PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF GIR

EXCLUSIVE SUM LABELING ON GEAR GRAPHS

CHRISARIA PALUNGAN
H022211007

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF GIR

EXCLUSIVE SUM LABELING ON GEAR GRAPHS

Tesis

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

CHRISARIA PALUNGAN
H022211007

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

TESIS

PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF GIR

CHRISARIA PALUNGAN
H022211007

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 27 Januari 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

Pembimbing Pendamping,

Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1 013

Ketua Program Studi
Magister Matematika,

Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS HASANUDDIN

Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.
NIP. 19720515 199702 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Pelabelan Jumlah Eksklusif Pada Graf Gir" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Muhammad Zakir, M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari ini tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal IJISRT : International Journal of Innovative Science and Research Technology sebagai artikel dengan judul "Exclusive Sum Labeling on Gear Graphs".

Dengan ini saya limpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 27 Januari 2023

METERAI TEMPEL
B64FDAJX577810853

Chrisaria Palungan
NIM. H022211007

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada Allah Yang Maha Esa atas segala nikmat hidup, kesehatan, rejeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul "Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Gir".

Penulisan tesis ini bertujuan untuk memenuhi syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar. Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing utama dan **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, selaku pembimbing pendamping untuk segala waktu, ilmu, serta kesabaran dalam membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan dan koreksi kepada penulis dalam pengerjaan tesis ini.
2. **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.**, **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.**, dan **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.**, selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. Para **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Seluruh staf Departemen Matematika Univeritas Hasanuddin atas segala bantuan dalam pengurusan administrasi akademik selama ini.
5. Kedua Orang tua tercinta Ayahanda **Prof. Dr. Ir. Musa B. Palungan, M.T** dan Ibunda **Adriana T. Paembonan, S.E** atas segala kasih sayang, doa, dan dukungan kepada penulis, serta kepada saudara terkasih **Edenia Palungan, S.E** dan **Elsavira Palungan** yang senantiasa menemani.
6. Seluruh teman-teman Program Studi Magister Matematika yang telah berjuang bersama-sama selama ini.
7. Teruntuk semua pihak yang belum sempat penulis tuliskan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuannya selama ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan-kekurangan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima guna perbaikan kedepannya.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak.

Makassar, 27 Januari 2023

Penulis

ABSTRAK

Graf dengan pemetaan injektif dari titik G ke bilangan bulat positif S sehingga dua titik dari G yang bertetangga jika dijumlah label dapat menjadi elemen dari S. jumlah titik terisolasi untuk pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir. Data tersebut akan dikategorikan dalam pelabelan jumlah pada graf gir oleh Leonhard Euler. Sistematika pembuktian teorema tersebut akan dipaparkan pada langkah-langkah berikut ini: Mendefinisikan label untuk setiap titik dalam graf dengan jumlah label yang bertetangga adalah label dari titik-titik yang terisolasi. Membuktikan titik terisolasi telah diperoleh optimal. Penelitian ini dilakukan untuk menemukan pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir dengan menghasilkan pelabelan jumlah eksklusif yang optimal. Dalam penjumlahan eksklusif bilangan bulat dari S yang merupakan jumlah dari dua bilangan bulat lain dari S dapat memberi label pada himpunan titik terisolasi yang terkait dengan graf G. Artikel ini dapat menunjukkan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir.

Kata Kunci : Graf Gir, Pelabelan Jumlah, Pelabelan Jumlah Eksklusif

ABSTRACT

A graph with an injective mapping from vertex G to positive integers S such that two vertexes of G adjacent if and only if sum of labels can be an element of S. The aim of this research is to constructing exclusive sum labeling on gear graphs and obtaining isolated vertex sums for exclusive sum labeling on gear graphs. The data will be categorized in exclusive sum labeling on gear graph by Leonhard Euler. There are systematics in proving the theorem will be presented in the following steps: Defining labels for each vertex in a graph with adjacent sum of label is the label of isolated vertex. Proving the isolated vertex has obtained an optimal. This research conducted to find the exclusive sum labeling on gear graph by producing the optimal in exclusive sum labeling. In an exclusive addition of the integers of S which is the sum of two other integers of S can be labeling a set of isolated vertex which related to G graph. This article can show the construction of exclusive sum labeling on gear graphs.

Keywords: Gear Graph, Sum Labeling, Exclusive Sum Labeling

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR SIMBOL

Lambang / Simbol	Penjelasan
$V(G)$	Himpunan Titik pada V
$E(G)$	Himpunan Sisi pada E
K_n	Graf Lengkap
P_n	Graf Lintasan
C_n	Graf Siklus
L_n	Graf Tangga
Gr_n	Graf Gir
$\bar{G}$	Komplemen Graf G
$\sigma(G)$	Bilangan Jumlah
$\varepsilon(G)$	Bilangan Jumlah Eksklusif
$(P_3 \times P_3)$	Hasil kali Graf (P_3) dan Graf (P_3)
$\Delta(G)$	Derajat Maksimum dari suatu graf G
$\delta(G)$	Derajat Minimum dari suatu graf G
$q(G)$	Banyaknya Sisi pada Graf G
$p(G)$	Banyaknya Titik pada Graf G

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Leonhard Euler merupakan matematikawan berkebangsaan Swiss yang pertama kali memperkenalkan teori graf dalam karya tulisnya berjudul "*Solution Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis"* pada tahun 1736. Ide Euler muncul saat melihat kota Konigsberg yang terpisah oleh aliran sungai dan dihubungkan dengan tujuh jembatan. Euler mengungkapkan dalam melakukan perjalanan dan kembali pada tempat semula dengan syarat melalui setiap jembatan tepat sekali, tidak dapat dilakukan. Dalam pembuktiannya Euler menggambar jembatan Konigsberg dalam bentuk diagram dengan jembatan sebagai sisi dan daratan sebagai titik. Ide Euler bersifat graf teoritis sehingga karya Euler disebut sebagai karya pertama mengenai teori graf. Teori graph sudah banyak berkembang dan memiliki segi terapan di banyak bidang ilmu, misalnya di bidang Fisika, Kimia, Ilmu Komunikasi, Rekayasa listrik, Genetika, dan lain-lain (Hasmawati, 2020).

Teori Graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit dengan mempresentasikan persoalan dalam bentuk graf, sehingga dapat dijelaskan menjadi lebih sederhana. Graf merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga, yang elemen-elemennya disebut titik $(vertex)$, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan dari elemen-elemen $V(G)$ disebut sisi $(edge)$ (Hasmawati, 2020).

Beberapa jenis graf memiliki ciri khusus. Beberapa contoh diantaranya adalah graf lengkap (K_n), graf lintasan (P_n) dan graf siklus (C_n). Graf khusus yang setiap dua titiknya bertetangga sehingga setiap titik pada graf memiliki derajat yang sama di sebut graf lengkap (Hamawati, 2020). Penelitian mengenai teori graf terus berkambang. Salah satunya pembahasan mengenai pelabelan pada graf. Pelabelan pada suatu graf dapat diartikan sebagai penempatan bilangan bulat pada elemen-elemen dari suatu graf, seperti titik, sisi, atau keduanya sesuai dengan ketentuan. Ketentuan biasanya digambarkan pada dasar pembobotan oleh beberapa fungsi evaluasi. Jika domain pelabelan hanya himpunan titik pada graf G di sebut pelabelan titik. Jika pelabelan hanya pemetaan dari bujur pada graf G ke bilangan bulat positif, maka disebut pelabelan sisi dan bila pelabelan merupakan pemetaan dari himpunan sisi dan himpunan titik sekaligus ke himpunan bilangan bulat positif maka disebut pelabelan total (Baĉa dan Miller, 2009).

Pelabelan diklasifikasikan dalam beberapa jenis, diantaranya pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan graceful, pelabelan jumlah, dan pelabelan jumlah eksklusif (Gallian, 2010).

Pada tahun 1990 Harary memperkenalkan mengenai konsep pelabelan graf jumlah. Perluasan dari konsep graf jumlah semakin berkembang dan pada tahun 2005 Miller, dkk memperkenalkan pelabelan jumlah eksklusif. Pelabelan jumlah L dari graf G disebut eksklusif jika terdapat titik bekerja pada graf G. Pada jenis pelabelan ini bilangan jumlah disebut bilangan eksklusif (Sanjaya, 2011).

Dalam penjumlah graf G, terdapat titik w yang disebut titik bekerja jika dan hanya jika terdapat label dari titik u dan titik v di G sedemikian sehingga $u + v = w$. Suatu graf yang memiliki pelabelan jumlah dinamakan graf jumlah. Suatu graf jumlah titik terisolasi yang paling sedikit dinamakan graf jumlah optimal (Gallian., 2021)

Pelabelan jumlah eksklusif. Pelabelan jumlah dari graf $G \cup \overline{K_r}$ untuk r bilangan bulat positif dikatakan eksklusif terhadap G jika semua titik bekerjanya berada pada $\overline{K_r}$. Setiap graf dapat dilakukan menjadi graf jumlah eksklusif dengan menambahkan beberapa titik terisolasi (Tuga, dkk., 2005).

Banyak minimal dari titik-titik terisolasi yang perlu ditambahkan agar didapatkan graf jumlah disebut bilangan jumlah dinotasikan $\sigma(G)$ dan banyak minimal sisi yang ditambahkan agar pelabelan jumlah f disebut pelabelan jumlah eksklusif disebut bilangan jumlah eksklusif dengan notasi $\varepsilon(G)$ (Miller, dkk., 2005).

Penelitian bermula dari penemuan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif untuk beberapa jenis graf, seperti yang didaftarkan dalam survey

Miller, dkk. (2005) diantaranya jenis graf lintasan, graf siklus, graf roda, graf kipas, graf lengkap, graf caterpillar, graf pohon, graf friendship (persahabatan), dan graf cocktail party. Selain itu, penelitian yang dilakukan Haitang Wang dan Ping Li (2010) menemukan bilangan jumlah eksklusif pada graf matahari.

Dalam daftar survey J.Ryan (2009) terkait Pelabelan Jumlah Eksklusif dari Graf Bipartit Lengkap. Dalam penelitian yang dilakukan Sanjaya (2011) menemukan Pelabelan Jumlah Eksklusif Pada Graf Tangga L_n. Selain dari itu terdapat hasil survey dari Gallian (2021) pada graf bintang, graf bintang ganda, graf pesta, graf ulat dan hasil kali graf kartesius $\varepsilon(P_3 \times P_3)$ dan $\varepsilon(P_n \times P_2)$.

Dari kajian pelabelan jumlah eksklusif yang telah dilakukan oleh peneliti pendahulu, terkait pelabelan jumlah eksklusif pada graf lingkaran dan graf roda sehingga timbul motivasi untuk menemukan konstruksi pelabelan khususnya pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir yang merupakan salah satu graf yang terbentuk dengan menghubungkan titik sentral menuju titik siklus yang berorde $2\text{n} + 1$. Dalam kehidupan nyata konsep graf gir dimodelkan untuk pola penentuan channel stasiun radio.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka permasalahan dalam penelitian ini adalah Bagaimana cara mengkonstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir (Gr_n).

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan permasalahan di atas, tujuan penelitian ini adalah untuk

1) Mengkonstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir
2) Memperoleh jumlah titik terisolasi untuk pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu dalam bidang teori graf, sehingga kedepannya dapat digunakan sebagai rujukan para peneliti lain mengkonstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir
2. Menambah pengetahuan pelabelan jumlah eksklusif pada suatu graf.
3. Memberikan motivasi dan referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait dengan pelabelan jumlah eksklusif pada graf

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang digunakan guna menunjang proses pengerjaan penelitian. Tinjauan pustaka berisi penjelasan mengenai graf, jenis-jenis graf, pelabelan jumlah, dan pelabelan jumlah eksklusif

2.1 Definisi Graf

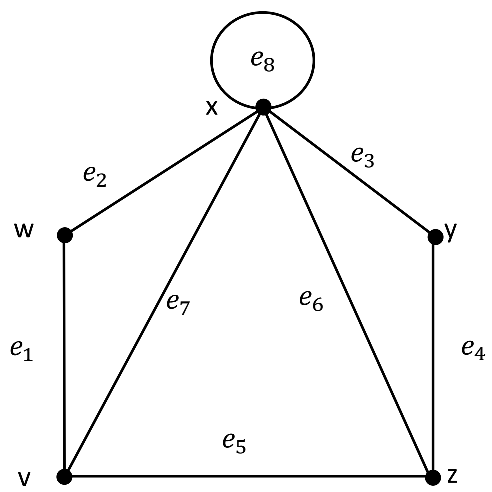
Leonhard Euler merupakan matematikawan berkebangsaan Swiss yang pertama kali memperkenalkan teori graf pada tahun 1736. Hasmawati (2020) menjelaskan struktur pada graf sangat beragam beberapa graf memiliki ciri tersendiri sehingga dapat dikelani dan ada yang tidak memiliki ciri khusus.

Definisi 2.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan* (V, E) *dengan* V *adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan* E *adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota* V *yang disebut sisi.*

Jika terdapat suatu graf (V, E) dilambangkan dengan G, sehingga $G = (V, E)$. Berdasarkan definisi dapat dituliskan bahwa anggota himpunan titik pada V adalah $V = V(G)$ dan untuk anggota himpunan sisi pada E adalah $E = E(G)$, maka $G = (V, E)$ dapat juga dituliskan $G = \big(V(G), E(G)\big)$. Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde *(order)* dengan simbol p atau $p(G)$, sedangkan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran *(size)* dengan simbol q atau $q(G)$. Kardinalitas pada suatu himpunan merupakan banyaknya anggota dari himpunan tersebut yang biasanya disimbolkan "| |", maka banyaknya titik pada graf dituliskan $p(G) = |V(G)|$ dan ukuran pada graf dituliskan $q(G) = |E(G)|$. Suatu graf dikatakan graf trivial jika $q(G) = 0$.

Pada gambar sebuah graf terdapat titik yang sebut titik dan yang menghubungkan dua buah titik disebut sisi. Titik pada graf biasanya disimbolkan dengan u, v, w, x dan sisi pada graf biasanya disimbolkan dengan e atau uv. Jika terdapat pasangan $e = uv \in E(G)$, sisi $e = uv$ adalah pasangan takterurut dari $V(G)$ yang berarti bahwa $uv = vu, u = v$ atau $uv \neq vu$. apabila $u = v$ yakni adanya sisi uu atau vv, maka sisi tersebut disebut lup (loop). Sedangkan apabila sisi $uv \neq vu$ bisa terjadi jika $e_1 = uv, e_2 = uv$, namun $e_1 \neq e_2$ sehingga sisi untuk e_1 dan e_2 disebut dengan sisi-sisi yang paralel. Graf palsu (pseudograph) merupakan graf yang memperbolehkan adanya sisi paralel dan lup (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.



Gambar 2.1 Graf G_1

Pada Gambar 2.1, Graf G_1 mempunyai anggota himpuanan sisi yaitu $E\,(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ dengan orde $p(G) = 5$ dan anggota himpunan titik yaitu $V(G_1) = \{u, v, w, x, z\}$ dengan ukurannya $q(G) = 8$. Berdasarkan gambar graf G_1 dapat dilihat bahwa e_8 disebut dengan lup.

Definisi 2.1.2 *Graf sederhana G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-*

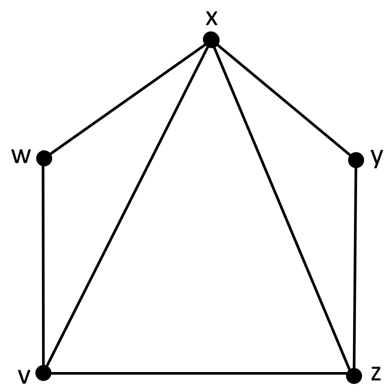
pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (edge)

Definisi 2.1.3 *Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i, v_j$, maka dikatakan bahwa :*

- *Titik v_j bertetangga (adjacent) dengan titik v_j.*
- *Sisi x terkait (incident) dengan titik $v_i$dan titik v_j.*

Definisi 2.1.4 *Derajat minimum dari suatu graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{d(v): v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max\{d(v): v \in V(G)\}$. Suatu graf disebut reguler jika $\delta(G) = \Delta(G)$.*

Contoh 2.



Gambar 2.2 Graf G_2

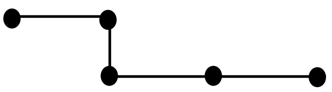
Bersasarkan Gambar 2.2, terlihat bahwa w bertengga dengan v dan x, namun tidak bertetangga dengan y. Kemudian, sisi yz hanya terkait dengan titik y dan z. Dapat dilihat juga, bahwa derajat dari masing-masing titik graf G_2 adalah sebagai berikut, $deg(w) = deg(y) = 2$ dan $deg\ (v) = deg(z) = 3$, sedangkan $deg(x) = 4$. Diperoleh $\Delta(G_2) = 4$ dan $\delta(G_2) = 2$, karena $\Delta(G_2) \neq \delta(G_2)$, maka G_2 bukan merupakan graf regular. Lintasan pada Gambar 2.2 adalah $P \coloneqq v, w, x, y, z$.

2.2 Jenis-Jenis Graf

Setiap graf memiliki ciri khusus sehingga graf dikelompokan dalam beberapa jenis berdasarkan ciri khususnya. Pada subbab ini akan dipapakan beberapa jenis graf berdasarkan penelitian terdahulu dan graf yang akan digunakan pada penelitian ini (Hasmawati, 2020), antara lain

Definisi 2.2.1 *Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$. Graf yang hanya terdiri dari suatu lintasan disebut graf lintasan dan dinotasikan P_n apabila berorde n.*

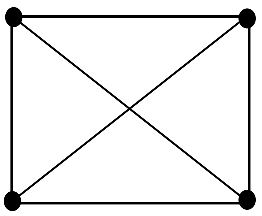
Contoh 3.



Gambar 2. 3 Graf Lintasan P_5

Definisi 2.2.2 *Graf Lengkap K_n adalah salah satu graf khusus yang setiap dua titiknya bertetangga.*

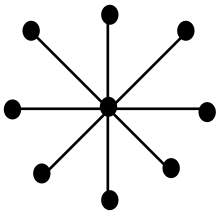
Contoh 4.



Gambar 2. 4 Graf Lengkap K_4

Definisi 2.2.3 *Graf Bintang berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik berderajat satu.*

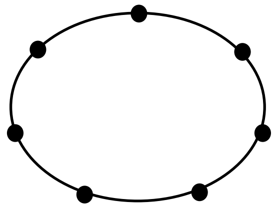
Contoh 5.



Gambar 2. 5 Graf Bintang S_9

Definisi 2.2.4 *Graf Siklus C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$.*

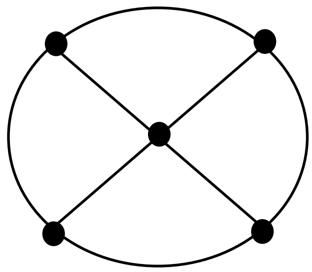
Contoh 6.



Gambar 2. 6 Graf Siklus C_7

Definisi 2.2.5 *Graf Roda W_n adalah graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x, dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$.*

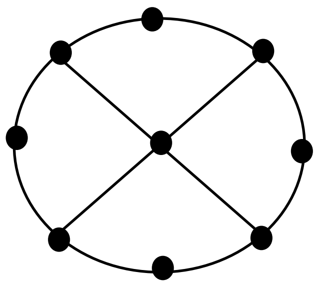
Contoh 7.



Gambar 2. 7 Graf Roda W_4

Definisi 2.2.6 *Graf Gir Gr_n adalah graf berorde $2n + 1$, yaitu graf yang diperoleh melalui penambahan satu titik pada setiap sisi siklus C_n pada roda W_n.*

Contoh 8.

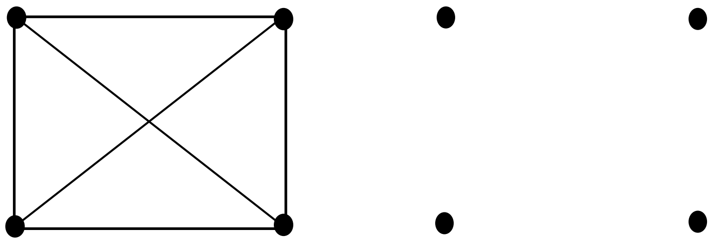


Gambar 2. 8 Graf Gir Gr_4

Berikut juga terdapat beberapa jenis-jenis graf sederhana dan sebagaian besar istilah serta definisi yang diambil dari Rosen (2007), antara lain

Definisi 2.2.7 *Komplemen graf dari graf G dinotasikan dengan $\bar{G}$. Graf $\bar{G}$ memiliki himpunan titik $V(G)$, tetapi dua titik bertetangga di $\bar{G}$ jika dan hanya jika mereka tidak bertetangga di G*

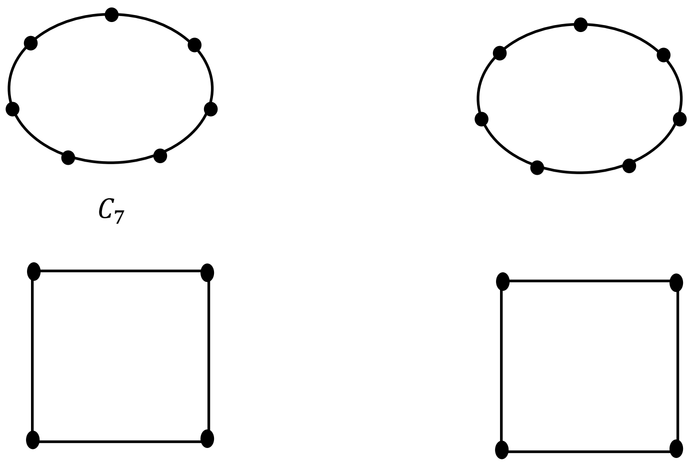
Contoh 9.



Gambar 2. 9 Graf K_4 dan Graf $\overline{K_4}$

Definisi 2.2.7 *Gabungan dari dua graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf sederhana dengan himpunan titik $V_1 \cup V_2$ dan himpunan busur $E_1 \cup E_2$ gabungan dari G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$.*

Contoh 10.



Gambar 2. 10 Graf C_7, Graf C_4dan Graf $C_7 \cup C_4$

2.3 Pelabelan Jumlah

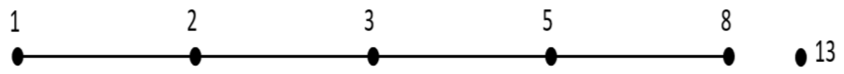
Salah satu pembahasan yang terus berkembang pada teori graf ialah pelabelan pada graf. Suatu pelabelan (penilaian) pada graf ialah pemetaan yang memetakan elemen-elemen dari graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat positif). Pilihan yang dijadikan daerah asal pemetaan umumnya merupakan himpunan secara titik dan sisi, himpunan titiknya saja, atau himpunan sisinya saja. Daerah asal yang berupa kombinasi elemen graf lain juga dimungkinkan (Addinnitya, 2012).

Pelabelan pada graf menjadi beberapa macam. Salah satu jenis pelabelan yang diketahui ialah pelabelan jumlah. Suatu graf tak berarah sederhana $G = (V, E)$ dikatakan graf jumlah (*sum graph*) jika terdapat pelabelan f yaitu pemetaan injektif dari V ke himpunan bulat positif S dapat dituliskan $f: V(G) \to S$, jika terdapat titik w sedemikian sehingga $f(w) = f(u) + f(v), w \in V \cup I$ dengan I himpunan titik terisolasi dan $uv \in E$. Titik w disebut titik bekerja. Graf yang memenuhi aturan pelabelan jumlah disebut graf jumlah. Jika graf G bukan graf jumlah, akan selalu memungkinkan untuk menambahkan sejumlah titik terisolasi kepada graf G untuk mencapai graf jumlah. (miller, dkk., 2005)

Berdasarkan definisi tersebut, maka titik dengan jumlah label tertinggi pasa graf jumlah tidak dapat bertetangga dengan titik lain, sehingga setiap graf jumlah harus mengandung titik terisolasi. Banyak minimum dari titik-titik terisolasi yang perlu ditambahkan agar diperoleh graf jumlah disebut dengan bilangan jumlah dengan dinotasian $\sigma(G)$. Suatu graf jumlah memiliki titik terisolasi yang paling sedikit maka dinamakan graf jumlah optimal (Gallian., 2021)

Suatu graf jumlah bersama dengan titik terisolasi yang paling sedikit dinamakan graf jumlah yang optimum (Tuga, dkk., 2005)

Contoh 11.



Gambar 2.11 Pelabelan Jumlah Pada Graf P_5

Gambar 2.11 memperlihatkan bilangan jumlah yang diperoleh dari pelabelan jumlah pada graf P_5, $\sigma(P_5,) = 1$. Titik dengan label tertinggi tidak dapat dihubungkan dengan titik lain. Akibatnya graf jumlah akan memiliki paling sedikit satu titik terisolasi.

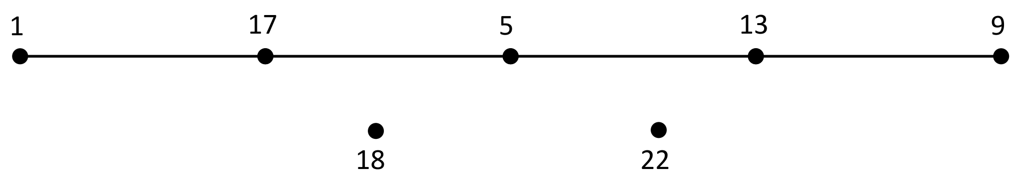
2.4 Pelabelan Jumlah Eksklusif

Miller, dkk (2005) menjelaskan bahwa Harary memperkenalkan konsep graf jumlah di tahun 1990, setelah itu peneliti menemukan pelabelan jumlah dari beberapa jenis graf. Kemudian miller, dkk. (2005) juga menemukan ide terkait pelabelan jumlah eksklusif sebagai perluasan dari pelabelan jumlah.

Suatu pelabelan jumlah f dikatakan pelabelan jumlah eksklusif terhadap subgraf H dari graf G jika tidak terdapat simbol pada H yang merupakan titik bekerja. Kemudian disebut H terlabel secara eksklusif. Bilangan jumlah eksklusif dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$, bilangan jumlah eksklusif dari graf G adalah nilai r terkecil dari titik terisolasi sedemikian sehingga $G = H \cup \overline{K_r}$. (Miller, M., dkk., 2003)

Sebuah Pelabelan f dari titik-titik pada graf menggunakan bilangan bulat positif berbeda sedemikian sehingga sembarang dua titik berbeda u dan v bertetangga jika dan hanya jika ada sebuah titik w dengan label $f(w) = f(u) + f(v)$.

Contoh 12.



Gambar 2.12 Pelabelan Jumlah Eksklusif Pada Graf P_5

Gambar 2.12 memperlihatkan bahwa bilangan jumlah eksklusif pada graf lintasan yang diperoleh dari pelabelan jumlah eksklusif, $\varepsilon(P_5,) = 2$. Kebanyakan penelitian yang terkait dengan pelabelan eksklusif pada suatu graf bertujuan untuk menemukan bilangan jumlah eksklusif dari graf tersebut. Salah satu penelitian penting mengenai pelabelan jumlah eksklusif adalah penelitian yang dilakukan oleh tuga, dkk. (2005). Pada penelitiannya tersebut, ditunjukkan bahwa jika diketahui $\Delta\ (G)$ menyatakan derajat tertinggi titik-titik pada graf G, maka $\varepsilon(G) \geq\ \Delta(G)$. Jika $\varepsilon(G) =\ \Delta(G)$, maka $\varepsilon(G)$ disebut bilangan eksklusif optimal (Tuga, dkk., 2005)

Pelabelan jumlah eksklusif dapat dilakukan pada semua jenis graf dengan menambahkan sejumlah titik terisolasi. pada penelitian ini dilakukan untuk menemukan pelabelan jumlah eksklusif pada graf gir dengan menghasilkan pelabelan jumlah eksklusif yang optimal.

Sistematika dalam pembuktian teorema yang akan dikemukakan dengan langkah-langka sebagai beriku :

1. Pendefinisian label untuk setiap titik pada graf dengan penjumlahan dari label titik yang bertetangga merupakan label titik terisolasinya.
2. Pembuktian bahwa banyak titik terisolasi yang diperoleh optimal.