COX
INGERSOLL ROSS DALAM PERHITUNGAN DANA
PENSIUN PEGAWAI NEGERI SIPIL**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana
Aktuaria pada Program Studi Ilmu Aktuaria Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

RAHMAT HERMAWAN

H081201027

**PROGRAM STUDI ILMU AKTUARIA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

FEBRUARI 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rahmat Hermawan

Nim : H081201027

Program Studi : Ilmu Aktuaria

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya yang berjudul

**PENGGUNAAN METODE *INDIVIDUAL LEVEL PREMIUM* DENGAN
SUKU BUNGA STOKASTIK *COX INGERSOLL ROSS* DALAM
PERHITUNGAN DANA Pensiun Pegawai Negeri Sipil**

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa tulisan skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar 13 Februari 2024

Yang Menyatakan,



Rahmat Hermawan

Nim: H081201027

**PENGUNAAN METODE *INDIVIDUAL LEVEL PREMIUM* DENGAN
SUKU BUNGA STOKASTIK *COX INGERSOLL ROSS* DALAM
PERHITUNGAN DANA PENSIUN PEGAWAI NEGERI SIPIL**

Disusun dan diajukan oleh

Rahmat Hermawan

H081201027

Menyetujui,

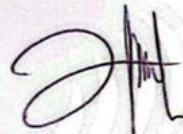
Pembimbing Utama



Mauliddin, S.Si., M.Si.

NIP. 198308052015031005

Pembimbing Pertama



Ainun Mawaddah Abdal, S.Si., M.Si

NIP. 199301152021074001



Kepala Program Studi



Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.

NIP. 196412311990032007

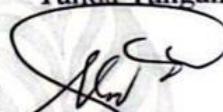
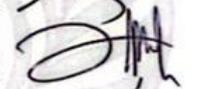
HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Rahmat Hermawan
NIM : H081201027
Program Studi : Ilmu Aktuaria
Judul Skripsi : Penggunaan Metode Individual Level Premium
dengan Suku Bunga Stokastik Cox Ingersoll Ross
dalam Perhitungan Dana Pensiun Pegawai Negeri
Sipil

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Aktuaria pada Program Studi Ilmu Aktuaria Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

		Tanda Tangan
Ketua	: Mauliddin, S.Si., M.Si	()
Sekretaris	: Ainun Mawaddah Abdal, S.Si., M.Si	()
Anggota	: Dr. Amran, M.Si	()
Anggota	: Edy Saputra Rusdi, S.Si., M.Si	()

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 13 Februari 2024

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji dan Syukur kepada Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis, memberikan kesehatan, kesempatan, kemudahan, serta melapangkan pemikiran dan hati sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Penggunaan Metode *Individual Level Premium* Dengan Suku Bunga Stokastik *Cox Ingersoll Ross* Dalam Perhitungan Dana Pensiun Pegawai Negeri Sipil”**. Shalawat beserta salam senantiasa tercurahkan kepada kekasih Allah SWT, suri tauladan dan *rahmatan lil alamin* bagi seluruh umat yakni Rasulullah SAW. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat dalam menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) Sarjana Sains di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis ingin menyampaikan terima kasih yang tak terhingga kepada Ibu **Marwah, S.Pd.i**, Bapak **Herman**, dan Adik **Rahmi Hermawan**. Dukungan luar biasa dari mereka menjadi pilar semangat dan kekuatan bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Skripsi ini merupakan bukti keberhasilan dari doa dan usaha yang telah mereka berikan.

Selain itu, penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Dengan kerendahan hati dan ketulusan, penulis ingin menyampaikan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin serta para **Staf Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
4. Bapak **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku Ketua Program Studi Ilmu Aktuaria sekaligus yang telah memberikan banyak masukan dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi

5. Bapak **Mauliddin S.Si., M.Si.** selaku pembimbing Utama penulis yang memberikan banyak sekali ilmu dan rela meluangkan waktu di tengah kesibukan untuk memberikan arahan kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
6. Ibu **Ainun Mawaddah Abdal, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Pertama penulis yang senantiasa sabar, tulus, membantu dan memberikan arahan selama proses penulisan skripsi. Beliau juga rela untuk menjadi dosen pendamping penulis dalam berbagai lomba karya tulis ilmiah.
7. Dosen Penguji Bapak **Dr. Amran S.Si, M.Si** yang telah memberikan kontribusi yang signifikan untuk penulisan skripsi ini. Beliau juga telah memberikan banyak ilmu kepada penulis sejak beliau masih menjabat sebagai Ketua Program Studi Aktuaria sampai sekarang sehingga penulis mengenal lebih dalam mengenai aktuaria.
8. Dosen penguji Bapak **Edy Saputra Rusdi, S.Si., M.Si** yang telah memberikan banyak sekali saran kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
9. **Bapak/Ibu Dosen Program Studi Ilmu Aktuaria** yang telah mendidik dan memberikan ilmunya kepada penulis selama proses perkuliahan. Permohonan maaf yang sebesar – besarnya jika penulis terdapat salah baik itu disengaja maupun tidak disengaja. Semoga bapak dan ibu sehat selalu.
10. Presiden ke 7 Republik Indonesia **Ir. H. Joko Widodo** yang telah menjadi *role model* serta meyakinkan penulis bahwa latar belakang ekonomi bukan menjadi faktor seseorang untuk menjadi pemimpin.
11. Keluarga besar **PPK ORMAWA SIPAKAMASETA** dan Masyarakat **Desa Tamannyeleng** yang telah memberikan banyak pembelajaran dan pengalaman bagi penulis.
12. Teman – teman Pengurus **BEM KM FMIPA UNHAS** Periode 2023/2024, terspesial untuk saudara saya Ketua Umum **Emha Ismauliddin**. Semoga sehat selalu dan tetap berwibawa sampai kapan pun.
13. Teman-Teman **CELL** yaitu, **Risafli, Kempa, Alfi, Arya, Sofyan, Iccang, Fauzan,** dan **Satria** yang berperan sebagai keluarga penulis selama merantau di Makassar.

14. **Eja, Mifta, dan Putri** yang telah banyak membantu urusan akademik penulis selama proses perkuliahan.
15. **Diva, Ifni, Asma, Eka, Rama,** dan, **Yefan** yang juga turut menemani dan berkontribusi dalam proses perkuliahan penulis.
16. Paman dan Bibi penulis yaitu **Hj. Heriyati S. Pd., M.Pd, Dr Herwin S.Pd.,M.Pd, Wahida, Mursalim, Ismail, Harmoko** yang telah berkontribusi secara signifikan dalam kehidupan penulis.
17. Kakek dan Nenek penulis yaitu **H. Heruddin, Hj Atima** dan **Hj Capa (Almh)** yang telah merawat penulis sejak kecil dengan tulus sehingga penulis bisa bertumbuh dan berkembang seperti sekarang.
18. Teman – teman **Horizontal 2020**, semoga tetap solid seperti jargon “Kebersamaan Tanpa Batas”.
19. Teman – teman **Excellent 2020** yang banyak membantu penulis sejak dari bangku SMA hingga sekarang.
20. Keluarga besar Sahabat Ummah yaitu **Ashari, Ocang, Arif,** dan, **Ustadz Fajri.** Yang senantiasa mengingatkan penulis dalam kebaikan.
21. Sahabat penulis **Azman, Fiqri, Fajar, Mazlan, Sainal, Asrul,** dan **Nunu** yang telah penulis anggap sebagai saudara. Sehat selalu *my brother*
22. Teman-teman **Ilmu Aktuaria 2020**, terima kasih untuk pengalaman perkuliahan yang sangat berkesan. *see you on top.*
23. **Nurhaliza Rais, you are my favorite support system**
24. Terakhir, diri saya sendiri, **Rahmat Hermawan** yang tidak pernah menyerah dalam mengerjakan skripsi ini. Semoga kelak **Rahmat Hermawan** bisa menjadi orang yang berkontribusi untuk keluarga, bangsa, negara, dan agama. *Aamiin ya rabbal alamin*

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik yang membangun. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Makassar, 14 Februari 2024

Rahmat Hermawan

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Rahmat Hermawan

NIM : H081201027

Program Studi : Ilmu Aktuaria

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

demikian demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin Hak Bebas Royalti Non eksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Penggunaan Metode *Individual Level Premium* dengan Suku Bunga Stokastik *Cox Ingersoll Ross* dalam Perhitungan Dana Pensiun Pegawai Negeri Sipil

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar Pada
Tanggal 14 Februari 2024

Yang Menyatakan



Rahmat Hermawan

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan mengoptimalkan perhitungan dana pensiun Pegawai Negeri Sipil (PNS) dengan menggunakan Metode *Individual Level Premium* dan tingkat suku bunga stokastik *Cox Ingersoll Ross* (CIR). Penelitian ini menyoroti pentingnya valuasi aktuarial untuk memastikan ketersediaan dana pensiun. Model *Cox Ingersoll Ross* terbukti mampu mengestimasi tingkat suku bunga dengan akurasi yang lebih baik daripada asumsi suku bunga konstan. Hasil penelitian menunjukkan stabilitas *Normal Cost* pada awal masa kerja dengan kenaikan signifikan menjelang akhir periode. *Actuarial Liability* juga meningkat seiring bertambahnya masa kerja. Hal ini dipengaruhi oleh faktor diskon dan probabilitas seseorang masih bekerja. Perbandingan antara suku bunga stokastik CIR dan suku bunga konstan menunjukkan perbedaan signifikan, dimana *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* dengan suku bunga stokastik CIR cenderung lebih besar. Temuan ini menyoroti sensitifitas suku bunga dalam perhitungan dana pensiun. Penelitian ini diharapkan memberikan panduan bagi pengelola dana pensiun dan pembuat kebijakan untuk meningkatkan strategi pengelolaan dana pensiun PNS, memperbaiki ketepatan perhitungan manfaat pensiun, dan mengelola risiko keuangan secara lebih efektif.

Kata Kunci: Aktuarial, *Cox Ingersoll Ross*, Dana Pensiun, Stokastik, Suku Bunga



Judul : Penggunaan Metode *Individual Level Premium* dengan Suku Bunga Stokastik *Cox Ingersoll Ross* dalam Perhitungan Dana Pensiun Pegawai Negeri Sipil

Nama : Rahmat Hermawan

NIM : H081201027

Program Studi : Ilmu Aktuarial

ABSTRACT

This research aims to optimize the calculation of retirement funds for Civil Servants (PNS) using the Individual Level Premium Method and the stochastic interest rate Cox Ingersoll Ross (CIR) model. The study emphasizes the importance of actuarial valuation to ensure the availability of pension funds. The Cox Ingersoll Ross model has proven to estimate interest rates more accurately than constant interest rate assumptions. The research results indicate the stability of Normal Cost at the beginning of the working period with a significant increase towards the end of the period. Actuarial Liability also increases with the length of service, influenced by discount factors and the probability of an individual remaining employed. The comparison between stochastic CIR interest rates and constant interest rates shows a significant difference, where Normal Cost and Actuarial Liability with stochastic CIR interest rates tend to be larger. These findings highlight the sensitivity of interest rates in retirement fund calculations. This research is expected to provide guidance for pension fund managers and policymakers to enhance PNS pension fund management strategies, improve the accuracy of pension benefit calculations, and manage financial risks more effectively.

Keywords: *Actuarial, Cox Ingersoll Ross, Pension Fund, Stochastic, Interest Rate*



Title : *Implementation of the Individual Level Premium Method with Cox Ingersoll Ross Stochastic Interest Rates in Calculating Civil Servant Pension Funds*

Name : *Rahmat Hermawan*

Student ID : *H081201027*

Study Program : *Actuarial Science*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR.....	v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI.....	ix
ABSTRAK.....	x
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xvi
DAFTAR TABEL.....	xvii
DAFTAR NOTASI.....	xviii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xxi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah.....	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	6
2.1 Aktuarial.....	6
2.2 Dana Pensiun.....	6
2.2.1 Jenis Program Dana Pensiun.....	6

2.2.2 Jenis Manfaat Pensiun	7
2.3 Persamaan Diferensial Stokastik.....	8
2.4 Integral Ito.....	9
2.5 Model <i>Cox Ingersoll Ross</i>	9
2.6 Estimasi Paramater menggunakan <i>Ordinary Least Square</i>	10
2.7 Skema Numerik <i>Milstein</i>	11
2.8 <i>Mean Absolute Percentage Error (MAPE)</i>	12
2.9 Tabel Mortalitas.....	12
2.10 Simbol Komutasi.....	13
2.11 Anuitas Hidup.....	13
2.12 Asumsi Aktuaria	14
2.13 Fungsi Dasar Aktuaria.....	15
2.13.1 Fungsi Kelangsungan Hidup.....	15
2.13.2 Fungsi Tingkat Suku Bunga.....	15
2.13.3 Fungsi Gaji.....	15
2.13.4 Fungsi Manfaat	16
2.14 <i>Normal Cost</i>	17
2.15 <i>Actuarial Liability</i>	17
2.15.1 <i>Present Value of Future Benefit</i>	17
2.15.2 <i>Present Value of Future Normal Cost</i>	18
2.16 Pendekatan Aktuaria.....	18
2.17 <i>Individual Level Premium</i>	19
2.18 Uji <i>Signed Rank Wilcoxon</i>	19
BAB III METODE PENELITIAN.....	21
3.1 Pendekatan dan Jenis Penelitian.....	21
3.2 Waktu dan Tempat Penelitian.....	21

3.3 Objek Penelitian	21
3.4 Jenis dan Sumber Data	21
3.5 Metode Pengumpulan Data	22
3.6 Metode Analisis Data	22
3.7 Alur Penelitian.....	23
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	24
4.1 Deskripsi Penelitian	24
4.2 Estimasi Parameter Model <i>Cox Ingersoll Ross</i>	25
4.3 Simulasi Pergerakan Tingkat Suku Bunga Model <i>Cox Ingersoll Ross</i>	25
4.4 Perhitungan Akumulasi Gaji	28
4.4.1 Perhitungan Akumulasi Gaji Pegawai A.....	28
4.4.2 Perhitungan Akumulasi Gaji Pegawai B.....	30
4.5 Perhitungan Proporsi Gaji untuk Manfaat Pensiun.....	31
4.5.1 Perhitungan Proporsi Gaji Pegawai A	31
4.5.2 Perhitungan Proporsi Gaji Pegawai B	33
4.6 Menghitung Anuitas	34
4.6.1 Perhitungan Anuitas Pegawai A.....	34
4.6.2 Perhitungan Anuitas Pegawai B.....	36
4.7 Menghitung PVFB	38
4.7.1 Menghitung PVFB untuk Pegawai A.....	38
4.7.2 Menghitung PVFB untuk Pegawai B.....	40
4.8 Menghitung <i>Normal Cost</i>	42
4.8.1 Menghitung <i>Normal Cost</i> Pegawai A	42
4.8.2 Menghitung <i>Normal Cost</i> Pegawai B	45
4.9 Menghitung <i>Actuarial Liability</i>	47
4.9.1 Menghitung <i>Actuarial Liability</i> Pegawai A.....	47

4.9.2 Menghitung <i>Actuarial Liability</i> untuk Pegawai B.....	50
4.10 Perbandingan hasil perhitungan <i>Normal Cost</i> dan <i>Actuarial Liability</i> menggunakan tingkat suku bunga <i>Cox Ingersoll Ross</i> (CIR) dan tingkat suku bunga konstan.	52
BAB V PENUTUP.....	57
5.1 Kesimpulan	57
5.2 Saran.....	57
DAFTAR PUSTAKA	59
LAMPIRAN	62

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Alur Penelitian.....	23
Gambar 4.1 Plot <i>BI Rates</i>	24
Gambar 4.2 Simulasi Pergerakan Tingkat Suku Bunga Model Cox Ingersoll Ross	26
Gambar 4.3 Plot PVFB Pegawai A	40
Gambar 4.4 Plot PVFB Pegawai B	41
Gambar 4.5 Plot <i>Normal Cost</i> Pegawai A.....	44
Gambar 4.6 Plot <i>Normal Cost</i> Pegawai B.....	47
Gambar 4.7 Plot <i>Actuarial Liability</i> Pegawai A	49
Gambar 4.8 Plot <i>Actuarial Liability</i> Pegawai B	51
Gambar 4.9 Plot Perbandingan Perhitungan <i>Normal Cost</i> Menggunakan Suku Bunga Stokastik CIR dan Suku Bunga Konstan 10%.....	54
Gambar 4.10 Plot Perbandingan Perhitungan <i>Actuarial Liability</i> Menggunakan Suku Bunga Stokastik CIR dan Suku Bunga Konstan 10%	55

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Skala akurasi peramalan.....	12
Tabel 4.1 Hasil Estimasi Parameter	25
Tabel 4.2 MAPE Peramalan Suku Bunga	27
Tabel 4.3 Perhitungan Gaji Pegawai A	29
Tabel 4.4 Perhitungan Gaji Pegawai B	30
Tabel 4.5 Perhitungan Proporsi Gaji Pegawai A untuk Manfaat Pensiun	32
Tabel 4.6 Perhitungan Proporsi Gaji Pegawai B untuk Manfaat Pensiun	33
Tabel 4.7 Perhitungan Anuitas Pegawai A	34
Tabel 4.8 Perhitungan Anuitas Pegawai B	36
Tabel 4.9 Perhitungan PVFB untuk Pegawai A	39
Tabel 4.10 Perhitungan PVFB Pegawai B	41
Tabel 4.11 Perhitungan <i>Normal Cost</i> Pegawai A.....	43
Tabel 4.12 Perhitungan <i>Normal Cost</i> Pegawai B.....	46
Tabel 4.13 Perhitungan <i>Actuarial Liability</i> Pegawai A.....	48
Tabel 4.14 Perhitungan <i>Actuarial Liability</i> Pegawai B.....	50
Tabel 4.15 Perbandingan Perhitungan Menggunakan Suku Bunga Stokastik CIR dan Suku Bunga Konstan 10%.....	53
Tabel 4.16 Hasil Uji Statistik Perbandingan <i>Normal Cost</i>	55
Tabel 4.17 Hasil Uji Statistik Perbandingan <i>Actuarial Liability</i>	56

DAFTAR NOTASI

Notasi	Nama
l_x	Jumlah orang yang berusia x tahun
d_x	Jumlah orang yang meninggal antara usia x hingga x-1 tahun
${}_n P_x$	Probabilitas orang berusia x akan hidup paling sedikit n tahun
D_x	Hasil perkalian v^x dengan l_x
v^x	<i>Present Value</i> dari satu satuan uang dalam waktu x tahun
N_x	Akumulasi nilai D_{x+t} dengan $t=0$ hingga $t = r-x$
I	Tingkat kenaikan gaji
$r(t)$	Tingkat suku bunga pada waktu t
x	Usia peserta program pensiun saat valuasi
y	Usia saat peserta masuk program pendanaan pensiun
S_{xa}	Akumulasi gaji pertahun mulai dari usia y hingga x untuk pegawai A
S_{xb}	Akumulasi gaji pertahun mulai dari usia y hingga x untuk pegawai B
s_x	Gaji perbulan seorang saat berusia x
$(SS)_x$	Skala gaji pada usia x
$(SS)_y$	Skala gaji pada usia y
B_{xa}	Total besar manfaat pensiun saat bekerja berusia x tahun untuk Pegawai A

B_{xb}	Total besar manfaat pensiun saat bekerja berusia x tahun untuk Pegawai B
\ddot{a}_x	Nilai tunai anuitas awal seumur hidup untuk seseorang berusia x
a_x	Nilai tunai anuitas akhir seumur hidup untuk seseorang berusia x
B_r	Manfaat pensiun yang terhimpun mulai dari usia masuk y sampai usia pensiun r
k	Proporsi gaji yang disiapkan untuk pensiun
r	Usia pensiun
${}^r(PVFB)_x$	Nilai sekarang manfaat pensiun dari x pada usia pensiun r
$\ddot{a}_x^{(12)}$	Anuitas awal yang dibayarkan 12 kali dalam satu tahun.
v^{r-x}	Tingkat diskonto selama berusia x hingga usia pensiun r
${}_{r-x}P_x^{(T)}$	Probabilitas seseorang berusia x akan tetap bekerja hingga usia pensiun r
${}^r(PVFNC)_x$	Nilai sekarang <i>Normal Cost</i> dengan usia perhitungan x tahun
${}^r(NC)_t$	Iuran pensiun untuk peserta berusia t tahun
${}^r(AL)_x$	Nilai <i>Actuarial Liability</i> yang dihitung atas manfaat yang dibayarkan pada pensiun r
α	Laju tingkat suku bunga menuju titik keseimbangan

μ	Rata – rata jangka panjang tingkat suku bunga
σ	Volatilitas suku bunga
$W(t)$	Proses Wiener
L	Banyaknya diskritisasi

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Tabel Mortalitas 62

Lampiran 2. Perhitungan Pendanaan Pensiun Pegawai A..... 63

Lampiran 3. Perhitungan Pendanaan Pensiun Pegawai B..... 64

Lampiran 4. Suku Bunga CIR dan Faktor Diskon CIR 65

Lampiran 5. Kodingan Python 67

Lampiran 6 Tabel Gaji Pegawai Sesuai Peraturan Presiden Republik Indonesia
 Nomor 16 Tahun 2019 Tentang Penyesuaian Gaji Pokok Pegawai Negeri Sipil
 Menurut Peraturan Pemerintah Nomor 30 Tahun 2015 ke Dalam Gaji Pokok
 Pegawai Negeri Sipil Menurut Peraturan Pemerintah Nomor 15 Tahun 2015 72

Lampiran 7 *Service Table*..... 72

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan dunia pada era globalisasi berbanding lurus dengan pesatnya perkembangan perekonomian, sehingga menuntut setiap individu untuk mencari pekerjaan dalam rangka memenuhi kebutuhan hidup dan meningkatkan kesejahteraan. Namun, tidak bisa dipungkiri bahwa manusia mempunyai batas produktivitas sehingga ada masanya manusia harus berhenti bekerja dan menikmati masa tuanya. Salah satu cara agar penghasilan tetap berkesinambungan hingga hari tua adalah dengan mengikuti program pendanaan pensiun. Dana pensiun merupakan sejumlah uang yang diberikan kepada seseorang yang sudah pensiun, baik karena usia tua atau karena tidak lagi mampu bekerja (Norman, 2021).

Standar Praktik Aktuaria Dana Pensiun (SPA-DP) No. 1.02 menyebutkan bahwa tujuan program pendanaan pensiun adalah memastikan ketersediaan dana yang memadai guna memenuhi kewajiban dana pensiun, terutama bagi peserta dan pihak yang berhak atas manfaat pensiun dan manfaat lain tepat pada waktunya melalui pengumpulan dana secara sistematis (PAI, 2019). Dana yang dikumpulkan dalam pendanaan pensiun disebut dengan *Normal Cost*. Definisi *Normal Cost* ialah sejumlah uang yang dibayarkan oleh peserta dalam 1 tahun guna memenuhi nilai sekarang dari manfaat pensiun (Rivanda, 2019). Manfaat pensiun akan dibayarkan ketika peserta mencapai usia pensiun sesuai dengan ketentuan yang tercantum dalam peraturan dana pensiun. Perusahaan penyelenggara pendanaan pensiun perlu melakukan valuasi aktuaria untuk mengestimasi jumlah dana yang dibutuhkan untuk kewajiban pembayaran manfaat pensiun peserta hingga meninggal dunia.

Salah satu pendanaan pensiun yang penting untuk dilakukan valuasi adalah pendanaan pensiun untuk Pegawai Negeri Sipil (PNS). Hasil valuasi aktuaria pemerintah atau badan yang mengelola dana pensiun dapat memastikan kelangsungan program pensiun dan kemampuannya untuk membayar manfaat pensiun kepada para PNS pada saat memasuki usia pensiun. Selain itu, valuasi aktuaria membantu menghindari defisit keuangan serta memungkinkan pengambilan keputusan kebijakan keuangan yang tepat. Pendanaan pensiun untuk

PNS diatur dalam Peraturan Pemerintah Nomor 11 Tahun 2017. Peraturan tersebut menetapkan batas usia pensiun PNS secara umum antara 58 tahun hingga 65 tahun. Berdasarkan penetapan Peraturan Pemerintah Nomor 25 tahun 1981 yang telah diubah dengan Peraturan Pemerintah Nomor 20 Tahun 2013 serta surat Menteri Keuangan Nomor: S-244/MK.011/1985 menyatakan bahwa pengelolaan dana pensiun untuk PNS dikelola oleh PT TASPEN (Persero).

Perhitungan pendanaan pensiun PNS menggunakan metode *Individual Level Premium* dan *Attained Age Normal* pernah dilakukan oleh Divani (2022) dengan kesimpulan *Normal Cost* yang dihitung menggunakan metode *Individual Level Premium* mengalami kenaikan disetiap tahunnya, sedangkan *Normal Cost* yang dihitung menggunakan *Attained Age Normal* bernilai konstan setiap tahun. *Actuarial Liability* yang diperoleh menggunakan metode *Attained Age Normal* lebih besar daripada menggunakan *Individual Level premium*. Arfa (2017) juga melakukan perhitungan *Normal Cost* menggunakan metode *Individual Level Premium* dengan hasil perhitungan yang menyatakan bahwa *Normal Cost* cenderung sama setiap tahunnya. Perbandingan metode *Individual Level Premium* dan *Projected Credit Unit* juga pernah dilakukan oleh Wardhani dkk (2014) dengan kesimpulan metode *Individual Level Premium* lebih dianjurkan untuk peserta dana pensiun.

Penelitian sebelumnya masih menggunakan tingkat suku bunga konstan sepanjang waktu, sementara pada kenyataannya tingkat suku bunga di Indonesia cenderung berubah – ubah. Hal ini yang mendasari diperlukannya tingkat bunga stokastik untuk mengestimasi tingkat suku bunga dengan mempertimbangkan fluktuabilitas tingkat suku bunga. Salah satu model suku bunga Stokastik yang efektif digunakan adalah model *Cox Ingersoll Ross (CIR)*. Model CIR adalah model stokastik tingkat suku bunga yang mencerminkan perilaku tingkat suku bunga serta mengikuti prinsip *mean reversion*. *Mean reversion* adalah ketika tingkat suku bunga berfluktuasi dalam rentang tertentu dan cenderung kembali ke nilai rata-rata (Nastiti, 2015). Pemilihan Model CIR didasarkan pada kesamaannya dengan perilaku tingkat suku bunga di pasar, serta jaminan bahwa prediksi tingkat suku bunga akan tetap positif.

Berdasarkan uraian yang dijelaskan sebelumnya, dalam tugas akhir ini peneliti tertarik untuk menerapkan tingkat suku bunga stokastik model *Cox Ingersoll Ross* dalam perhitungan *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* menggunakan metode *Individual Level Premium*, lalu membandingkan hasilnya dengan asumsi suku bunga konstan. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi berharga kepada pengelola dana pensiun dan pengambil keputusan untuk mengoptimalkan strategi pengelolaan dana pensiun serta meningkatkan ketepatan perhitungan manfaat pensiun untuk PNS.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian permasalahan di atas, maka rumusan masalah yang akan disusun pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana akurasi model *Cox Ingersoll Ross* (CIR) dalam menaksir tingkat suku bunga?
2. Bagaimana hasil perhitungan besaran *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* menggunakan metode *Individual Level Premium* pendanaan pensiun Pegawai Negeri Sipil (PNS) dengan tingkat suku bunga stokastik *Cox Ingersoll Ross* (CIR)?
3. Bagaimana perbandingan antara hasil perhitungan *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* menggunakan tingkat suku bunga *Cox Ingersoll Ross* (CIR) dan tingkat suku bunga konstan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mendapatkan akurasi model bunga stokastik *Cox Ingersoll Ross* (CIR) dalam menaksir tingkat suku bunga.
2. Untuk mendapatkan hasil analisis dan besaran *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* menggunakan metode *Individual Level Premium* pendanaan pensiun Pegawai Negeri Sipil (PNS) dengan tingkat suku bunga stokastik *Cox Ingersoll Ross* (CIR).
3. Untuk mengetahui perbandingan antara hasil perhitungan *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* menggunakan tingkat suku bunga *Cox Ingersoll Ross* (CIR) dan tingkat suku bunga konstan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan mengenai penerapan model tingkat suku bunga stokastik yaitu *Cox Ingersoll Ross* (CIR) untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga dalam menentukan *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* pendanaan pensiun.
2. Menjadi pertimbangan bagi lembaga pengelola dana pensiun dalam menetapkan iuran peserta pensiun, dengan memperhatikan fluktuasi tingkat suku bunga yang bergerak secara stokastik.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Valuasi aktuarial yang dilakukan hanya untuk pensiun normal.
2. Menggunakan anuitas awal.
3. Usia pensiun normal PNS adalah 58 sesuai dengan Peraturan Pemerintah Nomor 11 Tahun 2017.
4. Presentase gaji yang disisihkan untuk manfaat pensiun yaitu sebesar 4,75% dari gaji pokok.
5. Data suku bunga bulanan BI tahun 2005 hingga 2023
6. Menggunakan Tabel Mortalita Indonesia IV tahun 2019.
7. Tingkat kenaikan gaji dipengaruhi oleh masa kerja.
8. Menggunakan skema numerik *Milstein* dalam mengaproksimasi solusi persamaan diferensial stokastik.
9. Menggunakan metode *Ordinary Least Square* dalam mengestimasi parameter model *Cox Ingersoll Ross*.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam laporan ini dijelaskan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab pendahuluan berisi penjelasan mengenai latar belakang pemilihan judul, perumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian serta batasan dari penelitian ini.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab tinjauan pustaka berisi penjelasan mengenai landasan teori yang mendasari penelitian, tinjauan umum mengenai variabel dalam penelitian.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab metode penelitian berisi penjelasan mengenai pendekatan dan jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, objek penelitian, jenis dan sumber data, metode pengumpulan data dan alur kerja.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab hasil dan pembahasan berisi penjelasan setelah dilakukan penelitian. Hal tersebut mencakup gambaran umum objek penelitian, hasil analisis data dan hasil analisis perhitungan statistik serta pembahasan.

BAB V PENUTUP

Bab penutup berisi penjelasan mengenai kesimpulan dari hasil yang diperoleh setelah dilakukan penelitian. Selain itu, disajikan pula keterbatasan serta saran yang dapat menjadi pertimbangan bagi penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Aktuaria

Aktuaria merupakan sebuah disiplin ilmu yang menggabungkan konsep matematika dan statistika untuk memperkirakan dan mengelola risiko keuangan di masa depan. Biasanya, bidang aktuaria ini digunakan oleh perusahaan asuransi, dana pensiun, dan departemen sumber daya manusia untuk menghitung estimasi biaya yang dijanjikan kepada karyawan atau peserta program. Dalam melakukan perhitungan aktuaria, terdapat berbagai asumsi yang digunakan, seperti jumlah peserta yang akan dihitung, peningkatan gaji, tingkat kematian atau mortalitas, harapan hidup, suku bunga, serta faktor-faktor lain yang relevan (Divani, 2022).

2.2 Dana Pensiun

Dana Pensiun adalah badan hukum yang bertanggung jawab dalam pengelolaan dan pelaksanaan program pensiun yang memberikan jaminan manfaat pensiun kepada pesertanya. Tujuan utama dari Dana Pensiun adalah untuk memberikan perlindungan sosial dan keuangan kepada pekerja atau karyawan setelah mereka memasuki masa pensiun. Dasar hukum yang mengatur mengenai Dana Pensiun di Indonesia adalah Undang-Undang Nomor 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun. Undang-Undang ini menjadi landasan hukum bagi pendirian, pengelolaan, dan operasional Dana Pensiun di negara ini. Tujuan dari Undang-Undang ini adalah untuk memastikan bahwa dana pensiun dijalankan secara profesional, transparan, dan sesuai dengan prinsip-prinsip yang menguntungkan peserta program pensiun (utama, 2022).

2.2.1 Jenis Program Dana Pensiun

Berdasarkan Undang-undang nomor 11 tahun 1992 tentang dana pensiun menjelaskan bahwa terdapat 2 jenis pendanaan pensiun yang berlaku di Indonesia yaitu sebagai berikut:

1. Program Dana Pensiun Manfaat Pasti (*Defined Benefit*): Program ini menjanjikan manfaat pensiun tetap kepada peserta berdasarkan faktor-faktor seperti lamanya masa kerja dan gaji rata-rata peserta. Besaran

manfaat pensiun ditentukan oleh formula yang dijelaskan dalam peraturan dana pensiun. Pada program ini, risiko investasi dan kinerja dana pensiun ditanggung oleh badan pensiun.

2. Program Dana Pensiun Iuran Pasti (*Defined Contribution*): Program ini melibatkan kontribusi reguler dari peserta dan/atau pendiri dana pensiun. Kontribusi ini biasanya berupa persentase tertentu dari gaji peserta dan ditambah dengan kontribusi dari pendiri (jika ada). Dana pensiun yang terkumpul kemudian diinvestasikan dan manfaat pensiun yang diterima oleh peserta di masa depan bergantung pada kinerja investasi dan akumulasi dana pensiun.

2.2.2 Jenis Manfaat Pensiun

Dana pensiun dapat memberikan berbagai jenis manfaat pensiun kepada peserta sesuai dengan ketentuan yang ditetapkan. Berikut adalah penjelasan lebih rinci mengenai empat jenis manfaat dana pensiun yang umumnya ada (Rivanda, 2019).

1. Manfaat Pensiun Normal: Manfaat pensiun normal adalah manfaat yang diberikan kepada peserta setelah mencapai usia pensiun yang ditentukan dan memenuhi syarat-syarat tertentu, seperti lamanya masa kerja. Pada titik ini, peserta berhak menerima manfaat pensiun yang telah dijanjikan sebelumnya. Manfaat pensiun normal biasanya merupakan manfaat pensiun penuh yang dihitung berdasarkan formula atau rumus yang telah ditentukan sebelumnya, yang melibatkan faktor-faktor seperti lamanya masa kerja dan gaji rata-rata peserta.
2. Manfaat Pensiun Dipercepat: Manfaat pensiun dipercepat adalah manfaat yang diberikan kepada peserta yang memilih untuk pensiun sebelum mencapai usia pensiun normal yang ditetapkan. Dalam hal ini, peserta menerima manfaat pensiun lebih awal dari yang seharusnya. Namun, manfaat pensiun dipercepat ini biasanya akan mengalami penyesuaian atau pemotongan tertentu, karena peserta akan menerima manfaat untuk jangka waktu yang lebih lama dibandingkan jika mereka pensiun pada usia pensiun normal.

3. Manfaat Pensiun Ditunda: Manfaat pensiun ditunda adalah manfaat yang diberikan kepada peserta yang memilih untuk menunda pensiun melebihi usia pensiun normal yang ditetapkan. Dalam hal ini, peserta memilih untuk melanjutkan bekerja setelah mencapai usia pensiun normal dan menunda menerima manfaat pensiun mereka. Keuntungan dari memilih manfaat pensiun ditunda adalah peserta akan menerima manfaat yang lebih besar setelah mencapai usia pensiun yang ditunda. Biasanya, manfaat pensiun ditunda akan mengalami peningkatan seiring dengan lamanya penundaan pensiun.
4. Manfaat Pensiun Cacat: Manfaat pensiun cacat adalah tunjangan yang diberikan ketika peserta pensiun mengalami cacat yang menghambat kemampuannya untuk bekerja.

2.3 Persamaan Diferensial Stokastik

Proses stokastik adalah himpunan variabel acak $\{X(t), t \in T\}$ di mana t mewakili waktu dan $X(t)$ merupakan nilai proses pada waktu t (Taylor & Karlin, 1998).

Definisi 1: Proses Stokastik $\{W(t), t \geq 0\}$ dengan $W(t)$ sebagai variabel acak disebut sebagai gerak Brown dengan *drift* μ apabila (Medikasari, 2020):

1. $W(0) = 0$
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ kenaikan stasioner dan kenaikan *independent*
3. $W(t)$ berdistribusi normal dengan μt dengan variansi t .

Misalkan $\{r(t), t \geq 0\}$ adalah suatu proses stokastik dan $\{W(t), t \geq 0\}$ adalah proses Wiener, maka:

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW(t) \quad (2.1)$$

Adalah persamaan diferensial stokastik dengan $\mu(r(t), t)$ disebut suku *drift* dan $\sigma(r(t), t)$ disebut suku difusi (Brigo & Mercurio, 2006).

Persamaan diferensial stokastik (2.1) dapat dituliskan sebagai berikut

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \mu(r(s), s)ds + \int_0^t \sigma(r(s), s)dW(s) \quad (2.2)$$

Dengan nilai awal $r(0)$ dan $W(t)$ adalah proses Wiener (Nastiti, 2015).

2.4 Integral Ito

Integral Ito digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial stokastik sehingga didapatkan ekspektasi dan variansi tingkat suku bunga model *Cox Ingersoll Ross*.

Definisi:

Integral Ito $\int_0^T r(t)dW(t)$ dari proses sederhana didefinisikan sebagai berikut (Nastiti, 2015):

$$\int_0^T r(t)dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \quad (2.3)$$

Berikut sifat – sifat dari Integral Ito untuk proses sederhana (Nastiti, 2015):

1. Linear. Jika $r(t)$ dan $Y(t)$ merupakan proses sederhana dan a, b adalah konstanta maka

$$\int_0^T (ar(t) + bY(t))dW(t) = a \int_0^T r(t)dW(t) + b \int_0^T Y(t)dW(t) \quad (2.4)$$

2. Ekspektasi dari integral stokastik Ito adalah nol, yaitu:

$$E \left[\left(\int_0^T r(t)dW(t) \right) \right] = 0 \quad (2.5)$$

3. Integral stokastik Ito memenuhi sifat isometris, yaitu:

$$E \left[\left(\int_0^T r(t)dW(t) \right)^2 \right] = \int_0^T E[r^2(t)] dt \quad (2.6)$$

untuk $t \in [0, T]$

2.5 Model Cox Ingersoll Ross

Model *Cox Ingersoll Ross* (CIR) adalah salah satu jenis model yang menggambarkan bagaimana tingkat suku bunga berperilaku. Model ini memiliki karakteristik *mean reversion*, yang berarti cenderung kembali ke tingkat rata-rata, dan juga memastikan bahwa prediksi tingkat suku bunga tidak akan mencapai angka negatif. Model ini ditemukan pada tahun 1985 oleh John C.Cox, Jonathan E.Ingersoll, Jr., dan Stephen A.Ross. Bentuk dari Model CIR adalah sebagai berikut (Nastiti, 2015):

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t) \quad (2.7)$$

Persamaan diferensial (2.7) dapat diselesaikan dengan operasi penyelesaian persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan sebagai berikut:

Misalkan,

$$y(t) = r(t)e^{\alpha t} \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) kemudian diturunkan terhadap t

$$dy(t) = e^{\alpha t} dr(t) + \alpha e^{\alpha t} r(t) dt \quad (2.9)$$

Substitusikan persamaan (2.7) ke dalam persamaan (2.9)

$$\begin{aligned} dy(t) &= e^{\alpha t} \left(\alpha(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t) \right) + \alpha e^{\alpha t} r(t) dt, \\ dy(t) &= \alpha\mu e^{\alpha t} dt + \sigma\sqrt{r(t)} e^{\alpha t} dW(t), \\ \int_0^t dy(t) &= \int_0^t \alpha\mu e^{\alpha s} ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r(t)} e^{\alpha s} dW(s), \\ y(t) - y(0) &= (\mu e^{\alpha t} - \mu) + \int_0^t \sigma\sqrt{r(t)} e^{\alpha s} dW(s) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Berdasarkan persamaan (2.8) dan $y(0) = r(0)$ maka persamaan (2.10) menjadi:

$$\begin{aligned} r(t)e^{\alpha t} - r(0) &= \mu(e^{\alpha t} - 1) + \sigma\sqrt{r(t)} \int_0^t e^{\alpha s} dW(s), \\ r(t)e^{\alpha t} &= r(0) + \mu(e^{\alpha t} - 1) + \sigma\sqrt{r(t)} \int_0^t e^{\alpha s} dW(s), \\ r(t) &= e^{-\alpha t} [r(0) + \mu(e^{\alpha t} - 1) + \sigma\sqrt{r(t)} \int_0^t e^{\alpha s} dW(s)], \\ r(t) &= r(0)e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma\sqrt{r(t)} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW(s) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.11) maka diperoleh ekspektasi dan variansi sebagai berikut (Medikasari,2020):

$$E(r(t)) = r(0)e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) \quad (2.12)$$

$$Var(r(t)) = r(0) \frac{\sigma^2}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) + \mu \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha t})^2 \quad (2.13)$$

2.6 Estimasi Paramater menggunakan *Ordinary Least Square*

Ordinary Least Square (OLS) adalah metode estimasi dalam ilmu statistika yang bertujuan untuk meminimalkan jumlahan kuadrat *error*. Parameter α , μ , dan σ akan diestimasi menggunakan metode OLS sebagai berikut:

Diskritisasi persamaan (2.7) diperoleh persamaan sebagai berikut (Bua,2022):

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \alpha(\mu - r_{(t)})\Delta t + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t \quad (2.14)$$

Dengan $\varepsilon_t \sim N(0, \Delta t)$

Untuk menerapkan metode OLS, maka persamaan (2.14) diubah menjadi:

$$\frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{\alpha\mu\Delta t}{\sqrt{r_t}} - \alpha\sqrt{r_t}\Delta t + \sigma\varepsilon_t \quad (2.15)$$

Selanjutnya persamaan (2.15) disederhanakan menjadi:

$$\sigma\varepsilon_t = \frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{\sqrt{r_t}} - \frac{\alpha\mu\Delta t}{\sqrt{r_t}} + \alpha\sqrt{r_t}\Delta t \quad (2.16)$$

Selanjutnya dilakukan operasi untuk meminimalkan persamaan (2.16), diperoleh:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\mu}) = \arg \min \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{\sqrt{r_t}} - \frac{\alpha\mu\Delta t}{\sqrt{r_t}} + \alpha\sqrt{r_t}\Delta t \right)^2 \quad (2.17)$$

Dengan penyelesaian persamaan (2.17) maka diperoleh:

$$\hat{\alpha} = \frac{N^2 - 2N + 1 - R_2 R_3 - R_1 R_3 - (N-1)R_4}{(N^2 - 2N + 1 - R_2 R_3)\Delta t} \quad (2.18)$$

dan

$$\hat{\mu} = \frac{(N-1)R_2 - R_4 R_1}{N^2 - 2N + 1 + R_2 R_3 - R_1 R_3 - (N-1)R_4} \quad (2.19)$$

Dengan $R_1 = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i}$, $R_2 = \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}}$, $R_3 = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}}$, $R_4 = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}}$

Estimasi parameter difusi $\hat{\sigma}$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\hat{\mu}}{\sqrt{r_{t_i}}} + \hat{\mu}\sqrt{r_{t_i}} \right)^2} \quad (2.20)$$

2.7 Skema Numerik *Milstein*

Metode *Milstein* adalah salah satu metode numerik yang digunakan dalam komputasi matematika untuk mengevaluasi solusi persamaan diferensial stokastik.

Misalkan terdapat persamaan diferensial stokastik sebagai berikut:

$$dr(t) = f(r(t))dt + g(r(t))dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.21)$$

Maka mempunyai formula *Milstein* sebagai berikut (Higham, 2001):

$$\begin{aligned} r_t &= r_{t-1} + \Delta t f(r_{t-1}) + g(r_{t-1})(W(\tau_t) - W(\tau_{t-1})) \\ &\quad + \frac{1}{2} g(r_{t-1})g'(r_{t-1}) \left((W(\tau_t) - W(\tau_{t-1}))^2 - \Delta t \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dimana $t = 1, 2, \dots, L$. $\Delta t = \frac{T}{L}$. Untuk $\tau_t = t \Delta t$ dan $W(\tau_t) - W(\tau_{t-1}) = dW_t$ dengan $dW_t = \sqrt{\Delta t} N(0,1)$.

Simulasi ini didasarkan pada pendekatan diskritisasi dari proses *Wiener*, yang melibatkan pembentukan serangkaian variabel acak yang mengikuti distribusi

normal. Variabel acak ini mewakili perkiraan proses *Wiener* ($W(t)$) pada titik waktu t yang terdiskritisasi.

2.8 Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) adalah metrik standar yang umum digunakan untuk mengevaluasi tingkat kesesuaian metode peramalan. MAPE digunakan untuk mengukur sejauh mana (dalam persentase) hasil peramalan berbeda dari data sebenarnya. Semakin kecil nilai MAPE yang dihasilkan oleh sebuah metode, semakin baik kualitas metode tersebut. Rumus MAPE didefinisikan sebagai berikut (Lawrence dkk., 2009):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|r_t - \check{r}_t|}{r_t} \quad (2.23)$$

Keterangan :

r_t : nilai aktual pada periode waktu t

\check{r}_t : nilai ramalan untuk periode waktu t

n : banyak periode

Skala akurasi peramalan adalah sebagai berikut (Lawrence dkk., 2009):

Tabel 2.1 Skala akurasi peramalan

MAPE	Tingkat akurasi peramalan
$\leq 10\%$	Akurasi Peramalan sangat baik
11% – 20%	Akurasi Peramalan baik
21% – 50%	Akurasi Peramalan kurang baik
51% – lebih	Akurasi Peramalan buruk

2.9 Tabel Mortalitas

Tabel mortalitas adalah tabel statistik yang digunakan untuk menggambarkan tingkat mortalitas atau tingkat kematian dalam populasi pada berbagai usia. Tabel ini menyajikan informasi tentang harapan hidup dan probabilitas kematian pada usia tertentu. Biasanya, tabel mortalitas dikembangkan berdasarkan data statistik yang dikumpulkan dari populasi yang luas selama periode waktu tertentu.

Pada tabel mortalitas jumlah orang yang berusia x dinyatakan sebagai l_x sementara banyaknya orang yang meninggal antara usia x sampai dengan usia $x + 1$ dinyatakan sebagai berikut (Futami, 1993):

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (2.24)$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} \quad (2.25)$$

Probabilitas orang yang berusia x tahun akan bertahan hidup paling sedikit n tahun atau bertahan sampai umur $x + n$ tahun dinyatakan sebagai berikut (Futami, 1993):

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (2.26)$$

$${}_n P_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (2.27)$$

2.10 Simbol Komutasi

Simbol komutasi diformulasikan sebagai berikut (Futami, 1993):

$$D_x = v^x l_x \quad (2.28)$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{r-x} D_{x+t} \quad (2.29)$$

2.11 Anuitas Hidup

Anuitas hidup adalah pembayaran berkala yang dilakukan kepada seseorang selama hidupnya. Jenis anuitas hidup dibedakan menjadi dua yaitu anuitas hidup kontinu dan anuitas hidup diskrit. Anuitas hidup diskrit adalah pembayaran yang diterima atau diberikan oleh peserta program pensiun dalam interval waktu tertentu. Anuitas hidup diskrit dibedakan menjadi dua berdasarkan sistem pembayarannya, yaitu anuitas awal (*annuity due*) dan anuitas akhir (*annuity immediate*). *Annuity due* adalah pembayaran yang dimulai di awal periode, sedangkan *annuity immediate* adalah pembayaran anuitas yang dilakukan pada akhir periode.

Fokus penelitian ini hanya akan membahas mengenai anuitas diskrit yang dibayarkan diawal (*annuity due*). Berdasarkan periode waktunya *annuity due* diskrit dibagi menjadi dua yaitu:

1. Anuitas seumur hidup diskrit diawal

Anuitas seumur hidup dimuka adalah pembayaran yang diberikan setiap awal periode kepada peserta program pensiun, dan pembayaran tersebut akan berlanjut hingga peserta meninggal dunia. Berikut persamaan anuitas seumur hidup diskrit diawal (Nastiti, 2015).

$$\ddot{a}_r = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_tP_x \quad (2.30)$$

2. Anuitas hidup diskrit diawal berjangka n tahun

Anuitas hidup diskrit dimuka berjangka n tahun adalah serangkaian pembayaran yang diberikan setiap awal periode kepada peserta program pensiun selama n tahun atau hingga peserta meninggal dunia, tergantung pada kondisi yang tercapai lebih dulu (Nastiti, 2015).

$$\ddot{a}_r = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_{r-x}P_x \quad (2.31)$$

Rumus anuitas yang dibayarkan 12 kali dalam setahun adalah sebagai berikut (Divani, 2022):

$$\ddot{a}_r^{(12)} = \ddot{a}_r - \frac{11}{24} \quad (2.32)$$

2.12 Asumsi Aktuaria

Asumsi aktuarial adalah serangkaian perkiraan yang digunakan untuk menghitung manfaat pensiun yang terkait dengan perubahan di masa depan yang dapat mempengaruhi pendanaan program pensiun (Rivanda, 2019). Asumsi aktuarial meliputi beberapa faktor penting, antara lain asumsi tingkat bunga yang akan mempengaruhi tingkat pengembalian investasi, asumsi penyusutan yang menentukan laju pengurangan nilai aset pensiun dari tahun ke tahun, dan asumsi kenaikan tingkat gaji yang akan mempengaruhi tingkat kontribusi yang dibutuhkan untuk membiayai manfaat pensiun yang semakin meningkat. Dengan menggunakan asumsi-asumsi ini, para aktuaris dapat memproyeksikan kebutuhan dana masa depan untuk memastikan kecukupan dan keberlanjutan program pensiun.

2.13 Fungsi Dasar Aktuaria

2.13.1 Fungsi Kelangsungan Hidup

Fungsi kelangsungan hidup adalah fungsi yang menggambarkan probabilitas peserta tetap hidup hingga mencapai waktu pensiun yang ditentukan. Terdapat beberapa faktor yang dapat mempengaruhi seseorang tetap bekerja hingga usia pensiun. Secara umum, ada empat penyebab utama terjadinya pensiun, yaitu pengunduran diri dari pekerjaan (*termination*), cacat yang mengakibatkan ketidakmampuan untuk bekerja (*disability*), kematian (*mortality*), dan mencapai usia pensiun yang telah ditentukan (*retirement*) (Divani, 2022). Adapun peluang hidup dinyatakan sebagai berikut:

$${}_n P_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (2.33)$$

2.13.2 Fungsi Tingkat Suku Bunga

Fungsi tingkat suku bunga adalah fungsi yang digunakan untuk menghitung nilai sekarang dari suatu pembayaran di masa depan dengan melakukan diskonto. Diskonto adalah proses mengurangi nilai pembayaran di masa depan menjadi nilai saat ini dengan mempertimbangkan tingkat suku bunga yang berlaku. Adapun rumus tingkat suku bunga adalah sebagai berikut (Winklevoss, 1993):

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} \quad (2.34)$$

Fungsi tingkat suku bunga yang bergerak mengikuti model stokastik menggunakan persamaan sebagai berikut (Nastiti, 2015):

$$v^n = \prod_{t=1}^n \frac{1}{(1+i_t)} \quad (2.35)$$

2.13.3 Fungsi Gaji

Gaji adalah kompensasi yang diberikan oleh pemberi kerja kepada karyawan sesuai dengan ketentuan yang telah disepakati dalam kontrak kerja. Gaji saat ini untuk seorang peserta yang berusia x tahun dinyatakan sebagai s_x . Sedangkan S_x merupakan total gaji yang diterima dari usia masuk y hingga usia $x - 1$, dengan asumsi $x > y$ (Winklevoss, 1993).

$$S_x = \sum_{t=y}^{x-1} s_x \quad (2.36)$$

$$s_x = s_y \frac{(SS)_x}{(SS)_y} [(1 + I)]^{(x-y)} \quad (2.37)$$

2.13.4 Fungsi Manfaat

Fungsi manfaat adalah fungsi yang digunakan untuk menghitung jumlah manfaat yang akan dibayarkan pada saat pensiun, pemutusan hubungan kerja, cacat, dan kematian. Manfaat yang didapatkan oleh peserta merupakan proporsi gaji sebesar k yang diakumulasikan selama masa kerja. Ada tiga jenis formula manfaat yang digunakan dalam perhitungan pendanaan pensiun antara lain (Winklevoss, 1993):

1. Gaji terakhir

$$B_x = k(r - y)b_x \quad (2.38)$$

2. Rata – rata gaji selama bekerja

$$B_r = kS_r \quad (2.39)$$

$$b_r = ks_x$$

3. Rata – rata gaji selama n tahun

$$B_r = k(r - y) \frac{1}{n} \sum_{t=r-n}^{r-1} s_t \quad (2.40)$$

2.14 Normal Cost

Normal Cost merupakan iuran tahunan yang dibayarkan oleh peserta pensiun dari usia awal masuk program hingga memasuki usia pensiun. *Normal Cost* digunakan untuk membayar *Present Value of Future Benefit* (PVFB). Adapun persamaan *Normal Cost* adalah sebagai berikut (Winklevoss, 1993):

$${}^r(NC)_x = b_x \ddot{a}_r^{(12)} v^{r-x} {}_{r-x}P_x^{(T)}, y \leq x < r \quad (2.41)$$

2.15 Actuarial Liability

Actuarial Liability dalam suatu program pensiun pada usia x adalah jumlah dana pensiun yang harus terkumpul pada saat itu untuk memastikan pembayaran manfaat pensiun di masa depan. Besar *Actuarial Liability* dipengaruhi oleh nilai *Present Value of Future Benefit* (nilai saat ini dari manfaat pensiun yang akan diterima di masa depan) dan *Present Value of Future Normal Cost* (nilai saat ini dari biaya normal yang harus dikeluarkan untuk program pensiun di masa depan) (Sagala, 2018).

Besarnya *Actuarial Liability* dirumuskan sebagai berikut (Winklevoss, 1993):

$${}^r(AL)_x = {}^r(PVFB)_x - {}^r(PVFNC)_x \quad (2.42)$$

2.15.1 Present Value of Future Benefit

Present Value of Future Benefit (nilai sekarang manfaat pensiun yang akan datang) adalah konsep dalam aktuarial yang mengacu pada nilai saat ini dari manfaat pensiun yang diharapkan diterima oleh peserta program pensiun di masa depan. Hal ini melibatkan penghitungan nilai kini dari aliran kas yang diantisipasi, yang mencakup pembayaran pensiun reguler, manfaat pensiun tambahan, tunjangan kesehatan, atau manfaat lainnya yang dijanjikan oleh program pensiun.

Nilai *Present Value of Future Benefit* dirumuskan sebagai berikut (Winklevoss, 1993):

$${}^r(PVFB)_x = B_r \ddot{a}_r^{(12)} v^{r-x} {}_{r-x}P_x^{(T)} \quad (2.43)$$

2.15.2 Present Value of Future Normal Cost

Present Value of Future Normal Cost secara umum, dapat diartikan sebagai nilai saat ini dari biaya normal yang diperkirakan akan terjadi di masa depan. Konsep nilai saat ini digunakan untuk menghitung besarnya dana yang harus dikeluarkan sekarang untuk membiayai biaya normal atau rutin di masa depan.

Nilai *Present Value of Future Normal Cost* diumuskan sebagai berikut (Winklevoss, 1993):

$${}^r(PVFNC)_x = \sum_{t=x}^{r-1} (NC)_{t-x} P_x^{(T)} v^{t-x} \quad (2.44)$$

2.16 Pendekatan Aktuaria

Pendekatan aktuaria merupakan pendekatan yang digunakan dalam menghitung pendanaan suatu program pensiun. Metode ini bertujuan untuk memastikan bahwa jumlah dana yang terkumpul dalam program pensiun mencukupi untuk membayar manfaat pensiun kepada peserta saat mereka memasuki masa pensiun (Divani, 2022). Dalam metode perhitungan aktuaria, aktuaris menggunakan berbagai asumsi dan data statistik yang relevan, seperti harapan hidup peserta, tingkat pengembalian investasi, tingkat inflasi, dan faktor-faktor lainnya. Mereka menggunakan informasi ini untuk memperkirakan jumlah dana yang diperlukan untuk membayar manfaat pensiun yang dijanjikan kepada peserta. Metode perhitungan aktuaria juga melibatkan penggunaan konsep seperti nilai sekarang (*present value*) dan anuitas untuk menghitung besarnya kontribusi atau premi yang harus dibayarkan oleh perusahaan atau peserta pensiun. Tujuan utama dari metode perhitungan aktuaria adalah untuk memastikan bahwa program pensiun memiliki pendanaan yang cukup dan berkelanjutan dalam jangka panjang. Dengan menggunakan metode perhitungan aktuaria yang tepat, perusahaan atau lembaga dapat menentukan kontribusi yang tepat, mengelola risiko keuangan, dan memastikan bahwa manfaat pensiun yang dijanjikan dapat terpenuhi secara finansial saat peserta memasuki masa pensiun.

2.17 Individual Level Premium

Metode *individual level premium* adalah pendekatan dalam perhitungan aktuarial di mana nilai sekarang dari total manfaat pensiun dialokasikan secara merata ke setiap tahun masa kerja, mulai dari tanggal perhitungan aktuarial hingga mencapai usia pensiun normal (Divani, 2022).

Persamaan *normal cost* menggunakan metode *individual level premium* adalah sebagai berikut (Divani, 2022):

$${}^{ILP} r(NC)_x = B_x \ddot{a}_r^{(12)} \left(\frac{D_r^T}{N_x^T - N_r^T} \right) \quad (2.45)$$

Adapun untuk menghitung *Actuarial Liability* menggunakan metode *individual level premium* yaitu dengan persamaan (Divani, 2022):

$$\begin{aligned} {}^{ILP} r(AL)_x &= {}^r(PVFB)_x - {}^r(PVFNC)_x \\ {}^{ILP} r(AL)_x &= B_r \ddot{a}_r^{(12)} v^{r-x} {}_{r-x}P_x^{(T)} - {}^{ILP} r(NC)_x {}_{r-x}P_x^{(T)} v^{r-x} \\ {}^{ILP} r(AL)_x &= {}^r(PVFB)_x - {}^{ILP} r(NC)_x {}_{r-x}P_x^{(T)} v^{r-x} \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.18 Uji Signed Rank Wilcoxon

Uji *Signed Rank Wilcoxon* adalah salah satu jenis uji non-parametrik yang digunakan untuk membandingkan dua sampel berpasangan. Uji ini digunakan untuk melihat perbandingan suatu variabel dari dua data sampel berpasangan. Pada penelitian ini uji *signed rank wilcoxon* digunakan untuk melihat apakah terdapat perbedaan yang signifikan antara hasil perhitungan valuasi aktuarial menggunakan bunga CIR dan bunga konstan. Perumusan hipotesis dalam uji *signed rank wilcoxon* adalah sebagai berikut (Solidayah dkk., 2015):

- H_0 = Tidak ada perbedaan yang signifikan hasil perhitungan *normal cost* dan *Actuarial Liability* dengan menggunakan bunga CIR dan bunga konstan.
- H_1 = Terdapat perbedaan yang signifikan hasil perhitungan *normal cost* dan *Actuarial Liability* dengan menggunakan bunga CIR dan bungan konstan.

Statistik uji yang digunakan dalam uji *signed rank wilcoxon* adalah sebagai berikut (Solidayah dkk., 2015):

$$Z = \frac{T - E(T)}{\sqrt{\sigma}} \quad (2.47)$$

dengan

$$E(T) = \frac{n(n+1)}{4} \quad (2.48)$$

$$\sigma = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \quad (2.49)$$