SPEKTRUM GRAF SUBDIVISI-TITIK DAN SUBDIVISI-SISI AMALGAMASI PENUH

SPECTRUM OF SUBDIVISION-VERTEX AND SUBDIVISION-EDGE MULTIAMALGAMATION

DEVVY ANGGRAINI SAMIUN

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

SEKOLAH PASCASARJANA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

SPEKTRUM GRAF SUBDIVISI-TITIK DAN SUBDIVISI-SISI AMALGAMASI PENUH

Tesis

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program studi Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

DEVVY ANGGRAINI SAMIUN

H022221004

Kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

SEKOLAH PASCASARJANA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

TESIS

SPEKTRUM GRAF SUBDIVISI-TITIK DAN SUBDIVISI-SISI AMALGAMASI PENUH

DEVVY ANGGRAINI SAMIUN

NIM: H022221004

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 15 September 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pendamping
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**
NIP. 19700807 200003 1 002	NIP. 19680803 199202 1 001
Ketua Program Studi Matematika S2	Dekan Fakulras MIPA Universitas Hasanuddin
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1 013	NIP. 19720515 199702 1 002

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Devvy Anggraini Samiun
Nomor Mahasiswa	: H022221004
Program Studi	: Magister Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar – benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atau perbuatan tersebut.

Makassar, 15 September 2023

Yang menyatakan

Devvy Anggraini Samiun

UCAPAN TERIMA KASIH

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin, kalimat yang tiada hentinya penulis hanturkan kepada-Nya yang membuat hati berderai air mata bahagia karena syukur pada- Nya. Allah subhanahu wata'ala, zat yang maha memberi segalanya, yang menggerakkan hati dan pikiran, serta menggelorakan semangat. Shalawat dan salam senantiasa penulis kirimkan kepada Nabiullah Nabi Muhammad SAW yang mengajarkan dan membimbing manusia ke jalan yang benar, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Spektrum Graf Subdivisi-titik dan Subdivisi-sisi Amalgamasi Penuh."

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah sebagai salah satu syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada kedua orang tua tercinta dan tersayang **Ibunda Nida, S.IP** dan **Ayahanda Samiun, S.IP** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang mengalir tiada henti dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Terima kasih atas segala aspek dukungan yang tidak terkira nilainya. Semoga Tuhan memberikan balasan yang lebih baik lagi atas semua pengorbanan kalian.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.,** selaku pembimbing utama dan Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku pembimbing pertama untuk segala ilmu, nasehat, serta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya untuk mendampingi penulis sehingga tesis ini dapat terselesaikan.

2. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.,** Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.**, dan Bapak **Dr. Firman S.Si., M.Si** selaku anggota tim penguji yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. Terima kasih kepada kakak **dr. Verry Asward Samiun** yang sudah selalu meringankan beban penulis selama menempuh studi S2, dan adik-adik penulis **Aulia Nur Afifa Samiun**, **Zulmiatin Adiyah Samiun** dan **Dewi Kartini Samiun** yang telah menjadi pemacu bagi penulis untuk terus berusaha dengan lebih giat.
4. Sahabat **Unyu-Unyu**❀ yaitu **Inayah**, **Ria**, **Mayang** dan **Asma** yang telah menemani penulis selama kurang lebih 8 tahun senantiasa sudi meluangkan waktu, memberikan dukungan, dan tempat barbagi keluh kesah penulis.
5. Teman-teman **Prodi Matematika 2016 FMIPA UNHAS**, khususnya kepada **Miranda**, **Awal** dan **Alex**, serta teman-teman seperjuangan **S2 Matematika 2022-1** yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.
6. Kepada **Me Vitamin** yang telah banyak memberikan masukan dan dorongan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini hingga akhir.

Serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu per satu. Semoga segala bantuan yang tulus dan ikhlas ditujukan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah- mudahan tulisan ini bermanfaat untuk adik-adik, kakak-kakak dan semua pihak yang membutukan dan terutama untuk penulis sendiri.

Makassar, 15 September 2023

Penulis

Devvy Anggraini Samiun

ABSTRAK

Misalkan G dan H adalah dua buah graf yang saling bebas. Misalkan G mempunyai n_G titik dan m_G sisi. Graf subdivisi $S(G)$ adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan satu titik pada setiap sisi graf G. Himpunan titik-titik baru tersebut dinotasikan dengan $I(G)$. Dalam penelitian ini didefinisikan dua graf baru hasil operasi subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh dari graf G dan H, berturut-turut dinotasikan dengan $G \dot{\sqcup} H$, yaitu graf yang memuat $S(G)$ dan n_G *copy* graf H dengan melekatkan titik ke-i dari $V(G)$ ke satu titik u_1 pada *copian* ke-i graf H, dan $G \tilde{\sqcup} H$, yaitu graf yang memuat $S(G)$ dan m_G *copy* graf H dengan melekatkan titik ke- i dari $I(G)$ terhadap titik u_1 *copian* ke- i graf H. Titik u_1 disebut titik terminal. Dalam penelitian ini, diperoleh spektrum *adjacency*, *Laplacian* dan *signless Laplacian* masing-masing graf $G \dot{\sqcup} H$ dan $G \tilde{\sqcup} H$ untuk graf $r - regular$ sebagai graf G dan sembarang graf H dengan aturan yang telah ditentukan.

Kata kunci : Spektrum, subdivisi-titik amalgamasi penuh, subdivisi-sisi amalgamasih penuh

ABSTRACT

Let G and H be two vertices disjoint graphs. Let G have n_G vertices and m_G edges. The subdivision graph $S(G)$ is the graph by inserting a new vertice into every edge of G. The set of inserted vertices of $S(G)$, denoted by $I(G)$. We defined two new graphs operations are the subdivision-vertex and the subdivision-edge multiamalgamation of graph G and H, respectively denoted by $G \dot{\sqcup} H$, is the graph obtained from $S(G)$ and n_G copies of H and joining the i-th vertex of $V(G)$ to one vertex u_1 of the i-th copy of H, and the graph $G \tilde{\sqcup} H$, is the graph obtained from $S(G)$ and m_G copies of H and joining the i-th vertex of $I(G)$ to one vertex u_1 of the i-th copy of H. The u_1 is called the terminal vertex. In this thesis, we determine the adjacency spectra, the Laplacian spectra and the signless Laplacian spectra of $G \dot{\sqcup} H$ (respectively, $G \tilde{\sqcup} H$) for r-regular graph G and arbitrary graph H with certain rules.

Key words : Spectrum, subdivision-vertex multiamalgamation, subdivision-edge multiamalgamation

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bidang ilmu matematika yang penting dan banyak dikaji oleh para peneliti karena teori-teorinya yang aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis suatu model atau rumus, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan.

Sebuah graf G terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut simpul/titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi. Apabila sisi $v_i v_j$ ada di $E(G)$, maka dapat dikatakan bahwa titik v_i dan v_j saling bertetangga. Titik v_i dan v_j bertetangga apabila terdapat sisi yang menghubungkan v_i dan v_j serta sisi tersebut terkait dengan v_i dan v_j. Aplikasi cabang ilmu lain dari matematika dalam teori graf antara lain pada aljabar linier. Berdasarkan teori aljabar linier dapat dibentuk suatu matriks ketetanggaan A dari suatu graf. Matriks ketetanggan A merupakan matriks yang merepresentasikan ketetanggaan dari titik-titik yang terdapat pada suatu graf. Selain itu, dapat juga dibentuk matriks keterkaitan (*incidency*) antara titik dan sisi yaitu R_G, dan matriks diagonal yang elemen diagonalnya merupakan derajat setiap titik yaitu D. Lebih dari itu, dapat dibentuk matriks Laplacian L dan matriks *signless Laplacian* yang dibentuk dari matriks A dan D. Salah satu permasalahan dari teori graf aljabar adalah menentukan sifat-sifat graf yang direfleksikan dari teknik aljabar linier menggunakan matriks-matriks y ang disebutkan sebelumnya.

Spektrum graf merupakan studi yang mengkaji sifat-sifat graf dalam hubungannnya dengan polinomial karakteristik, nilai eigen, dan multiplisitas dari matriks yang terkait dengan graf, seperti matriks *adjacency* atau matriks *Laplacian*. Spektrum ini tidak hanya menarik dalam teori tetapi juga sangat bermanfaat dalam praktiknya misalnya dalam menganalisis ketahanan dan sinkronisasi jaringan[15]. Lebih jauh, spektrum graf sama seperti karakteristik polinom graf yang dapat memudahkan kita untuk mengenali sifat-sifat graf seperti energi graf dan penentuan bilangan pohon pembangun [16].

Hingga saat ini, telah banyak peneliti yang memperkenalkan dan mengkaji spektrum dengan operasi baru dari dua graf seperti *disjoint union*, corona, corona sisi, amalgamasi-titik dan persekitaran corona [1,2,3,6]. Dalam [14] didefinisikan graf subdivisi $S(G)$ dari graf G adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan titik baru disetiap sisi graf G. Kemudian, himpunan titik baru tersebut dinotasikan dengan $I(G)$. Dalam penelitian [10] telah diperkenalkan dua operasi graf baru berdasarkan graf subdivisi yaitu subdivisi-titik-join dan subdivisi-sisi-join, serta dilakukan penelitian $A-$spektrum, $L-$spektrum dan $Q-$spektrum dari graf hasil operasi tersebut. Selanjutnya, dalam penelitian [18] juga telah diperkenalkan operasi subdivisi-titik-corona dan subdivisi-sisi- persekitaran corona dan telah diteliti spektrum dari graf tersebut.

Berdasarkan uraian diatas, muncul pertanyaan bagaimana dengan spektrum graf hasil operasi amalgamasi penuh (*multiamalgamasi*) dari dua graf. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk meneliti spektrum graf hasil dua operasi baru yaitu, subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh dari dua graf G dan H.

1.2 Rumusan Masalah

Suatu graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk himpunan, bentuk geometrik dan bentuk matriks, yang memuat informasi tentang hubungan ketetanggaan diantara titik-titiknya. Bentuk matriks yang dimaksud adalah matriks *adjacency*.

Misalkan G adalah suatu graf sederhana terhubung berorde n dengan himpunan titik $V(G) = \{v_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ dan himpunan sisi (G) . Matriks *adjacency* A_G adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dengan entri ke$-ij$ (baris ke$-i$ dan kolom ke $-j$) yang bernilai 0 atau 1. Entri baris ke$-i$ dan kolom ke $-j$ bernilai 0 jika tidak terdapat sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j serta bernilai 1 untuk lainnya. Matriks *adjacency* pada graf sederhana adalah matriks simetri, karena jika v_i bertetangga dengan titik v_j maka sebaliknya juga berlaku.

Selain matriks *adjacency* juga dapat dibentuk matriks derajat yang memuat informasi tentang derajat setiap titik graf G, yaitu jumlah sisi yang terkait dengan setiap titik tersebut. Matriks derajat D_G adalah matriks diagonal dengan entri pada diagonal utamanya merupakan derajat dari titik v_i pada graf G. Matriks derajat dapat digunakan bersama dengan matriks *adjacency* untuk membentuk matriks *Laplacian* L_G dan matriks *signless Laplacian* Q_G. Matriks *Laplacian* adalah matriks persegi yang diperoleh dari matriks derajat dikurangi matriks *adjacency* atau $L_G = D_G - A_G$. Sedangkan matriks *signless Laplacian* adalah matriks persegi yang diperoleh dengan menjumlahkan matriks derajat dan matriks *adjacency* atau $Q_G = D_G + A_G$. Matriks *Laplacian* dan *signless Laplacian* juga merupakan matriks simetri.

Berdasarkan teori aljabar graf khususnya teori spektral, dapat ditentukan polinomial karakteristik, nilai eigen dan multisiplitas dari matriks *adjacency*. Polinom karakteristik dari matriks *adjacency* A_G dinotasikan dengan $\chi(A_G;\lambda)$, adalah bentuk polinom dari $\det(\lambda I_n - A_G)$. Jika λ adalah nilai eigen dari matriks A_G, maka multisiplitas aljabar didefinisikan sebagai multisiplitas dari λ sebagai akar polinom karakteristik dari A_G. Sementara itu, multisiplitas geometri didefinisikan sebagai dimensi dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Kumpulan nilai eigen yang berbeda bersama dengan multisiplitas dari matriks *adjacency* suatu graf membentuk spektrum yang disebut dengan spektrum matriks *adjacency* $(A - Spektrum)$. Begitu juga dengan nilai eigen dari matriks *Laplacian* dan matriks *signless Laplacian* dapat diperoleh dengan menggunakan polinom karakteristik dari masing-masing matriks. Karena matriks *adjacency, Laplacian* dan *signless Laplacian* adalah matriks simetri, maka multisiplitas aljabar sama dengan multisiplitas geometrinya. Lebih lanjut, semua nilai eigen dari matriks simetri bernilai real dan matriks tersebut dapat didiagonalisasi[4].

Dalam penelitian ini ada tiga jenis spektrum graf yang akan ditentukan yaitu spektrum matriks *adjacency* $(A - Spektrum)$, spektrum matriks *Laplacian* $(L - Spektrum)$, dan spektrum matriks *signless Laplacian* $(Q - Spektrum)$.

Berdasarkan uraian pada sub bab latar belakang, dalam penelitian ini akan didefinisikan dua operasi baru terhadap dua graf G dan H, yakni subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh. Selanjutnya, akan ditentukan spektrum graf hasil dua operasi graf tersebut. Dalam penelitian ini semua jenis graf yang digunakan adalah graf terhubung sederhana. Kemudian, akan ditetapkan graf $r-regular$ sebagai graf G dan sembarang graf sederhana terhubung sebagai graf H. Graf H yang digunakan harus memenuhi ketentuan berikut. Misalkan sembarang graf H berorde n_G, $n_G \geq 2$ dengan himpunan titik $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_G}\}$, maka terdapat suatu titik $u_1 \in V(H)$ yang bertetangga dengan setiap titik di H.

Berdasarkan uraian diatas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana bentuk spektrum matriks *adjacency* ($A - Spektrum$) dari graf hasil dua operasi subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh dari dua graf G dan H ?
2. Bagaimana bentuk spektrum matriks *Laplacian* ($L - Spektrum$) dari graf hasil dua operasi subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh dari dua graf G dan H ?
3. Bagaimana bentuk spektrum matriks *signless Laplacian* ($Q - Spektrum$) dari graf hasil dua operasi subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh dari dua graf G dan H?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, graf yang digunakan adalah graf terhubung sederhana r −regular dan sebarang graf sederhana terhubung lainnya.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk mengetahui bentuk spektrum matriks *adjacency* ($A - Spektrum$) dari graf hasil dua operasi subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh dari dua graf G dan H ?

2. Untuk mengetahui bentuk spektrum matriks $Laplacian$ $(L - Spektrum)$ dari graf hasil dua operasi subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh dari dua graf G dan H ?
3. Untuk mengetahui bentuk spektrum matriks $signless\ Laplacian$ $(Q - Spektrum)$ dari graf hasil dua operasi subdivisi-titik dan subdivisi-sisi amalgamasi penuh dari dua graf G dan H?

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi kontribusi dalam perkembangan teori graf aljabar serta dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang ingin melakukan penelitian khususnya dibidang teori graf aljabar.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

Berikut ini akan dipaparkan mengenai graf sederhana, derajat, jenis-jenis graf, dan operasi dalam graf yang akan digunakan dalam penelitian ini.

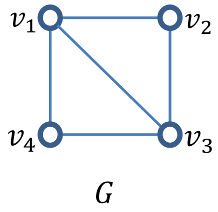
2.1.1 Graf Sederhana

Semua graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf berhingga, terhubung, dan sederhana.

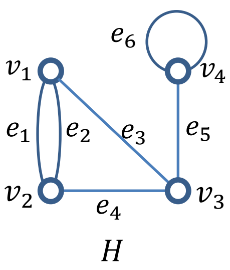
Definisi 2.1 [13]*Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$, adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong yang anggotanya disebut titik (vertex), dan $E(G)$,adalah himpunan pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$, disebut sisi (edge).*

Secara matematika, Definisi 2.1 dapat ditulis : Graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u : u \text{ disebut titik}\}$ dan $E(G) = \{(u, v) : u, v \in V(G)\}$, dengan (u, v) disebut sisi. Selanjutnya, graf $G = (V(G), E(G))$ cukup dituliskan graf G saja dan sisi $e = (u, v) \in E(G)$ hanya ditulis uv. Suatu sisi yang memiliki titik ujung yang sama disebut loop. Suatu graf G dikatakan memiliki sisi ganda jika terdapat dua sisi berbeda $e_1, e_2 \in E(G)$ dan dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ sehingga $e_1 = e_2 = (u, v)$. Graf G dikatakan graf sederhana jika G tidak memuat sisi loop ataupun sisi ganda.

Contoh 2.1 Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$. Graf G tersebut terlihat seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G



Gambar 2.2 Graf H

Graf H pada Gambar 2.2 adalah contoh graf yang tidak sederhana karena memuat loop e_6 dan terdapat sisi ganda e_1 dan e_2.

2.1.2 Graf Berhingga dan Derajat

Suatu graf G dikatakan berhingga jika himpunan titik $V(G)$ berhingga. Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde dari G, dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran dari G, dinotasikan dengan $|E(G)|$. Graf yang memiliki orde 1 disebut graf trivial.

Definisi 2.2 *Misalkan G adalah suatu graf dan $u, v \in V(G)$ serta $e \in E(G)$. Jika $e = uv$, maka*

1. *Titik u bertetangga (adjacent) dengan titik v*
2. *Sisi e terkait (incident) dengan titik u demikian pula dengan titik v.*

Definisi 2.3 *Derajat suatu titik u dalam graf G, dinotasikan $d_G(u)$ atau $d(u)$, adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik u.*

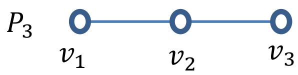
Contoh 2.2 Graf G pada Gambar 2.1 mempunyai barisan derajat $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$ dan $d(v_4) = 2$.

Misalkan suatu graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Suatu jalan *(walk)* di G adalah suatu barisan tak nol dan berhingga $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ yang anggotanya berselang-seling titik dan sisi, sehingga, untuk $1 \le i \le k$, titik ujung dari e_i adalah v_{i-1} dan v_i. W dikatakan sebagai suatu jalan dari v_0 ke v_k. Dua titik u dan v dikatakan terhubung jika terdapat jalan dari u ke v. G disebut graf terhubung jika setiap pasang titik u dan v di G terhubung.

2.1.2 Jenis-jenis Graf

Misalkan $n \ge 2$ dan G suatu graf dengan n titik dan himpunan titiknya adalah $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, G disebut graf lintasan, dinotasikan dengan P_n, jika himpunan titiknya dapat dibentuk menjadi suatu barisan $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$ sedemikian sehingga $v_i v_{i+1} = E(G)$ dengan $i = 1,2, \dots, n-1$ dengan $v_i \ne v_j$ untuk $i \ne j$.

Contoh 2.3



Gambar 2.3 Graf P_3

Suatu graf G dikatakan graf lengkap jika setiap pasang titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dan $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi, dinotasikan dengan K_n, $n \geq 2$. Untuk selanjutnya, agar memudahkan penulisan jumlah sisi graf lengkap hanya ditulis sebagai m. Graf G disebut regular jika derajat setiap titiknya sama. Graf $G = (V(G), E(G))$ disebut $r - reguler$ jika $d_G(v_i) = r$, untuk setiap $v \in V(G)$.

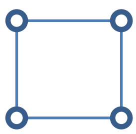
Contoh 2.4

K_4 $\qquad$ $3 - reguler$

Gambar 2.4 Graf K_4 dan $3 - reguler$

Graf lingkaran berorde n, untuk $n \geq 3$, dinotasikan dengan C_n adalah graf terhubung $2 - reguler$.

Contoh 2.5

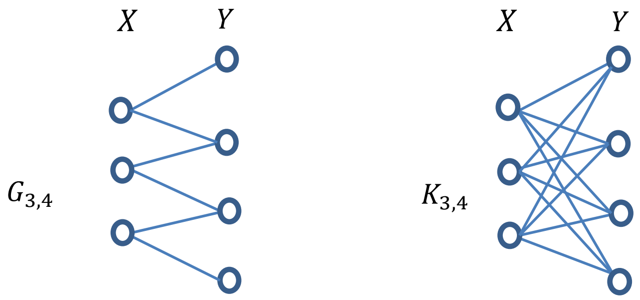


C_4

Gambar 2.5 Graf C_4

Suatu graf G disebut graf bipartit jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua buah sub himpunan tak kosong X dan Y sedemikian sehingga untuk setiap sisi di G berlaku salah satu ujungnya berada di X dan ujung lainnya berada di Y. Misalkan banyaknya titik di X adalah m dan banyaknya titik di Y adalah n, maka graf bipartit G dinotasikan dengan $G_{m.n}$. Jika setiap titik X bertetangga dengan setiap titik di Y, maka $G_{m.n}$ disebut graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$.

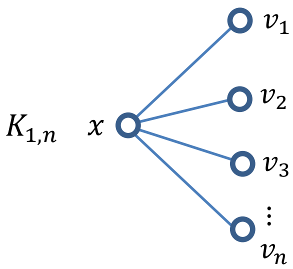
Contoh 2.6



Gambar 2.6 Graf $G_{3,4}$ dan $K_{3,4}$

Graf bipartit lengkap $K_{1,n}$ secara khusus disebut graf bintang.

Contoh 2.7



Gambar 2.7 Graf $K_{1,n}$

2.1.3 Operasi Graf

Dalam subbab ini akan dipaparkan beberapa operasi dalam graf yang akan digunakan dalam bab pembahasan.

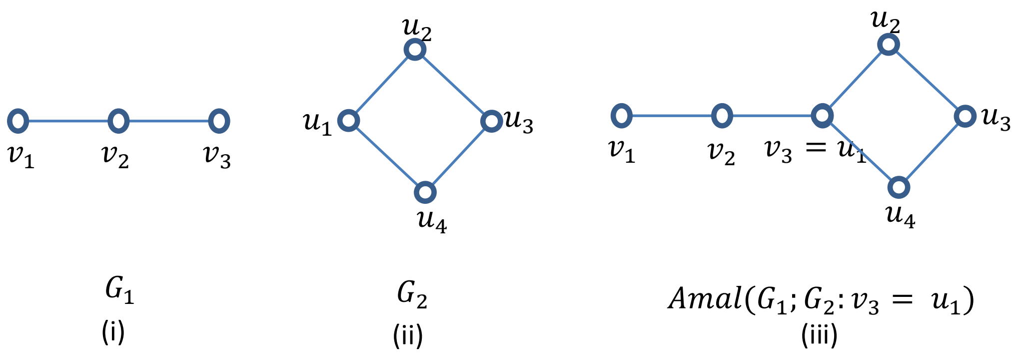
Definisi 2.4 [14]*Misalkan G adalah suatu graf terhubung. Graf hasil operasi subdivisi graf G,dinotasikan dengan $S(G)$ adalah graf yang diperoleh dengan* *menambahkan titik baru pada setiap sisi graf G. Himpunan titik baru tersebut dinotasikan dengan $I(G)$.*

Contoh 2.8 Diberikan graf P_3 dengan himpunan titik $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$, maka diperoleh $I(P_3) = \{e_1, e_2\}$. Graf hasil operasi subdivisi graf P_3 dapat dilihat pada Gambar 2.8

Gambar 2.8 (i) Graf P_3 dan (ii) Graf $S(P_3)$

Definisi 2.5 [13]*Misalkan G_i graf terhubung dengan titik tetap $v_{0i} \in V(G_i)$. Amalgamasi graf G_i pada titik tetap v_{0i} dinotasikan dengan $Amal(G_i; v_{0i})$ adalah mengambil semua unsur-unsur (titik dan sisi) pada G^idengan $v_{0i} = v_{0j}, \forall i, j$.*

Contoh 2.9

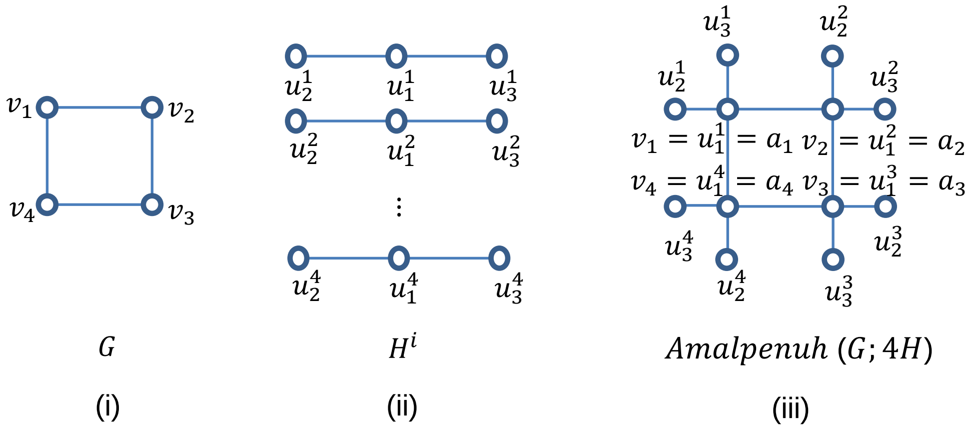


Gambar 2.9 (i) Graf G_1, (ii) Graf G_2 dan (iii) Graf $Amal(G_1; G_2: v_3 = u_1)$

Definisi 2.6 [13]*Misalkan G adalah graf terhubung berorde n dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G)$. Misalkan n graf terhubung H yaitu H^i, $i = 1,2, \dots, n$ dengan $H = H^1 = H^2 = \cdots = H^n$, yang masing-masing berorde p dengan himpunan titik $V(H^i) = \{u_1^i, u_2^i, \dots, u_p^i\}$, $i = 1,2, \dots, n$. Amalgamasi penuh graf G terhadap graf-graf H^1, $H^2, \dots, H^n$, dinotasikan dengan*

$Amalpenuh(G; H^1, H^2, \ldots, H^n: a_1, a_2, \ldots, a_n)$ adalah mengambil graf G dan $H^1, H^2, \ldots, H^n$ dengan $v_1 = u_1^1 = a_1,\ v_2 = u_1^2 = a_2, \ldots, v_n = u_1^n = a_n$).

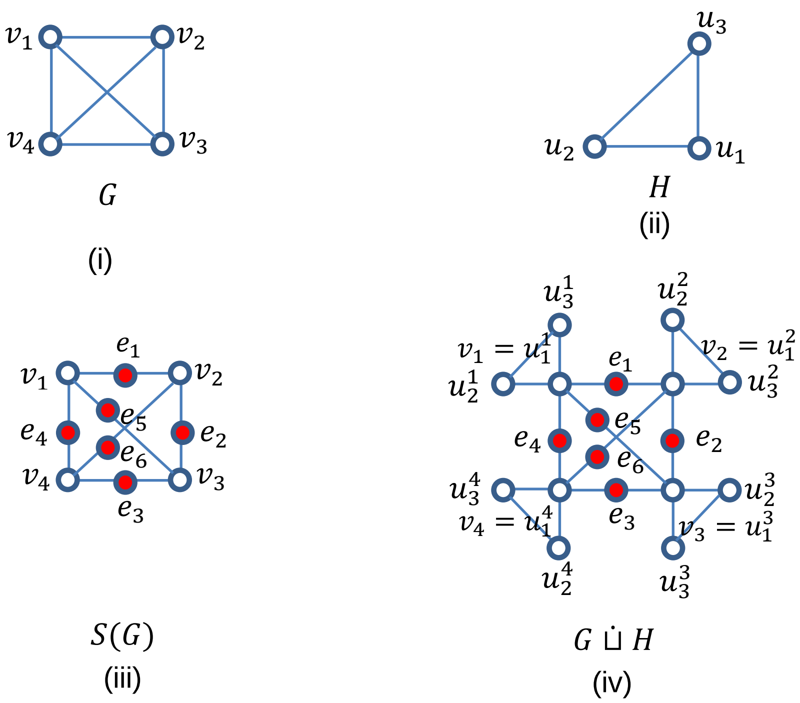
Contoh 2.10 Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$. Misalkan graf-graf H^i, dengan himpunan titik $V(H^i) = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i\},\ i = 1,2,3,4$. $Amalpenuh(G; H^1, H^2, H^3, H^4: a_1, a_2, a_3, a_4)$ dapat dilihat pada Gambar 2.10 (iii) berikut



Gambar 2.10 (i) Graf G, (ii) Graf H^i dan (iii) Graf $Amalpenuh(G; 4H)$

Definisi 2.7 *Misalkan G dan H masing-masing adalah graf terhubung dan G berorde n_G. Didefinisikan subdivisi-titik amalgamasi penuh graf G dan H dinotasikan dengan $G \dot{\sqcup} H$, adalah graf yang memuat $S(G)$ dan n_G copy graf H dengan melekatkan titik ke-i dari $V(G)$ terhadap titik u_1 copian ke-i graf H. Titik u_1 disebut terminal $G \dot{\sqcup} H$.*

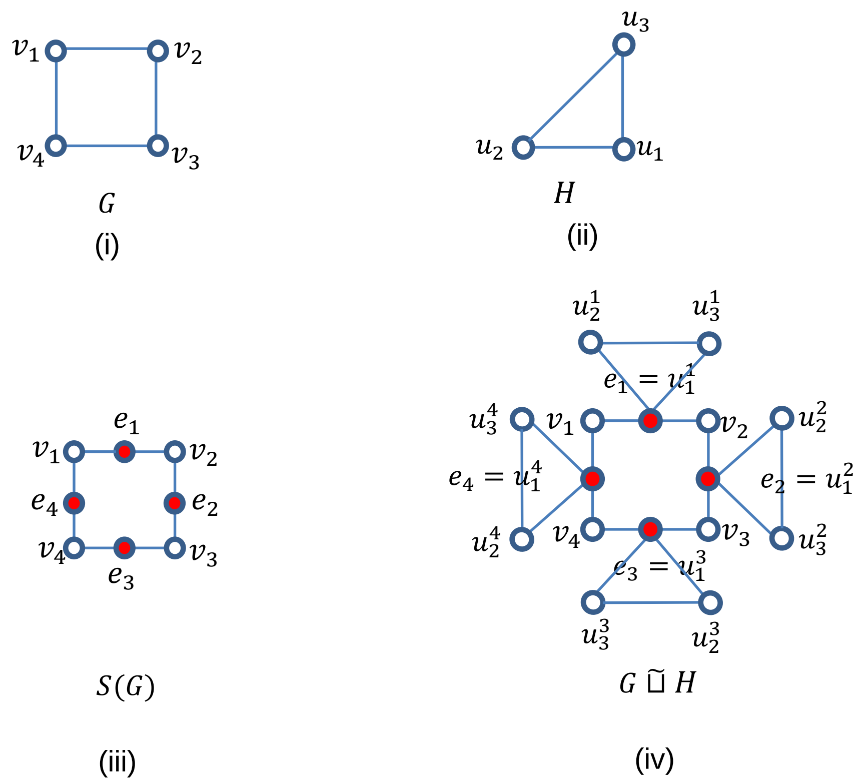
Contoh 2.11 Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan *himpunan sisi* $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$, maka diperoleh graf subdivisi $S(G)$ dengan $I(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Misalkan graf-graf H^i dengan himpunan titik $V(H^i) = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i\},\ i = 1,2,3,4$, maka graf $G \dot{\sqcup} H$ dapat dilihat pada Gambar 2.11 (iv) berikut.



Gambar 2.11 (i) Graf G, (ii) Graf H , (iii) Graf $S(G)$ dan (iv) Graf $G \dot{\sqcup} H$

Definisi 2.8 *Misalkan G dan H masing-masing adalah graf terhubung, G berukuran m_G. Didefinisikan subdivisi-sisi amalgamasi penuh graf G dan H dinotasikan dengan $G \tilde{\sqcup} H$, adalah graf yang memuat $S(G)$ dan m_G copy graf H dengan melekatkan titik ke- i dari $I(G)$ terhadap titik u_1 copian ke- i graf H. Titik u_1 disebut terminal $G \tilde{\sqcup} H$.*

Contoh 2.12 Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan *himpunan sisi* $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$, maka diperoleh graf subdivisi $S(G)$ dengan $I(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Misalkan graf H dengan himpunan titik $V(H^i) = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i\}$, $i = 1,2,3,4$, maka graf $G \tilde{\sqcup} H$ dapat dilihat pada Gambar 2.11 (iv) berikut.



Gambar 2.12 (i) Graf G, (ii) Graf H^i, (iii) Graf $S(G)$ dan (iv) Graf $G \tilde{\sqcup} H$

2.2 Teori Graf Aljabar

Teori graf aljabar merupakan salah satu cabang matematika dimana metode aljabar diterapkan untuk masalah graf. Ada tiga cabang utama teori graf aljabar, yang melibatkan penggunaan aljabar linier, teori grup dan studi invarian graf. Pada penelitian ini, difokuskan pada teori graf aljabar yang melibatkan penggunaan aljabar linier. Lebih khusus, spektrum matriks *adjacency*, matriks *Laplacian* dan matriks *signless Laplacian.*

Berikut ini akan dipaparkan beberapa istilah dalam matriks, operasi matriks, determinan matriks, polinomial karakteristik, nilai eigen dan multisiplitasnya.

2.2.1 Matriks

Matriks tidak mempunyai nilai tetapi ukuran yang disebut ordo yang ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Jika suatu matriks A

mempunyai m baris dan n kolom, maka matriks A berordo $m \times n$. Jika $m = n$, maka matriks A berordo $n \times n$ yang disebut sebagai matriks persegi.

Misalkan $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ adalah suatu matriks atas lapangan F dengan $i, j \in \{1,2, \ldots, n\}$ yang mempunyai sub matriks utama berukuran $(n-k) \times (n-k)$ yaitu sub matriks yang diperoleh dengan menghapus secara bersamaan k buah baris dan k buah kolom yang berindeks sama. Minor utama berukuran $k \times k$ adalah determinan dari sub matriks utama berukuran $k \times k$.

Selanjutnya, berikut jenis-jenis matriks yang akan digunakan dalam penelitian ini.

1. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks berordo $1 \times n$, juga disebut vektor baris. Secara umum dapat ditulis $[a_{ij}]$ dengan $i = 1, j = 1,2,3, \ldots n$

Contoh 2.14

$$A_{1 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks $A_{1 \times 4}$ diatas dapat ditulis $\mathbf{1}_4^T$ yang semua elemennya bernilai satu. Secara umum, vektor baris berordo $1 \times n$ yang semua elemennya bernilai satu dinotasikan dengan $\mathbf{1}_n^T$.

2. Matriks Kolom

Matriks baris adalah matriks berordo $m \times 1$, juga disebut vektor kolom. Secara umum dapat ditulis $[a_{ij}]$ dengan $i = 1,2,3, \ldots n, j = 1$.

Contoh 2.15

$$A_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor kolom berordo $m \times 1$ yang semua elemennya bernilai satu dinotasikan dengan $\mathbf{1}_n$.

3. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks berordo $n \times n$ dengan semua elemen-elemen yang bukan elemen diagonal utama adalah nol.

Contoh 2.16

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Identitas

Matriks identitas dinotasikan dengan $I_{n\times n}$ adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utama bernilai satu. Matriks identitas juga disebut matriks satuan.

Contoh 2.17

$$I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Nol

Matriks nol dinotasikan dengan $\mathbf{0}_{m\times n}$ adalah sebuah matriks yang seluruh elemen penyusunnya merupakan bilangan nol.

Contoh 2.18

$$\mathbf{0}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Blok

Matriks blok atau matriks partisi dari suatu matriks persegi adalah matriks yang dipartisi atau diblok menjadi beberapa submatriks yang ukurannya lebih kecil. Matriks blok yang dibahas adalah matriks persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom submatriks yang disebut matriks blok 2×2. Secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

Misalkan M matriks $n \times n$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(n-k)1} & \cdots & a_{(n-k)(n-k)} & a_{(n-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(n-k)n} \\ a_{(n-(k-1))1} & \cdots & a_{(n-(k-1\_)(n-k)} & a_{(n-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(n-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{n(n-k)} & a_{n(n-(k-1\_)} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dan misalkan

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-k)1} & \cdots & a_{(n-k)(n-k)} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(n-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(n-k)n} \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} a_{(n-(k-1))1} & \cdots & a_{(n-(k-1\_)(n-k)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-k)} \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} a_{(n-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(n-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n(n-(k-1\_)} & \cdots & a_{nn)} \end{bmatrix}$$

maka diperoleh matriks blok 2×2 dari matriks M sebagai berikut

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan determinan dari suatu matriks blok digunakan metode komplemen Schur. Berikut ini dipaparkan mengenai determinan matriks persegi dengan menggunakan matriks blok.

Proposisi 2.1 [9]Jika M_1, M_2, M_3, dan M_4, masing-masing adalah matriks berordo $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, dan $q \times q$, maka

$$\det \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \begin{cases} det(M_1)\, det(M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2) & , jika\ M_1\ memiliki\ invers \\ det(M_4)\, det(M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3) & , jika\ M_4\ memiliki\ invers \end{cases}$$

dengan $M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3$ dan $M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2$ disebut komplemen Schur (*Schur complement)* dari M_4 dan M_1.

Dalam penelitian ini digunakan beberapa operasi matriks yang umum digunakan yakni, penjumlahan, pengurangan, dan perkalian matriks. Lebih dari itu, akan digunakan operasi perkalian Kronecker (*Kronecker Product*) sebagai berikut.

Definisi 2.9 *Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times n$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $p \times q$, maka perkalian Kronecker $A \otimes B$ adalah matriks blok $mp \times nq$:*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} b_{11}\mathrm{B} & \cdots & a_{1n}\mathrm{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathrm{B} & \cdots & a_{mn}\mathrm{B} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.19 Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = [1 \quad 1 \quad 1]$

maka $A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Berikut ini beberapa sifat perkalian Kronecker pada matriks.

1. Jika A, B, C dan D adalah matriks-matriks yang ukurannya sedemikian sehingga dapat dibentuk perkalian matriks AC dan BD, maka
$$(A \otimes B)\,(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$
2. Jika A dan B masing-masing adalah matriks berorde $n \times n$ dan $p \times p$, maka
$$\det(A \otimes B) = (\det A)^p (\det B)^n$$
3. Invers
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$
4. Transposisi
$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

2.2.2 Polinom Karakteristik dan Nilai Eigen

Misalkan M suatu matriks berorde $n \times n$, polinom karakteristik dari M, dinotasikan dengan $\chi(M; \lambda)$, adalah bentuk polinom dari $\det(\lambda I_n - M)$. Akar-akar dari polinom karakteristik tersebut merupakan nilai-nilai eigen dari matriks M. Misalkan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ adalah nilai eigen yang berbeda,maka

$$\chi(M;\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

Bilangan m_i disebut multisiplitas aljabar dari nilai eigen $\lambda_i\ \forall i \in \{1,2,\dots,k\}$, sedangkan multisiplitas geometri dari λ_i adalah dimensi dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i yakni suatu ruang vektor yang basisnya merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i .

Contoh 2.20 Diberikan matriks M berikut

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan polinom karakteristik berikut

$$\begin{aligned} \chi(M;\lambda) &= \det(\lambda I_4 - M) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 \\ &= (\lambda-3)(\lambda+1)^3 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, dengan multisiplitas aljabar $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3$.

Definisi 2.10 [3] *Misalkan M suatu matriks berorde $n \times n$ dan* $\det(\lambda I_n - M) \neq 0$, *maka matriks coronal dari M ($M-coronal$), dinotasikan dengan $\Gamma_M(\lambda)$ adalah jumlah semua elemen dari matriks $(\lambda I_n - M)^{-1}$ atau dapat ditulis*

$$\Gamma_M(\lambda) = \mathbf{1}_n^T(\lambda I_n - M)^{-1}\mathbf{1}_n \tag{2.1}$$

2.2.3 Spektrum Graf

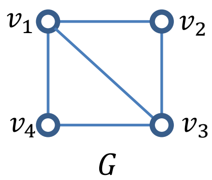
Ada banyak kegunaan dan aplikasi untuk merepresentasikan sebuah graf dalam bentuk matriks, diantaranya melalui matriks *adjacency* A_G, matriks *Laplacian* L_G, dan matriks *signless Laplacian* Q_G. Baris dan kolom matriks-

matriks tersebut mewakili titik, dan elemennya menunjukkan apakah ada sisi antara dua titik atau tidak, serta menunjukkan derajat setiap titik di graf G.

Definisi 2.11 *Misalkan graf G berorde n dengan himpunan titik $V(G) = \{v_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ dan himpunan sisi $E(G)$. Matriks ketetanggaan (adjacency) dari graf G dinotasikan dengan A_G dengan elemen $[a_{ij}]$ yakni*

$$A_G = [a_{ij}] = \begin{cases} 1\,, & jika\ v_i\ dan\ \ v_j\ bertetangga \\ 0\,, & lainnya \end{cases}$$

Contoh 2.21 Misalkan graf G dengan matriks *adjacency* A_G sebagai berikut.



$$A_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.13 Graf G

Definisi 2.12 *Misalkan graf G berorde n dengan himpunan titik $V(G) = \{v_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ dan himpunan sisi $E(G)$. Matriks derajat dari G, dinotasikan dengan D_G adalah matriks diagonal yang entri diagonal utamanya adalah derajat dari v_i dengan elemen $[d_{ij}]$ yakni*

$$D_G = [d_{ij}] = \begin{cases} \deg(v_i)\,, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Definisi 2.13 *Misalkan graf G berorde n dengan himpunan titik $V(G) = \{v_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ dan himpunan sisi $E(G)$. Matriks keterkaitan (incidency) dari graf G dinotasikan dengan R_G, adalah matriks yang barisnya menyatakan titik-titik dan kolomnya menyatakan sisi-sisi dari graf G, dengan elemen $[r_{ij}]$ yakni*

$$R_G = [r_{ij}] = \begin{cases} 1, & jika\ v_i\ terkait\ dengan\ sisi\ v_iv_j \\ 0, & jika\ v_i\ tak\ terkait\ dengan\ sisi\ v_iv_j \end{cases}$$

Suatu graf garis (*line*) $\mathcal{L}_{\mathrm{G}}$ dari graf G adalah graf dengan himpunan titiknya adalah sisi-sisi graf G dan dua sisi graf G bertetangga di graf $\mathcal{L}_{\mathrm{G}}$ jika dan hanya jika keduanya terkait di G.

Misalkan suatu graf lengkap G dengan n titik dan $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Untuk selanjutnya, jumlah sisi dalam graf lengkap dinotasikan dengan m sisi, matriks *incidency* R dari graf lengkap berukuran $n \times m$, dapat kita partisi menjadi matriks blok 2×2 berikut

$$R_{n\times m} = \begin{bmatrix} 1_{n-1}^{T} & 0_{1\times(m-n+1)} \\ I_{n-1} & R_{(n-1)\times(m-n+1)} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Proposisi 2.14 [2] *Misalkan suatu graf G berorde n dan berukuran m dengan matriks incidency R_G, A_G matriks adjacency graf G dan $A_{\mathcal{L}_G}$ matriks adjacency graf $\mathcal{L}_G$, maka*

(i) $R_G^T R_G = A_{\mathcal{L}_{\mathrm{G}}} + 2I_m$ (2.3)

(ii) *Jika G graf $r-regular$, maka $R_G R_G^T = A_G + rI_n$.* (2.4)

Definisi 2.15 *Misalkan graf G berorde n dengan himpunan titik $V(G) = \{v_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ dan himpunan sisi (G) . Didefinisikan matriks Laplacian dari G dengan elemen $[l_{ij}]$, dinotasikan dengan L_G adalah*

$$L_G = [l_{ij}] = \begin{cases} -1, & jika\ v_iv_j \in E(G) \\ der\ (v_i), & jika\ v_i = v_j \\ 0, & jika\ v_iv_j \notin E(G) \end{cases}$$

Perhatikan bahwa matriks *Laplacian* dari graf G adalah $L_G = D_G - A_G$, dengan D_G adalah matriks derajat dan A_G adalah matriks *adjacency* graf G.

Definisi 2.16 *Misalkan graf G berorde n dengan $V(G) = \{v_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ dan himpunan sisi $E(G)$. Didefinisikan matriks signless Laplacian dari G dengan elemen $[q_{ij}]$, dinotasikan dengan Q_G adalah*

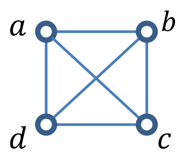
$$Q_G = [q_{ij}] = \begin{cases} 1, & jika\ v_iv_j \in E(G) \\ der\ (v_i), & jika\ v_i = v_j \\ 0, & jika\ v_iv_j) \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks *signless Laplacian* dari graf G juga dapat ditulis $Q_G = D_G + A_G$.

Definisi 2.17 *Misalkan λ adalah suatu nilai karakteristik dari matriks A_G berorde n dan $m(\lambda)$ adalah multisiplitas dari λ. Misalkan A_G memiliki nilai-nilai eigen berbeda $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ dengan multisiplitas masing-masing $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_k)$. Spektrum dari graf G, dinotasikan dengan $Spec\ G$, adalah nilai-nilai eigen dan multisiplitas aljabarnya atau dapat ditulis dalam bentuk berikut*

$$Spec\ G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

Contoh 2.22 Diberikan graf lengkap K_4 sebagai berikut.



Matriks *adjacency* dari graf K_4

$$A_{K_4} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Perhatikan Contoh 2.20 diperoleh polinom karakteristik dari matriks *adjacency* graf K_4

$$\chi(A_{K_4}; \lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$$

Sehingga diperoleh

$$Spec\ K_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama dapat ditentukan spektrum dari matriks *Laplacian* dan matriks *signless Laplacian.*

Untuk $L - spektrum$ graf K_4

$$L_{K_4} = D_{K_4} - A_{K_4}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

dengan polinom karakteristik berikut

$$\chi\left(L_{K_4}; \lambda\right) = \det(\lambda I_4 - L_{K_4})$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda^4 - 12\lambda^3 + 48\lambda^2 - 64\lambda$$

$$= \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda} - 4)^3$$

Sehingga diperoleh

$$L - Spec\ K_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk $Q - spektrum$ graf K_4

$$Q_{K_4} = D_{K_4} + A_{K_4}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

dengan polinom karakteristik berikut

$$\chi\left(Q_{K_4}; \lambda\right) = \det(\lambda I_4 - L_{K_4})$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda^4 - 12\lambda^3 - 48\lambda^2 - 80\lambda + 48$$

$$= (\boldsymbol{\lambda} - 6)(\boldsymbol{\lambda} - 2)^3$$

Sehingga diperoleh

$$Q - Spec\ K_4 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.18 *[14] Misalkan G suatu graf $r - regular, r \geq 2$ yang berorde n dan berukuran m, dengan nilai eigen matriks adjacency $\lambda_i(G)$, $i = 1,2, \dots, n$, maka nilai eigen dari matriks adjacency graf garis $\mathcal{L}_G$ adalah*

(i) -2 , *dengan multisiplitas* $m - n$

(ii) $\lambda_i(G) + r - 2$, $i = 1,2, \dots, n$.