

**BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT UKURAN UNTUK GRAF  
LINTASAN VERSUS GRAF JAM PASIR**

*THE SIZE MULTIPARTITE RAMSEY NUMBERS FOR PATH  
GRAPH VERSUS HOURGLASS GRAPH*

**SYAMSUDDIN**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2023**

**BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT UKURAN UNTUK GRAF  
LINTASAN VERSUS GRAF JAM PASIR**

*THE SIZE MULTIPARTITE RAMSEY NUMBERS FOR PATH  
GRAPH VERSUS HOURGLASS GRAPH*

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

SYAMSUDDIN

H022221007

Kepada

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2023**

**TESIS**

**BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT UKURAN UNTUK GRAF  
LINTASAN VERSUS GRAF JAM PASIR**

**SYAMSUDDIN**

**H022221007**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka  
Penyelesaian Studi Program Magister Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin  
pada tanggal 13 Oktober 2023  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

**Menyetujui**

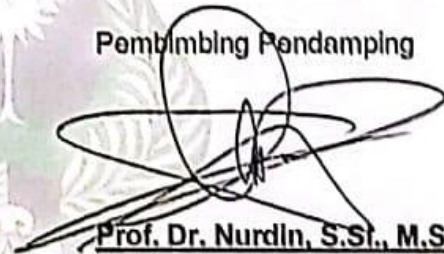
**Pembimbing Utama**



**Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.**

**NIP. 19641231 199003 2 007**

**Pembimbing Pendamping**



**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**

**NIP. 19700807 200003 1 002**

**Ketua Program Studi  
Matematika**



**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**

**NIP. 19640207 199103 1 013**

**Dekan Fakultas MIPA  
Universitas Hasanuddin**



**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**

**NIP. 19720515 1997 02 1 002**

## PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran Untuk Graf Lintasan Versus Graf Jam Pasir" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing (Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. dan Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari tesis ini telah diajukan di Journal of Advanced Research in Applied Sciences and Engineering Technology sebagai artikel dengan judul "The Size Multipartite Ramsey Numbers for Path of Two Vertices and Hourglass Graphs".

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 13 Oktober 2023

Yang menyatakan

  
Syamsuddin

NIM : H022221007

## UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji bagi Allah *subhaana wata'ala* yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga dengan sebab itu penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Barang siapa yang diberi petunjuk oleh Allah maka tak akan ada yang dapat menyesatkannya dan barang siapa yang disesatkan oleh Allah maka tak akan ada yang dapat memberi petunjuk kepadanya. Shalawat serta salam tak lupa pula penulis kirimkan kepada Nabi Muhammad *shallallaahu 'alayhi wasallam*, manusia terbaik yang pernah diutus oleh Allah *subhaana wata'ala* sebagai pemberi kabar gembira bagi orang-orang yang beriman, pemberi peringatan bagi orang-orang yang ingkar dan sebagai sosok yang sepatutnya dijadikan contoh dalam semua aspek kehidupan. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua tercinta, Ayahanda Saing dan Ibunda Suhaeda yang penuh dengan kesabaran dalam mendidik penulis, yang senantiasa mencurahkan kasih sayang yang tak pernah putus serta senantiasa memberikan dukungan dan do'a yang tulus sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Ucapan terima kasih juga kepada saudara-saudari tercinta, Jamaluddin, S.T., Nasaruddin, AMKG., Juharni, S.Pd., dan Irma serta seluruh keluarga yang selalu senantiasa memberikan do'a dan dukungan bagi penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

Pada kesempatan ini pula penulis juga ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si., selaku pembimbing utama dan Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si., selaku pembimbing pendamping yang telah bersedia meluangkan waktu untuk membimbing penulis serta penuh kesabaran dalam membimbing, membagi ilmu, memberikan pencerahan dan petunjuk kepada penulis selama penyusunan tesis ini. Ucapan terima kasih juga kepada Bapak Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc., Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si., dan Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si., selaku anggota tim penguji yang telah memberikan ilmu, kritik, saran, dan dukungan yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini. Selanjutnya pada

kesempatan ini penulis juga menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Jamaluddin Jompa, M.Sc., selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya atas kemudahan-kemudahan yang diberikan, baik dalam bidang akademik maupun bidang kemahasiswaan.
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si., selaku ketua Departemen Matematika dan Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si., selaku ketua Prodi Magister Matematika, yang telah memberikan bantuan dan arahan selama penulis menempuh pendidikan.
4. Bapak/Ibu dosen dan staf administrasi Departemen Matematika yang telah memberikan ilmu, nasehat, dan bantuan kepada penulis selama ini.
5. Teman-teman khusus, yaitu Akh Fadel, Akh Mu'adz, Akh Sharhan, Akh Bagas, dan Akh Rama yang sempat memberikan nasehat dan motivasi ketika penulis berada pada fase malas mengerjakan tugas akhir.
6. Teman-teman pejalan S2 Matematika Unhas, yaitu Akh Mu'adz, Akh Aswal, Akh Iman, Akh Weldi, dan Akh Ulil yang selama ini selalu memberikan dukungannya selama penulis menjalani studi.
7. Teman-teman Al Fityah, yaitu Akh Wahyudi, Akh Sharhan, Akh Sahdan, Akh Salam, Akh Fikran, Akh Yusuf, dan Akh Faat yang selama ini selalu memberi nasehat baik secara langsung ataupun tidak langsung kepada penulis.
8. Ustadz-ustadz tenaga pendidik di SMAS IT Wahdah Islamiyah Gowa, yaitu Ustadz Sudarman, Ustadz Husni, Ustadz Dedi, Ustadz Surya, Ustadz Hapid, Ustadz Rahmatullah, dan Ustadz Ibrahim yang senantiasa memberi dukungan dan pengertiannya kepada penulis selama proses penyelesaian studi.
9. Ikhwah halaqah Yazid bin Syarik At Taimi (teman-teman tarbiyah) dan terkhusus kepada ustadz Rudy selaku murabbi yang senantiasa memberikan bimbingan dan dukungannya kepada penulis.
10. Adik-adik binaan, yaitu mahasantri Rumah Tahfidzh Al Fityah, mutarabbi Halaqah Umar Bin Khattab, mutarabbi Halaqah Matematika'22, santri-santri TPA Al Fityah, dan siswa SMAS IT WI Gowa yang selama ini juga

selalu memberi dukungan serta menjadi salah satu sumber nasehat dan semangat bagi penulis.

11. Teman-teman seperjuangan Prodi Magister Matematika 2022 yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.
12. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari kesempurnaan, hal ini disebabkan karena keterbatasan daya pengetahuan, pengalaman, serta kemampuan yang dimiliki oleh penulis. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang membangun sangat dibutuhkan oleh penulis demi perbaikan di masa mendatang. Penulis berharap semoga tesis ini bermanfaat bagi para pembacanya. Semoga Allah *subhaana wata'aala* tetap menjaga pembaca dan penulis agar tetap dalam koridor kehidupan yang seharusnya, Aamiin.

Makassar, 13 Oktober 2023

Penulis



Syamsuddin

## ABSTRAK

SYAMSUDDIN. **Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran untuk Graf Lintasan versus Graf Jam Pasir** (dibimbing oleh Hasmawati dan Nurdin).

Misalkan  $j, a, b, c$ , dan  $d$  adalah bilangan-bilangan asli dengan  $a, c \geq 2$  dan  $j, b, d \geq 1$ . Bilangan Ramsey multipartit-ukuran  $m_j(K_{axb}, K_{cxd})$  adalah bilangan asli terkecil  $t$  sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf  $K_{jxt}$  diberi warna merah dan warna biru secara sebarang, maka graf  $K_{jxt}$  akan memuat subgraf  $K_{axb}$  merah atau  $K_{cxd}$  biru dan didefinisikan tak hingga dalam keadaan lain. Untuk sebarang graf  $G$  dan  $H$ , bilangan Ramsey multipartit ukuran dua warna  $m_j(G, H)$  adalah bilangan asli terkecil  $t$  sedemikian sehingga jika semua sisi pada graf multipartit seimbang lengkap  $K_{jxt}$  diwarnai dengan dua warna, maka  $K_{jxt}$  memuat subgraf yang semua sisinya berwarna sama isomorfik dengan graf  $G$  atau  $H$ . Dalam penelitian ini, akan ditentukan nilai-nilai dari bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(P_m, Hg_n)$  untuk  $j \geq 2, 2 \leq m \leq 3$ , dan  $n \geq 3$  dengan  $j, m, n \in \mathbb{N}$ . Hasil pada penelitian ini menunjukkan bahwa bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan dan graf jam pasir, yaitu  $m_j(P_2, Hg_n) = \infty$  jika  $j = 2 \forall n$  atau jika  $j = 3$  untuk  $n$  ganjil,  $m_j(P_2, Hg_n) = n$  jika  $j = 3$  untuk  $n$  genap,  $m_j(P_2, Hg_n) = \left\lceil \frac{2n}{(j-1)} \right\rceil$  untuk yang lainnya,  $m_j(P_3, Hg_n) = \infty$  jika  $j = 2 \forall n$  atau jika  $j = 3$  untuk  $n$  ganjil,  $m_j(P_3, Hg_n) = n + 1$  jika  $j = 3$  untuk  $n$  genap,  $m_j(P_3, Hg_n) = \left\lceil \frac{2n+1}{(j-1)} \right\rceil$  jika  $4 \leq j \leq 2n \forall n$ , dan  $m_j(P_3, Hg_n) = 1$  untuk yang lainnya.

Kata Kunci : Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran, Graf Lintasan, Graf Jam Pasir.



## ABSTRACT

SYAMSUDDIN. **The Size Multipartite Ramsey Numbers for Path Graph versus Hourglass Graph** (supervised by Hasmawati and Nurdin).

Let  $j, a, b, c,$  and  $d$  be natural numbers with  $a, c \geq 2$  and  $j, b, d \geq 1$ . The size multipartite Ramsey numbers  $m_j(K_{axb}, K_{cxd})$  is the smallest natural number  $t$  such that, if all edges of the graph  $K_{jxt}$  are colored red and blue arbitrarily, then the graph  $K_{jxt}$  will contain the red  $K_{axb}$  or blue  $K_{cxd}$  subgraphs and is defined as infinite under other circumstances. For any graphs  $G$  and  $H$ , size multipartite Ramsey numbers two colors  $m_j(G, H)$  are the smallest natural numbers  $t$  such that, if all edges of a complete balanced multipartite graph  $K_{jxt}$  are colored with two colors, then  $K_{jxt}$  contains a subgraph whose edges are all the same color isomorphic with graph  $G$  or  $H$ . In this study, we will determine the values of size multipartite Ramsey numbers  $m_j(P_m, Hg_n)$  for  $j \geq 2, 2 \leq m \leq 3,$  dan  $n \geq 3$  with  $j, m, n \in \mathbb{N}$ . The results of this study show that the size multipartite Ramsey numbers for path graphs and hourglass graphs, namely  $m_j(P_2, Hg_n) = \infty$  if  $j = 2 \forall n$  or if  $j = 3$  for odd  $n,$   $m_j(P_2, Hg_n) = n$  if  $j = 3$  for even  $n,$   $m_j(P_2, Hg_n) = \left\lceil \frac{2n}{j-1} \right\rceil$  for others,  $m_j(P_3, Hg_n) = \infty$  if  $j = 2 \forall n$  or if  $j = 3$  for odd  $n,$   $m_j(P_3, Hg_n) = n + 1$  if  $j = 3$  for even  $n,$   $m_j(P_3, Hg_n) = \left\lceil \frac{2n+1}{j-1} \right\rceil$  if  $4 \leq j \leq 2n \forall n,$  and  $m_j(P_3, Hg_n) = 1$  for others.

Keywords : Size Multipartite Ramsey Numbers, Path Graph, Hourglass Graph.

## DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PENGANTAR .....	ii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS .....	iv
UCAPAN TERIMA KASIH .....	v
ABSTRAK .....	viii
ABSTRACT .....	ix
DAFTAR ISI .....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xii
BAB I PENDAHULUAN .....	14
1.1 Latar Belakang .....	14
1.2 Rumusan Masalah .....	17
1.3 Batasan Masalah .....	17
1.4 Tujuan Penelitian .....	17
1.5 Manfaat Penelitian .....	17
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	18
2.1 Konsep Dasar Graf .....	18
2.3 Subgraf dan Isomorfik .....	25
2.4 Jenis-Jenis Graf .....	28
2.5 Pewarnaan Pada Graf .....	34
2.6 Fungsi Khusus .....	37
2.7 Beberapa Teorema, Lemma, dan Sifat .....	38
2.8 Bilangan Ramsey Graf .....	41
2.9 Hasil Penelitian Terdahulu .....	44
BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....	46
3.1 Jenis Penelitian .....	46
3.2 Subjek dan Objek Penelitian .....	46
3.3 Tahapan Penelitian .....	47
3.4 Diagram Alir ( <i>Flowchart</i> ) .....	48

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....	49
4.1 Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran Untuk Graf Lintasan $P_2$ Versus Graf Jam Pasir $Hgn$ .....	49
4.2 Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran Untuk Graf Lintasan $P_3$ Versus Graf Jam Pasir $Hgn$ .....	59
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....	78
5.1 Kesimpulan .....	78
5.2 Saran .....	78
DAFTAR PUSTAKA.....	79

## DAFTAR GAMBAR

Nomor urut	Halaman
1. Representasi graf $G$ dan graf $H$ .....	19
2. Representasi graf $I$ dan graf $J$ .....	21
3. Representasi graf $\bar{I}$ .....	22
4. Representasi graf $G$ dan graf $H$ .....	22
5. Representasi graf $G \cup H$ .....	23
6. Representasi graf $G$ dan graf $H$ .....	23
7. Representasi graf $G + H$ .....	23
8. Representasi graf $H - a$ .....	24
9. Representasi graf $H_1$ dan graf $H_2$ .....	25
10. Representasi graf $G = H_1 \oplus H_2$ .....	25
11. Representasi graf $G'$ subgraf dari graf $G$ .....	26
12. Representasi graf $G$ isomorfik dengan graf $H$ .....	27
13. Representasi graf $P_2$ dan graf $P_4$ .....	28
14. Representasi graf $K_4, K_3, K_2$ , dan graf $K_1$ .....	29
15. Representasi graf $C_3$ dan graf $C_4$ .....	29
16. Representasi graf $S_5$ dan graf $S_6$ .....	30
17. Representasi graf $W_4$ dan graf $W_5$ .....	30
18. Representasi graf multipartit.....	31
19. Representasi <i>matching</i> $M$ pada graf $G$ .....	32
20. Representasi graf $Hg_{4,5}$ dan graf $Hg_6$ .....	33
21. Pewarnaan titik pada graf $W_4$ dan graf $W_5$ .....	34
22. Pewarnaan sisi pada graf $S_5$ dan graf $S_6$ .....	35
23. Pewarnaan sisi sebarang pada graf $K_4$ .....	36
24. Pewarnaan pada graf $K_{3 \times 4}$ .....	36
25. Subgraf $F_1$ merah dan $F_2$ biru .....	37
26. Representasi graf $G$ .....	39
27. <i>Flowchart</i> tahapan penelitian.....	48
28. Representasi Faktorisasi Graf $K_{2 \times 6}$ (a) $F_1$ (b) $F_2$ .....	54
29. Representasi Graf $K_{2 \times 6}$ .....	54
30. Representasi Faktorisasi Graf $K_{3 \times 3}$ (a) $F_1$ (b) $F_2$ .....	55

31. Representasi Faktorisasi Graf $K_{3 \times 4}$ (a) $F_1$ (b) $F_2$ .....	56
32. Representasi Faktorisasi Graf $K_{4 \times 3}$ (a) $F_1$ (b) $F_2$ .....	57
33. Representasi Faktorisasi Graf $K_{4 \times 2}$ (a) $F_1$ (b) $F_2$ .....	58
34. Representasi <i>matching</i> maksimum pada Graf $K_{3 \times 3}$ (a) $F_1$ (b) $F'_1$ .....	61
35. Representasi <i>matching</i> maksimum pada Graf $K_{4 \times 2}$ (a) $F_1$ (b) $F'_1$ .....	62
36. Representasi Faktorisasi Graf $K_{2 \times 7}$ (a) $F_1$ (b) $F_2$ .....	70
37. Representasi Faktorisasi Graf $K_{3 \times 4}$ (a) $F_1$ (b) $F_2$ .....	71
38. Representasi Faktorisasi Graf $K_{3 \times 5}$ (a) $F'_1$ (b) $F'_2$ .....	72
39. Representasi Faktorisasi Graf $K_{3 \times 5}$ (a) $F''_1$ (b) $F''_2$ .....	72
40. Representasi Faktorisasi Graf $K_{3 \times 5}$ (a) $F'''_1$ (b) $F'''_2$ .....	73
41. Representasi Faktorisasi Graf $K_{4 \times 3}$ (a) $F'_1$ (b) $F'_2$ .....	74
42. Representasi Faktorisasi Graf $K_{4 \times 3}$ (a) $F''_1$ (b) $F''_2$ .....	74
43. Representasi Faktorisasi Graf $K_{4 \times 3}$ (a) $F'''_1$ (b) $F'''_2$ .....	75

# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai latar belakang penelitian, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat penelitian.

### 1.1 Latar Belakang

Salah satu problem fundamental dalam logika matematika adalah mencari prosedur teratur untuk menentukan benar tidaknya (konsistensi) suatu formula logika yang diberikan. Pada tahun 1930, Ramsey mengemukakan suatu teori yang berkaitan dengan hal tersebut. Teori ini dikenal dengan teori Ramsey. Teori Ramsey mempunyai banyak penerapan diantaranya pada bidang matematika, teori informasi, komputasi, dan ilmu ekonomi. Teori graf merupakan salah satu objek studi subdisiplin kombinatorial dalam teori Ramsey. Selain pada teori graf, teori Ramsey juga tumbuh dan berkembang pada beberapa subdisiplin ilmu matematika, diantaranya ialah teori bilangan, aljabar, geometri, topologi, analisis harmonik, ruang metrik, dan teori ergodik (Rosta, 2004). Kemudian pada tahun 1935, Erdős dan Szekeres mengaplikasikan teori Ramsey ke dalam teori graf yang menghasilkan teorema Ramsey untuk graf lengkap (Hasmawati, 2007). Bilangan Ramsey yang diperoleh untuk graf lengkap disebut dengan bilangan Ramsey klasik.

Bilangan Ramsey klasik  $R(m, n)$  adalah bilangan bulat terkecil  $p$  dengan sifat, jika semua sisi graf lengkap  $K_p$  diberi dua pewarnaan katakanlah merah dan biru secara sebarang, maka graf  $K_p$  akan memuat subgraf  $K_m$  dengan warna merah atau subgraf  $K_n$  dengan warna biru. Penentuan bilangan Ramsey klasik telah memperoleh banyak perhatian. Namun meskipun demikian, hasilnya masih jauh dari yang diharapkan. Hingga tahun 2021, hanya sembilan bilangan Ramsey klasik yang telah diketahui (Sy & Baskoro, 2021). Greenwood dkk. (1955) menemukan empat bilangan Ramsey yakni  $R(3,3) = 6$ ,  $R(3,4) = 9$ ,  $R(3,5) = 14$ , dan  $R(4,4) = 18$ . Kery (1964) menunjukkan  $R(3,6) = 18$ , Kalbfleisch (1965) mendapatkan  $R(3,7) = 23$ , dan Grinstead dkk. (1982) menemukan bilangan Ramsey  $R(3,8) = 28$  dan  $R(3,9) = 36$ . Bilangan Ramsey klasik terbaru adalah

$R(4,5) = 25$ . Bilangan Ramsey ini ditemukan oleh McKay dan Radziszowski (1995) dengan menggunakan bantuan komputer. Beberapa peneliti kemudian memperumum konsep bilangan Ramsey klasik menjadi konsep bilangan Ramsey graf sebarang.

Teorema Ramsey untuk graf sebarang dijabarkan sebagai berikut, diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ . Tentukan bilangan bulat positif terkecil  $N$  sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap  $K_N$  akan memuat subgraf dengan sisi berwarna merah yang isomorfik dengan graf  $G$  atau memuat subgraf dengan sisi berwarna biru yang isomorfik dengan graf  $H$  (Sy & Baskoro, 2021). Selanjutnya, studi bilangan Ramsey graf ini berkembang pesat menjadi suatu bidang tersendiri dalam Teori Ramsey.

Burger dan Vuuren pada tahun 2004 mengkaji dua konsep bilangan Ramsey dalam dua *paper* yang berbeda, yaitu bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(G, H)$  dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran  $m_j(G, H)$ . Ide dari kajian bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(G, H)$  adalah dengan memberikan jumlah titik yang tetap dari setiap himpunan partit dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum himpunan partit sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik (Burger & Vuuren, 2004). Sedangkan, ide dari kajian bilangan Ramsey multipartit-ukuran  $m_j(G, H)$  adalah dengan memberikan jumlah himpunan partit yang tetap dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum titik dari himpunan-himpunan partit tersebut sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik (Burger & Vuuren, 2004).

Kajian mengenai bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kasus  $j = 2$  sebenarnya telah diperkenalkan oleh peneliti terdahulu. Pada tahun 1956, Erdos dan Rado telah menjamin eksistensi semua bilangan Ramsey  $m_j(G_1, G_2, \dots, G_k)$  untuk  $j = 2$ . Kajian mengenai bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kasus  $k = 2$  semakin lama semakin berkembang pada beberapa jenis graf. Gyarfás dan Lehel pada tahun 1973 serta Faudree dan Schelp pada tahun 1975 menemukan bilangan Ramsey bipartit ukuran  $m_2(P_s, P_t)$ . Hattingh dan Henning pada tahun 1998 menemukan nilai eksak  $m_2(P_m, S_n)$ . Pada tahun 2002, Longani menemukan nilai eksak  $m_2(G, G)$  dimana  $\cong S_n, K_{2 \times 2}$  atau  $K_{2,3}$ . Adapapun untuk kasus  $j \geq 2$ , mulai

menjadi pusat perhatian setelah Burger dan Vuuren mengkaji dua konsep bilangan Ramsey multipartit. Pada tahun 2005 Syafrizal Sy telah membuktikan  $m_j(P_s, P_n) = \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$  dengan  $j \geq 2, n \geq 6, s = 2$  atau  $3$  dan  $m_j(P_s, C_n) = \begin{cases} \infty, & j = 2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \lfloor \frac{n}{j} \rfloor, & \text{untuk yang lain,} \end{cases}$  dengan  $s = 2$  atau  $3$ . Pada tahun 2007 Syafrizal dkk. menemukan nilai eksak dari  $m_j(P_s, G)$  dimana  $G$  adalah *wheel, star, fan, atau windmill* untuk suatu  $j \geq 3$  dan  $s = 2$  atau  $3$ . Pada tahun 2013 Syafrizal Sy telah memperoleh bilangan Ramsey bipartit untuk kombinasi dari sembarang *path*  $P_n$  dan *tree*  $T_s$  untuk bilangan bulat positif  $n, s \geq 2$ . Pada tahun 2015 Lusiani, dkk. menentukan  $m_j(S_m, C_n)$  untuk  $j, m, n \geq 3$ . Jayawardene pada tahun 2016 telah memperoleh nilai eksak bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan berorde tiga terhadap graf buku  $m_j(P_3, B_n)$  untuk  $j \geq 3$ . Kemudian pada tahun 2021 Syafrizal Sy dan Edy Tri Baskoro memperoleh bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi graf *star*  $S_m$  dengan  $m \geq 4$  dan *cycle*  $C_n$  dengan  $n \geq 5$ .

Salah satu jenis graf yang diperoleh dengan operasi graf jumlah adalah graf jam pasir. Graf jam pasir merupakan graf jumlah antara graf lengkap  $K_1$  dengan gabungan dua graf siklus. Dalam uraian sebelumnya dapat dilihat bahwa bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi graf lintasan dengan beberapa jenis graf khusus telah diperoleh. Namun untuk kombinasi graf lintasan dengan graf jam pasir belum diteliti. Oleh sebab itu, penulis tertarik untuk mengkaji bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan versus graf jam pasir. Selanjutnya penelitian tersebut akan ditulis dalam bentuk tesis yang berjudul :

**“Penentuan Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran Untuk Graf Lintasan Versus Graf Jam Pasir”**



## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan ( $P_2$ ) versus graf jam pasir ( $Hg_n$ ).
2. Menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan ( $P_3$ ) versus graf jam pasir ( $Hg_n$ ).

## 1.3 Batasan Masalah

Dalam tesis ini penulis membatasi masalah pada penentuan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan ( $P_m$ ) versus graf jam pasir ( $Hg_n$ ), yaitu  $m_j(P_m, Hg_n)$  dengan  $j \geq 2, 2 \leq m \leq 3$ , dan  $n \geq 3$  dengan  $j, m, n \in \mathbb{N}$ .

## 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan ( $P_m$ ) versus graf jam pasir ( $Hg_n$ ) yang dinotasikan dengan  $m_j(P_m, Hg_n)$  dengan  $j \geq 2, 2 \leq m \leq 3$ , dan  $n \geq 3$  dengan  $j, m, n \in \mathbb{N}$ .

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menambah wawasan keilmuan penulis dalam menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk dua buah graf.
2. Penelitian ini sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu pengetahuan terkhusus pada cabang ilmu teori graf, sehingga kedepannya dapat digunakan sebagai rujukan oleh peneliti lain dalam menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk dua buah graf yang diberikan.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan disajikan teori pendukung yang relevan dengan penelitian. Selain itu akan disajikan pula hasil survey literatur mengenai hasil-hasil yang telah diperoleh oleh para peneliti sebelumnya yang terkait dengan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan  $P_m$  versus graf jam pasir  $Hg_n$ .

#### 2.1 Konsep Dasar Graf

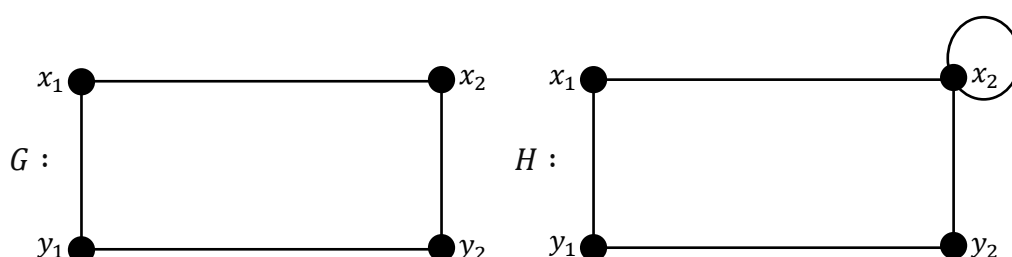
Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa hal mendasar yang berkaitan dengan graf diantaranya definisi, terminologi, dan notasi-notasi dalam graf yang akan digunakan pada pembahasan selanjutnya. Definisi graf secara formal diberikan pada Definisi 2.1.1.

**Definisi 2.1.1** Suatu graf  $G$  adalah himpunan tak-kosong berhingga  $V(G)$  dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan (mungkin kosong)  $E(G)$  dari himpunan bagian 2-elemen dari  $V(G)$  yang disebut sisi (*edge*) (Sy & Baskoro, 2021).

Himpunan  $V(G)$  disebut himpunan titik dari  $G$  dan Himpunan  $E(G)$  disebut himpunan sisi dari  $G$ . Misalkan  $e \in E(G)$  dan  $x, y \in V(G)$  maka suatu sisi  $e$  di  $E(G)$  yang merupakan himpunan bagian 2-elemen dari  $V(G)$  dengan titik ujung  $x$  dan  $y$  dapat dinyatakan dengan  $e = \{x, y\}$ . Selanjutnya dalam tesis ini, sisi  $e = \{x, y\}$  hanya akan ditulis  $e = xy$ . Jumlah titik dari suatu graf  $G$  disebut orde (*order*) dan jumlah sisi dari suatu graf  $G$  disebut ukuran (*size*). Orde dari  $G$  adalah  $|V(G)|$  dan ukuran dari  $G$  adalah  $|E(G)|$ . Graf yang ukurannya nol disebut dengan graf nol atau graf kosong (*null graph*). Sisi yang titik ujungnya sama disebut sebagai lup (*loop*). Graf yang tidak mengandung *loop* disebut graf sederhana (*simple graph*) dan graf yang mengandung lup disebut graf palsu (*pseudograph*). Definisi graf sederhana secara formal diberikan pada Definisi 2.1.2

**Definisi 2.1.2** Graf  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$  dimana  $V(G)$  adalah himpunan berhingga yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan  $E(G)$  adalah himpunan pasangan-pasangan tak berurut dari elemen-elemen  $V(G)$  yang berbeda, yang disebut sisi (*edge*) (Hasmawati, 2015).

Untuk lebih memahami perbedaan graf sederhana dan graf palsu, perhatikan contoh berikut. Misalkan diberikan graf  $G$  dan  $H$  dengan  $V(G) = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ ,  $E(G) = \{x_1y_1, y_1y_2, x_2y_2, x_1x_2\}$ ,  $V(H) = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ , dan  $E(H) = \{x_1y_1, y_1y_2, x_2y_2, x_1x_2, x_2x_2\}$ . Representasi dari graf  $G$  dan graf  $H$  diberikan pada gambar berikut.



**Gambar 1.** Representasi graf  $G$  dan graf  $H$

Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa pada graf  $G$  tidak terdapat lup, maka  $G$  merupakan graf sederhana. Sedangkan pada graf  $H$  terdapat sebuah lup yaitu sisi  $x_2x_2$ , maka  $H$  merupakan graf palsu. Graf  $G$  diebut graf berode 4 karena  $|V(G)| = 4$  dan berukuran 4 karena  $|E(G)| = 4$ . Sedangkan graf  $H$  diebut graf berode 4 karena  $|V(H)| = 4$  dan berukuran 5 karena  $|E(H)| = 5$ . Graf yang hanya memiliki 1 titik dan tidak memiliki sisi disebut graf trivial (*trivial graph*).

Selain definisi graf yang diberikan pada Definisi 2.1.1 dan Definisi 2.1.2, di dalam teori graf juga terdapat terminologi untuk mempermudah penjelasan mengenai graf. Berikut ini disajikan beberapa terminologi dalam teori graf yang akan digunakan pada penelitian ini.

**Definisi 2.1.3** Jika  $e = uv$  adalah sisi dari suatu graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  dikatakan titik-titik bertetangga (*adjacent vertex*), dan  $e$  dikatakan terkait (*incident*) dengan titik  $u$  dan  $v$ . Lebih jauh, jika  $e_1$  dan  $e_2$  adalah dua sisi berbeda di  $G$  yang terkait

dengan sebuah titik yang sama, maka  $e_1$  dan  $e_2$  disebut sisi-sisi bertetangga (*adjacent edges*) (Chartrand & Lesniak, 1996).

**Definisi 2.1.4** Misalkan  $G = (V, E)$  adalah graf dan  $x \in V(G)$ . Derajat suatu titik  $x$  adalah banyaknya sisi dari graf  $G$  yang terkait dengan titik  $x$ . Derajat titik  $x$  pada graf  $G$  dinotasikan dengan  $deg(x)$ . Derajat terkecil dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $\delta(G)$  sedangkan derajat terbesar dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $\Delta(G)$  (Chartrand & Lesniak, 1996).

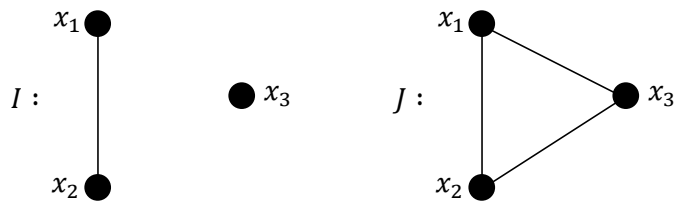
**Definisi 2.1.5** Suatu titik  $x$  dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan titik  $y$  jika  $xy \in E(G)$ . Untuk suatu titik  $x$  dari  $G$ , lingkungan (*neighborhood*) dari  $x$  adalah suatu himpunan yang didefinisikan  $N(x) = \{y \in V(G) | xy \in E(G)\}$  dan  $N[x] = N(x) \cup \{x\}$  (Sy & Baskoro, 2021).

**Definisi 2.1.6** Sebuah *walk* (jalan) pada sebuah graf  $G$  adalah rangkaian  $W = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$  dari titik sedemikian sehingga  $v_i v_{i+1}$  adalah sisi pada graf  $G$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$  (Benjamin, Chartrand, & Ping, 2015).

**Definisi 2.1.7** *Trail* (Jalur) adalah jalan yang tidak memiliki sisi berulang. Jalan atau jalur yang mempunyai titik awal  $u$  dan titik akhir  $v$  masing-masing dapat ditulis  $u, v - walk$  atau  $u, v - trail$ . Banyaknya sisi yang terdapat pada sebuah jalan atau jalur merupakan panjang dari jalan atau jalur tersebut (B. West, 2002).

**Definisi 2.1.8** Suatu *path* (lintasan) adalah suatu jalan yang mana tidak ada titik yang berulang. Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah dua titik di graf  $G$ . Dikatakan  $u$  joined ke  $v$  jika  $G$  memuat *path*  $u - v$ . Graf  $G$  dikatakan terhubung (*connected*) jika  $u$  terhubung ke  $v$  untuk setiap pasang titik  $(u, v)$  di  $G$  (Sy & Baskoro, 2021).

Untuk lebih memahami beberapa definisi di atas, perhatikan contoh berikut. Misal diberikan graf  $I$  dan  $J$  dengan  $V(I) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $E(I) = \{x_1x_2\}$ ,  $V(J) = \{x_1, x_2, x_3\}$ , dan  $E(J) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$ . Representasi dari graf  $I$  dan  $J$  diberikan pada gambar berikut.



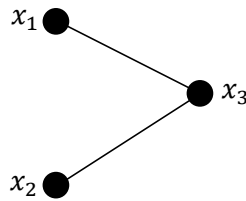
**Gambar 2.** Representasi graf  $I$  dan graf  $J$

Pada graf  $I$  titik  $x_1$  dan  $x_2$  merupakan titik-titik bertetangga dan sisi  $x_1x_2$  dikatakan terkait pada titik  $x_1$  dan titik  $x_2$ . Sisi  $x_1x_2$  dan  $x_2x_3$  pada graf  $J$  merupakan sisi-sisi bertetangga karena terkait pada sebuah titik yang sama, yaitu titik  $x_2$ . Derajat titik-titik pada graf  $I$  adalah  $\deg(x_1) = 1$ ,  $\deg(x_2) = 1$ , dan  $\deg(x_3) = 0$ , maka  $\delta(I) = 0$  dan  $\Delta(I) = 1$ . Adapun derajat titik-titik pada graf  $J$  adalah  $\deg(x_1) = 2$ ,  $\deg(x_2) = 2$ , dan  $\deg(x_3) = 2$ , maka  $\delta(J) = 2$  dan  $\Delta(J) = 2$ .

Graf yang derajat terkecilnya sama dengan derajat terbesarnya disebut graf reguler. Misal diberikan graf  $G$  dengan  $\delta(G) = \Delta(G) = r$  maka graf  $G$  disebut graf reguler berderajat  $r$  atau biasa ditulis  $r$  – reguler. Maka pada contoh diatas, graf  $J$  merupakan graf 2-reguler. Lingkungan dari titik  $x_1$  pada graf  $J$  adalah  $N(x_1) = \{x_2, x_3\}$  dan  $N[x_1] = \{x_1, x_2, x_3\}$ .  $N(x_1)$  disebut lingkungan terbuka dari  $x_1$  dan  $N[x_1]$  disebut lingkungan tertutup dari  $x_1$ . Selanjutnya  $\{x_1, x_2, x_3, x_1\}$  merupakan jalan sekaligus jalur pada graf  $J$ , tapi tidak termasuk lintasan karena ada titik yang berulang, yaitu titik  $x_1$ . Pada graf  $J$  setiap titik terhubung ke titik lainnya maka graf  $J$  merupakan graf terhubung. Sedangkan graf  $I$  merupakan graf tak terhubung karena tidak ditemukan lintasan yang menghubungkan titik  $x_3$  ke titik lainnya.

**Definisi 2.1.9** Graf  $F$  disebut komplement dari graf  $G$ , jika  $V(F) = V(G)$  dan  $uv \in E(F)$  jika dan hanya jika  $uv \notin E(G)$ . Komplement dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $\bar{G}$  (Hasmawati, 2015).

Sebagai contoh, perhatikan graf  $I$  pada Gambar 2 Komplement dari graf  $I$  adalah graf  $\bar{I}$  dengan  $V(\bar{I}) = \{x_1, x_2, x_3\}$  dan  $E(\bar{I}) = \{x_1x_3, x_2x_3\}$ . Representasi dari graf  $\bar{I}$  diberikan pada gambar berikut.



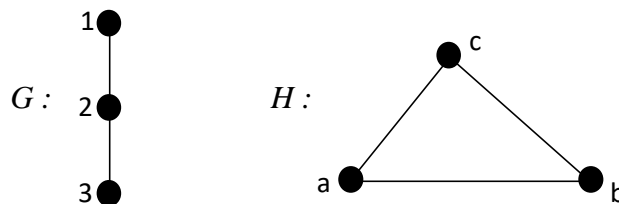
**Gambar 3.** Representasi graf  $\bar{I}$

## 2.2 Operasi Pada Graf

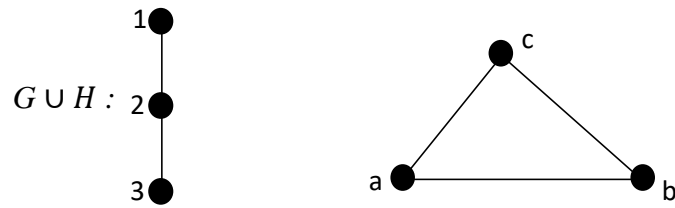
Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa operasi pada graf yang akan digunakan dalam penelitian ini. Diantaranya adalah penggabungan, penjumlahan, pengurangan, dan dekomposisi pada graf.

**Definisi 2.2.1** Graf gabung (*union graph*) antara  $G$  dan  $H$  ditulis  $G \cup H$ , adalah graf dengan himpunan titik  $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$  dan himpunan sisi  $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ . Jika  $G = H$  maka bisa ditulis  $G \cup H = G \cup G = 2G$  (Hasmawati, 2023).

Sebagai contoh, misalkan graf  $G$  adalah graf dengan  $V(G) = \{1,2,3\}$  dan  $E(G) = \{12,23\}$ , serta  $H$  adalah graf dengan  $V(H) = \{a,b,c\}$  dan  $E(H) = \{ab,bc,ca\}$ . Maka graf gabung  $G \cup H$  mempunyai himpunan titik  $V(G \cup H) = \{1,2,3,a,b,c\}$  dan himpunan sisi  $E(G \cup H) = \{12,23,ab,bc,ca\}$ . Representasi dari graf  $G$ ,  $H$ , dan  $G \cup H$  dapat dilihat pada gambar berikut.



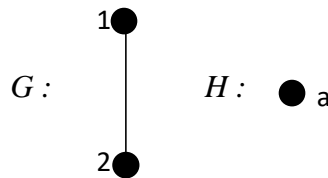
**Gambar 4.** Representasi graf  $G$  dan graf  $H$



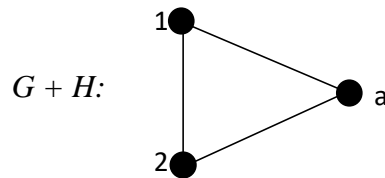
**Gambar 5.** Representasi graf  $G \cup H$

**Definisi 2.2.2** Graf jumlah antara  $G$  dan  $H$  ditulis  $G + H$ , adalah graf dengan himpunan titik  $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  dan himpunan sisi  $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G) \text{ dan } v \in V(H)\}$  (Hasmawati, 2023).

Sebagai contoh, misalkan graf  $G$  adalah graf dengan  $V(G) = \{1,2\}$  dan  $E(G) = \{12\}$ , serta  $H$  adalah graf dengan  $V(H) = \{a\}$  dan  $E(H) = \emptyset$ . Maka graf tambah  $G + H$  mempunyai himpunan titik  $V(G + H) = \{1,2,a\}$  dan himpunan sisi  $E(G + H) = \{12,1a,2a\}$ . Representasi dari graf  $G$ ,  $H$ , dan  $G \cup H$  dapat dilihat pada gambar berikut.



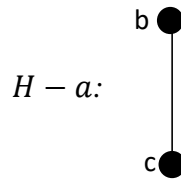
**Gambar 6.** Representasi graf  $G$  dan graf  $H$



**Gambar 7.** Representasi graf  $G + H$

**Definisi 2.2.3** Misal  $G$  adalah sebuah graf dan  $v \in V(G)$  serta  $e \in E(G)$ . Graf  $G - v$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(G - v) = V(G) \setminus \{v\}$  dan himpunan sisi  $E(G - v) = E(G) \setminus \{xv | x \in V(G)\}$ . Graf  $G - e$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(G - e) = V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$  (Hasmawati, 2023).

Sebagai contoh, perhatikan graf  $H$  pada Gambar 4  $V(H) = \{a, b, c\}$  dan  $E(H) = \{ab, bc, ac\}$ . Graf  $H - a$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(H - a) = V(H) \setminus \{a\} = \{b, c\}$  dan himpunan sisi  $E(H - a) = E(H) \setminus \{xa | x \in V(H)\} = E(H) \setminus \{ab, ac\} = \{bc\}$ . Representasi dari graf  $H - a$  dapat dilihat pada gambar berikut.



**Gambar 8.** Representasi graf  $H - a$

Dengan memperumum definisi operasi graf kurang pada Definisi 2.2.3, maka diperoleh Definisi 2.2.4 berikut.

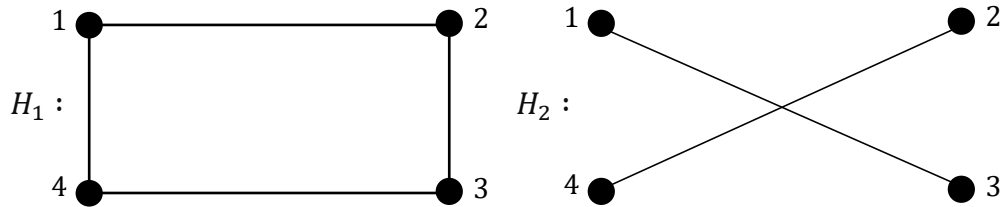
**Definisi 2.2.4** Misal  $G$  adalah sebuah graf dan  $V_1 \subseteq V(G)$  serta  $E_1 \subseteq E(G)$ . Graf  $G \setminus V_1$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(G \setminus V_1) = V(G) \setminus V_1$  dan himpunan sisi  $E(G \setminus V_1) = E(G) \setminus \{xv | x \in V(G), v \in V_1\}$ . Graf  $G \setminus E_1$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(G \setminus E_1) = V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G \setminus E_1) = E(G) \setminus E_1$ .

**Definisi 2.2.5** Misalkan  $H_i$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$  adalah subgraf dari graf  $G$ . Dekomposisi graf  $G$  ditulis  $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$  adalah himpunan  $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  sedemikian sehingga  $V(H_i) = V(H_j) = V(G)$ ,  $E(H_i) \neq \emptyset$ ,  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ , untuk setiap  $i, j$  dan  $\bigcup_{i=1}^k E(H_i) = E(G)$ . Selanjutnya  $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$  disebut sebagai faktorisasi dari  $G$  (Hasmawati, 2023).

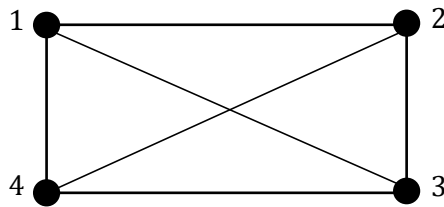
Sebagai contoh, misal diberikan graf  $H_1$  dan  $H_2$  dengan  $V(H_1) = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V(H_2) = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $E(H_1) = \{12, 23, 34, 14\}$ , dan  $E(H_2) = \{13, 24\}$ . Dapat diperiksa



bahwa  $V(H_1) = V(H_2)$ ,  $E(H_1) \neq \emptyset$ ,  $E(H_2) \neq \emptyset$ , dan  $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$ , maka dapat dilakukan dekomposisi antara  $H_1$  dan  $H_2$  yang dinotasikan  $G = H_1 \oplus H_2$ . Representasi dari graf  $H_1$ ,  $H_2$ , dan  $G = H_1 \oplus H_2$  dapat dilihat pada gambar berikut.



**Gambar 9.** Representasi graf  $H_1$  dan graf  $H_2$



**Gambar 10.** Representasi graf  $G = H_1 \oplus H_2$

### 2.3 Subgraf dan Isomorfik

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai konsep subgraf dan sifat isomorfik dalam teori graf. Definisi subgraf dan isomorfik secara formal diberikan pada definisi 2.3.1 dan definisi 2.3.3.

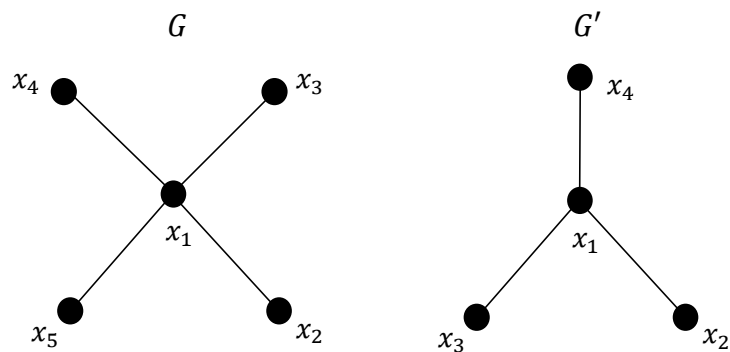
**Definisi 2.3.1** Misalkan  $G = (V, E)$  merupakan suatu graf. Graf  $G' = (V', E')$  disebut subgraf dari  $G$  jika  $V' \subseteq V$  dan  $E' \subseteq E$ . Setiap subgraf dari  $G$  dapat diperoleh dengan menghapus titik-titik atau sisi-sisi yang ada di  $G$  (Rosen K. , 2003).

Berdasarkan definisi 2.3.1 dapat dipahami bahwa graf  $G' = (V', E')$  dikatakan subgraf dari graf  $G = (V, E)$  jika himpunan titik dan sisi dari graf  $G'$  termuat di dalam himpunan titik dan sisi dari graf  $G$  atau secara matematis dapat

dituliskan  $V' \subseteq V$  dan  $E' \subseteq E$ . Dalam konsep subgraf juga dikenal istilah subgraf sejati. Secara formal, definisi subgraf sejati diberikan pada definisi berikut.

**Definisi 2.3.2** Sebuah subgraf dari graf  $G = (V, E)$  adalah graf  $H = (W, F)$  dimana  $W \subseteq V$  dan  $F \subseteq E$ . Subgraf  $H$  dikatakan subgraf sejati dari  $G$  jika  $H \neq G$  (Rosen K. H., 2012).

Untuk lebih memahami konsep subgraf, perhatikan contoh berikut. Misal diberikan graf  $G$  dan graf  $G'$  dengan  $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $E(G) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$ ,  $V(G') = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , dan  $E(G') = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\}$ . Representasi dari graf  $G$  dan graf  $G'$  diberikan pada gambar berikut.



**Gambar 11.** Representasi graf  $G'$  subgraf dari graf  $G$

Pada contoh yang diberikan, dapat diperiksa bahwa  $V(G') \subset V(G)$  dan  $E(G') \subset E(G)$ . Dengan demikian graf  $G'$  merupakan subgraf dari graf  $G$ . Lebih lanjut, karena  $G' \neq G$ , maka graf  $G'$  disebut subgraf sejati dari graf  $G$ .

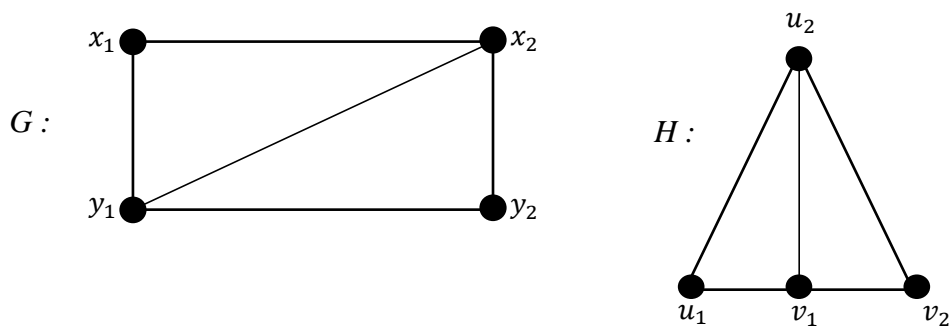
Misal  $G$  dan  $H$  graf terhubung serta  $H \subseteq G$ . Subgraf  $H$  disebut subgraf terhubung maksimal jika  $H$  bukan subgraf sejati pada sebarang subgraf terhubung di  $G$ . Subgraf  $H$  disebut komponen dari  $G$  jika  $H$  merupakan subgraf terhubung maksimal. Selanjutnya misalkan  $A \subseteq V(G)$  dan  $B \subseteq E(G)$ . Himpunan  $A$  disebut himpunan titik pemisah pada graf  $G$ , jika  $G - A$  graf tak terhubung. Himpunan  $B$  disebut himpunan sisi pemisah pada graf  $G$ , jika  $G - B$  graf tak terhubung. Misalkan  $A$  dan  $B$  berturut-turut merupakan himpunan titik pemisah dan himpunan sisi pemisah. Jika  $A = \{v\}$  dan  $B = \{e\}$ , maka  $v$  disebut titik potong (*cut vertex*) dan  $e$

disebut jembatan (*bridge*). Sebagai contoh, perhatikan graf  $G$  pada Gambar 11. Titik  $x_1$  merupakan titik potong pada graf  $G$  dan sisi  $x_1x_2$  merupakan salah satu contoh jembatan pada graf  $G$ .

Dalam teori graf juga dikenal istilah isomorfik. Definisi isomorfik diberikan pada definisi berikut (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016).

**Definisi 2.3.3** Dua graf  $G$  dan  $H$  adalah isomorfik, dinotasikan  $G \cong H$ , jika terdapat fungsi bijektif  $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$  sedemikian sehingga dua titik  $u$  dan  $v$  adalah bertetangga di  $G$  jika dan hanya jika  $\varphi(u)$  dan  $\varphi(v)$  bertetangga di  $H$ . Fungsi  $\varphi$  dinamakan isomorfisma dari  $G$  ke  $H$ . Jika  $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$  adalah isomorfisma maka fungsi invers  $\varphi^{-1}: V(H) \rightarrow V(G)$  adalah isomorfisma dari  $H$  ke  $G$ .

Sebagai contoh, misal diberikan graf  $G$  dan  $H$  dengan  $V(G) = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ ,  $E(G) = \{x_1x_2, x_1y_1, x_2y_1, x_2y_2, y_1y_2\}$ ,  $V(H) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ , dan  $E(H) = \{u_1u_2, u_1v_1, u_2v_1, u_2v_2, v_1v_2\}$ . Representasi dari graf  $G$  dan  $H$  diberikan pada gambar berikut.



**Gambar 12.** Representasi graf  $G$  isomorfik dengan graf  $H$

Graf  $G$  dan  $H$  merupakan dua contoh graf yang isomorfik karena terdapat fungsi  $f: V(G) \rightarrow V(H)$  dimana  $f(x_1) = u_1$ ,  $f(x_2) = u_2$ ,  $f(y_1) = v_1$ ,  $f(y_2) = v_2$ , sedemikian sehingga fungsi  $f$  mempertahankan ketetanggaan, yaitu :

$$\begin{aligned}
 y_1y_2 \in E(G) &\leftrightarrow f(y_1)f(y_2) = v_1v_2 \in E(H), \\
 x_1y_1 \in E(G) &\leftrightarrow f(x_1)f(y_1) = u_1v_1 \in E(H), \\
 y_2x_2 \in E(G) &\leftrightarrow f(y_2)f(x_2) = v_2u_2 \in E(H), \\
 x_1x_2 \in E(G) &\leftrightarrow f(x_1)f(x_2) = u_1u_2 \in E(H), \\
 y_1x_2 \in E(G) &\leftrightarrow f(y_1)f(x_2) = v_1u_2 \in E(H).
 \end{aligned}$$

## 2.4 Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam penelitian ini, diantaranya adalah graf lintasan, graf lengkap, graf siklus, graf bintang, graf roda, graf multipartit, *matching*, dan graf jam pasir.

**Definisi 2.4.1** Graf lintasan (*path*) dengan orde  $m$  dinotasikan dengan  $P_m$  adalah graf yang titik-titiknya dapat diurutkan dalam suatu barisan  $u_1, u_2, \dots, u_m$  sedemikian sehingga sisi-sisinya adalah  $u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{m-1}u_m$  (Chartrand & Zhang, 2005)

Gambar 13 berikut merepresentasikan dua contoh graf lintasan, yaitu  $P_2$  dan  $P_4$ .



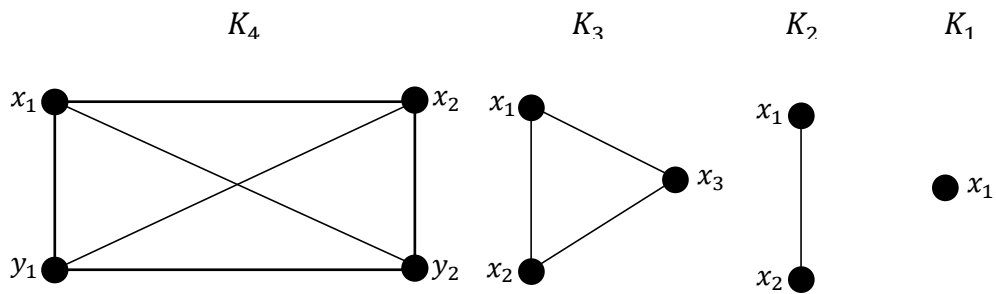
**Gambar 13.** Representasi graf  $P_2$  dan graf  $P_4$

Untuk memudahkan penulisan titik dan sisi, dalam penelitian ini akan didefinisikan himpunan titik dan sisi dari graf  $P_m$  dengan  $2 \leq m \leq 4$ . Himpunan titik dan sisi dari graf  $P_m$  masing-masing dinotasikan dengan  $V(P_m)$  dan  $E(P_m)$  yang didefinisikan sebagai berikut.

$$V(P_m) = \{u_i | 1 \leq i \leq m\},$$
$$E(P_m) = \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq m - 1\}.$$

**Definisi 2.4.2** Suatu graf  $G$  dikatakan graf lengkap (*complete graph*) berorde  $p$ , ditulis  $K_p$ , jika setiap dua titik (berbeda) bertetangga (Sy & Baskoro, 2021).

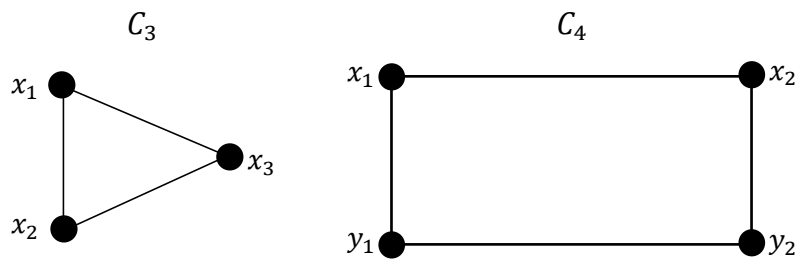
Gambar 14 berikut merepresentasikan empat contoh graf lengkap, yaitu  $K_4$ ,  $K_3$ ,  $K_2$ , dan  $K_1$ .



**Gambar 14.** Representasi graf  $K_4$ ,  $K_3$ ,  $K_2$ , dan graf  $K_1$

**Definisi 2.4.3** Misalkan  $W = e_1 e_2 \dots e_k$  ( $e_i = u_i u_{i+1}$ ) adalah jalan (*walk*).  $W$  disebut jalan tertutup jika  $u_1 = u_{k+1}$  dan disebut lintasan (*path*) jika  $u_i \neq u_j, \forall i \neq j$ .  $W$  disebut lingkaran (*cycle*), jika  $W$  tertutup dan  $u_i \neq u_j$  untuk  $i \neq j, \forall 1 \leq i, j < k + 1$  (Harju, 2007).

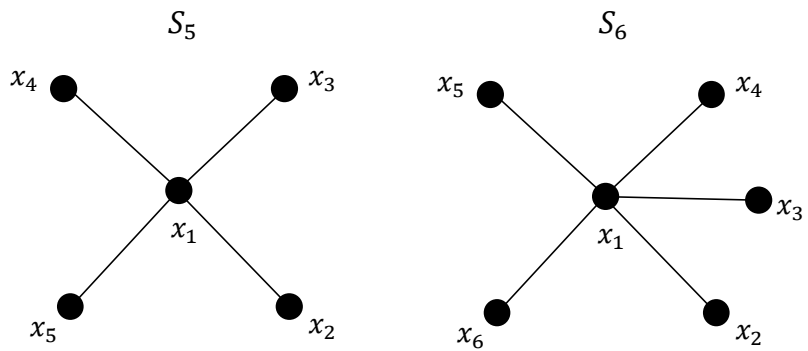
Gambar 15 berikut merepresentasikan dua contoh graf siklus, yaitu  $C_3$  dan  $C_4$ .



**Gambar 15.** Representasi graf  $C_3$  dan graf  $C_4$

**Definisi 2.4.4** Graf Bintang ( $S_n$ ) merupakan jenis graf berorde  $n$  dengan satu titik pusat berderajat  $n - 1$  dan titik lainnya berderajat satu (Hasmawati, 2023).

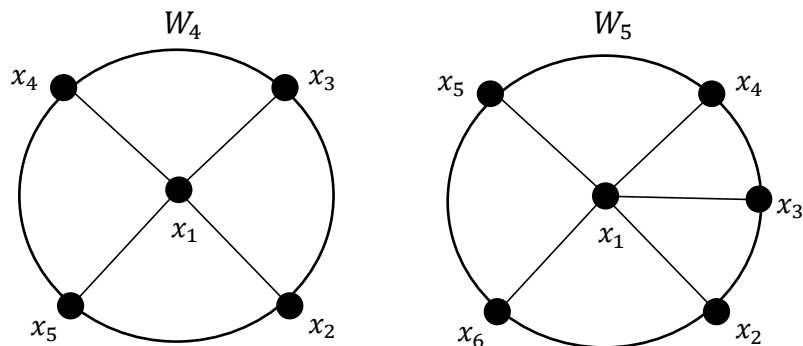
Gambar 16 berikut merepresentasikan dua contoh graf bintang, yaitu  $S_5$  dan  $S_6$ .



**Gambar 16.** Representasi graf  $S_5$  dan graf  $S_6$

**Definisi 2.4.5** Graf Roda ( $W_n$ ) merupakan jenis graf berorde  $n + 1$  yang dibentuk dari graf siklus  $C_n$  dengan menambahkan satu titik  $x$ , dengan  $x$  bertetangga dengan semua titik pada graf siklus (Hasmawati, 2023).

Gambar 17 berikut merepresentasikan dua contoh graf roda, yaitu  $W_4$  dan  $W_5$ .

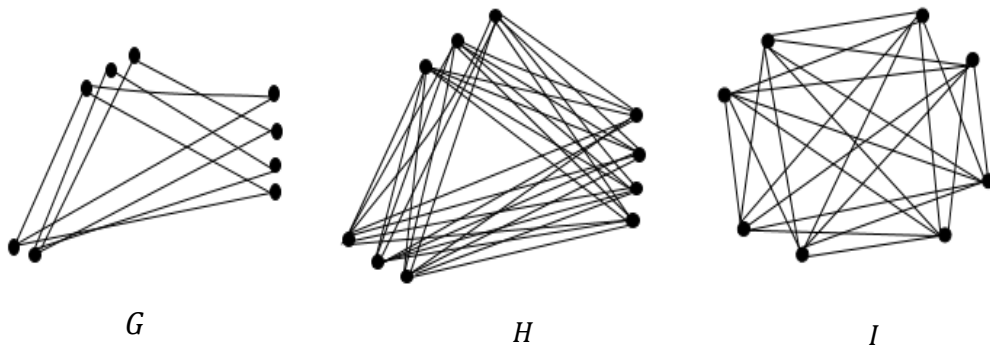


**Gambar 17.** Graf  $W_4$  dan graf  $W_5$

**Definisi 2.4.6** Graf  $G$  disebut graf  $j$ -partit jika himpunan titik  $V(G)$  dapat dipartisi menjadi  $j$  partisi, sebut  $V_1, V_2, \dots, V_j$ , sedemikian sehingga jika  $uv \in E(G)$  maka  $u$  dan  $v$  terletak pada partisi yang berbeda. Graf  $j$ -partit dinotasikan dengan  $B_{p_1, p_2, \dots, p_j}$  dengan  $|V_i| = p_i, 1 \leq i \leq j$ . Lebih lanjut, untuk kasus  $j = 2$ , maka graf  $G$

disebut graf bipartit. Untuk kasus  $j \geq 3$ , maka graf  $G$  disebut graf multipartit (Sy & Baskoro, 2021).

Pada Definisi 2.4.6, jika setiap titik di  $V_i$  bertetangga dengan setiap titik di  $V_j$  untuk  $i \neq j$  maka graf  $G$  disebut graf multipartit lengkap dinotasikan dengan  $K_{p_1, p_2, \dots, p_j}$  dengan  $|V_i| = p_i, 1 \leq i \leq j$ . , untuk kasus  $j = 2$  maka graf  $G$  disebut graf bipartit lengkap. Jika  $p_1 = p_2 = \dots = p_j = t$  maka graf  $G$  disebut graf multipartit seimbang lengkap dinotasikan dengan  $K_{j \times t}$ , yaitu graf multipartit lengkap dengan  $j$  partisi dan jumlah titik pada tiap partisi sebanyak  $t$ . Sebagai contoh, misal diberikan graf  $G, H$ , dan  $I$  dengan representasi seperti pada gambar berikut.



**Gambar 18.** Representasi graf multipartit

Pada Gambar 18, graf  $G$  merupakan graf multipartit  $B_{2,3,4}$ , graf  $H$  merupakan graf multipartit  $K_{3,3,4}$ , dan graf  $I$  merupakan graf multipartit  $K_{4 \times 2}$ .

Untuk memudahkan penulisan titik dan sisi, dalam penelitian ini akan didefinisikan himpunan titik dan sisi dari graf  $K_{j \times t}$  dengan  $j \geq 2$  dan  $t \geq 1$ . Himpunan titik dan sisi dari graf  $K_{j \times t}$  masing-masing dinotasikan dengan  $V(K_{j \times t})$  dan  $E(K_{j \times t})$  yang didefinisikan sebagai berikut.

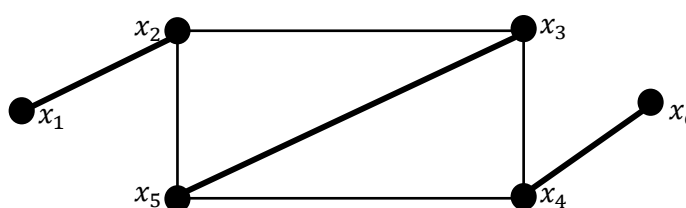
$$V(K_{j \times t}) = \{v_{kl} | 1 \leq k \leq j, 1 \leq l \leq t\},$$

$$V(K_{j \times t}) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_j \text{ dengan } V_k = \{v_{kl} | 1 \leq k \leq j, 1 \leq l \leq t\},$$

$$E(K_{j \times t}) = \{v_{il}v_{kl} | 1 \leq i < k \leq j, 1 \leq l \leq t\}.$$

**Definisi 2.4.7** Misalkan graf  $G = (V, E)$  adalah graf sederhana dan tak-trivial. Maka *matching*  $M$  didefinisikan sebagai himpunan bagian yang tidak kosong dari sisi  $E(G)$  sedemikian sehingga tidak ada dua sisi di subgraf  $M$  yang saling bertetangga di graf  $G$  (Sutedja, 2017).

Sebagai contoh, misal diberikan graf  $G$  dengan  $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  dan  $E(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_2x_5, x_3x_4, x_3x_5, x_4x_5, x_4x_6\}$ .  $M = \{x_1x_2, x_3x_5, x_4x_6\}$  merupakan salah satu *matching* yang dapat dibuat dari graf  $G$ . Representasi dari graf  $G$  dan *matching*  $M$  diberikan pada gambar berikut.



**Gambar 19.** Representasi *matching*  $M$  pada graf  $G$

Untuk suatu titik  $u \in V(G)$  dikatakan *saturated* oleh *matching*  $M$  jika terdapat sisi di *matching*  $M$  yang terkait pada titik tersebut. Sebaliknya, jika tidak ada sisi di *matching*  $M$  yang terkait pada  $u$  maka  $u$  *unsaturated* oleh *matching*  $M$ . *Matching*  $M$  dikatakan *matching* sempurna jika setiap titik di graf  $G$  *saturated* oleh *matching*  $M$ . Dengan demikian,  $M = \{x_1x_2, x_3x_5, x_4x_6\}$  merupakan *matching* sempurna karena setiap titik di graf  $G$  *saturated* oleh *matching*  $M$ .

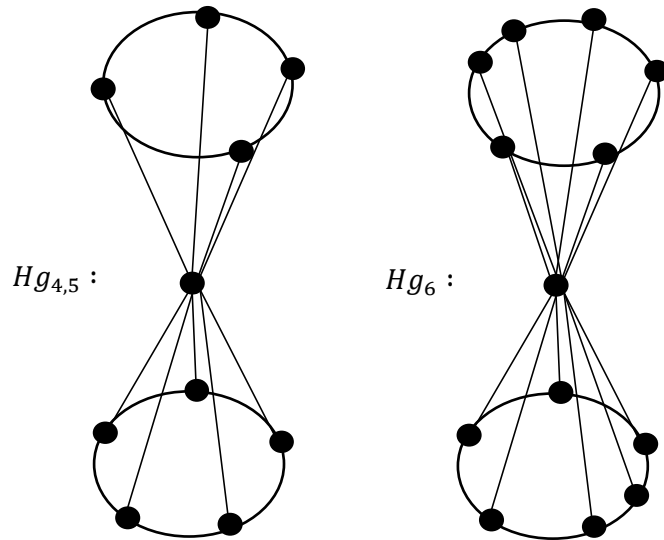
Dari sebuah graf  $G$ , bisa saja diperoleh lebih dari satu *matching*  $M$ . Suatu *matching*  $M$  disebut *matching* maksimum jika untuk setiap *matching* pada graf  $G$  tidak terdapat *matching*  $M'$  sedemikian sehingga  $|M'| > |M|$ . Oleh karena itu, setiap *matching* sempurna adalah *matching* maksimum. Namun sebaliknya, jika  $M$  adalah *matching* maksimum belum tentu  $M$  merupakan *matching* sempurna. Pada contoh di atas,  $M = \{x_1x_2, x_3x_5, x_4x_6\}$  merupakan *matching* maksimum.

**Definisi 2.4.8** Graf Jam Pasir ( $Hg_{n,r}$ ) adalah graf jumlah antara graf lengkap  $K_1$  dengan gabungan dua graf siklus dengan  $n$  titik pada satu siklus dan  $r$  titik pada



siklus lainnya. Jika  $n = r$  maka graf jam pasir  $Hg_{n,r}$  disebut graf jam pasir seimbang dan dinotasikan dengan  $Hg_n$ .

Gambar 20. berikut merepresentasikan dua contoh graf jam pasir, yaitu  $Hg_{4,5}$  dan  $Hg_6$ .



**Gambar 20.** Representasi graf  $Hg_{4,5}$  dan graf  $Hg_6$

Titik graf lengkap  $K_1$  pada graf jam pasir  $Hg_{n,r}$  selanjutnya disebut sebagai titik pusat. Titik pusat pada graf jam pasir juga merupakan titik potong. Titik pusat graf jam pasir  $Hg_{n,r}$  berderajat  $n + r$ ,  $n$  titik pada siklus  $C_n$  berderajat tiga, dan  $r$  titik pada siklus  $C_r$  berderajat tiga. Jika  $n = r$  maka graf jam pasir  $Hg_{n,r}$  disebut graf jam pasir seimbang dan dinotasikan dengan  $Hg_n$ . Graf jam pasir seimbang inilah yang akan menjadi salah satu objek dalam penelitian ini.

Untuk memudahkan penulisan titik dan sisi, dalam penelitian ini akan didefinisikan himpunan titik dan sisi dari graf  $Hg_n$  dengan  $n \geq 3$ . Himpunan titik dan sisi dari graf  $Hg_n$  masing-masing dinotasikan dengan  $V(Hg_n)$  dan  $(E(Hg_n))$  yang didefinisikan sebagai berikut.

$$V(Hg_n) = \{x, y_{ij} | 1 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq n - 1\},$$

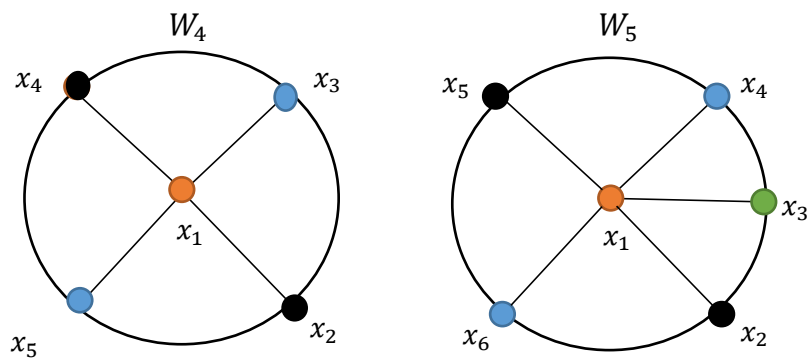
$$E(Hg_n) = \{xy_{ij}, y_{ij}y_{i(j+1) \bmod n} | 1 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq n - 1\}.$$

## 2.5 Pewarnaan Pada Graf

Di dalam teori graf terdapat sebuah konsep pewarnaan graf. Pada subbab ini akan dijelaskan tiga jenis pewarnaan pada graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan sisi sebarang.

**Definisi 2.5.1** Pewarnaan titik pada graf  $G$  merupakan pemberian warna pada himpunan titik  $V(G)$  dengan aturan setiap titik diberi hanya satu warna dan dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda (Munir, 2005).

Graf  $G$  dikatakan berwarna  $k$  apabila terdapat  $k$  warna dalam pewarnaan graf tersebut. Jumlah warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan titik pada graf  $G$  disebut bilangan kromatik dari graf  $G$  dan dinotasikan dengan  $\chi(G)$ . Sebagai contoh, perhatikan pewarnaan titik pada graf  $W_4$  dan  $W_5$  pada Gambar 21 berikut.

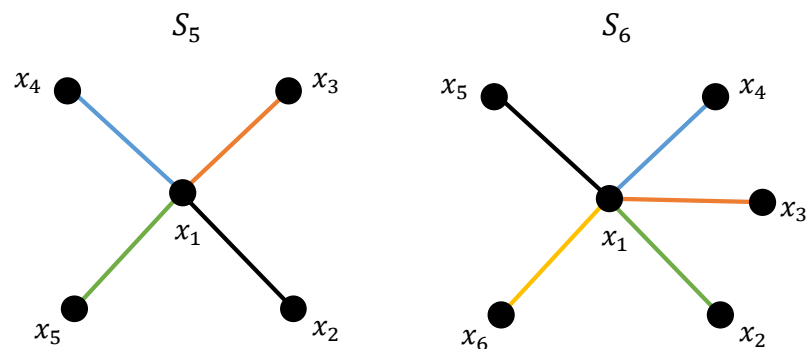


**Gambar 21.** Pewarnaan titik pada graf  $W_4$  dan graf  $W_5$

Pada Gambar 21 dapat dilihat bahwa graf  $W_4$  berwarna 3 dan graf  $W_5$  berwarna 4. Dapat diperiksa bahwa jumlah warna yang digunakan dalam pewarnaan titik yang diterapkan pada graf  $W_4$  dan graf  $W_5$  dalam kasus ini merupakan jumlah warna minimum. Sehingga diperoleh bilangan kromatik dari graf  $W_4$  dan  $W_5$ , yaitu  $\chi(W_4) = 3$  dan  $\chi(W_5) = 4$ .

**Definisi 2.5.2** Pewarnaan sisi pada graf  $G$  merupakan pemberian warna pada himpunan sisi  $E(G)$  dengan aturan setiap sisi diberi hanya satu warna dan dua sisi yang bertetangga diberi warna yang berbeda (Putri, 2017).

Metode pewarnaan sisi memiliki aturan yang sama dengan metode pewarnaan titik, yaitu dua sisi yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai sisi disebut bilangan kromatik sisi (*edge chromatic number*) dan dinotasikan dengan  $\chi_1(G)$ . Sebagai contoh, perhatikan pewarnaan sisi pada graf  $S_5$  dan  $S_6$  pada gambar berikut.

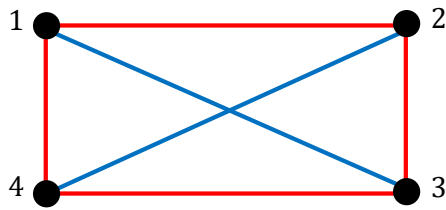


**Gambar 22.** Pewarnaan sisi pada graf  $S_5$  dan graf  $S_6$

Pada Gambar 22 dapat dilihat bahwa graf  $S_5$  berwarna 4 dan graf  $S_6$  berwarna 5. Dapat diperiksa bahwa jumlah warna yang digunakan dalam pewarnaan sisi yang diterapkan pada graf  $S_5$  dan graf  $S_6$  dalam kasus ini merupakan jumlah warna minimum. Sehingga diperoleh bilangan kromatik sisi dari graf  $S_5$  dan  $S_6$ , yaitu  $\chi_1(S_5) = 4$  dan  $\chi_1(S_6) = 5$ .

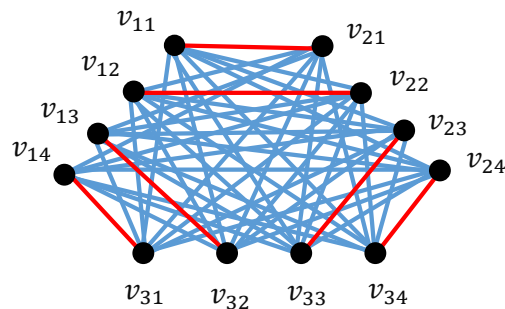
**Definisi 2.5.3** Pewarnaan sisi sebarang merupakan pewarnaan sebarang pada sisi suatu graf  $G$  dengan menggunakan dua warna sehingga graf  $G$  memuat subgraf tertentu yang semua sisinya berwarna sama (Ardi, 2010).

Subgraf yang semua sisinya berwarna sama disebut subgraf monokromatik. Jika subgraf tersebut merupakan suatu graf multipartit maka disebut juga sebagai subgraf multipartit monokromatik. Sebagai contoh, perhatikan pewarnaan sisi sebarang pada graf  $K_4$  berikut.



**Gambar 23.** Pewarnaan sisi sebarang pada graf  $K_4$

Pada Gambar 23 dapat dilihat bahwa graf  $K_4$  memuat subgraf  $C_4$  berwarna merah dan subgraf  $2P_2$  berwarna biru. Subgraf  $C_4$  merah dan subgraf  $2P_2$  biru disebut subgraf monokromatik. Dalam kajian bilangan Ramsey graf, graf lengkap  $K_4$  pada contoh diatas disebut sebagai graf domain. Adapun dalam kajian bilangan Ramsey multipartit, graf domain yang digunakan adalah graf multipartit seimbang lengkap yang dinotasikan dengan  $K_{j \times t}$  dengan  $j$  menyatakan jumlah partisi dan  $t$  menyatakan jumlah titik pada tiap partisi. Sebagai contoh, perhatikan pewarnaan sisi sebarang pada graf  $K_{3 \times 4}$  berikut.

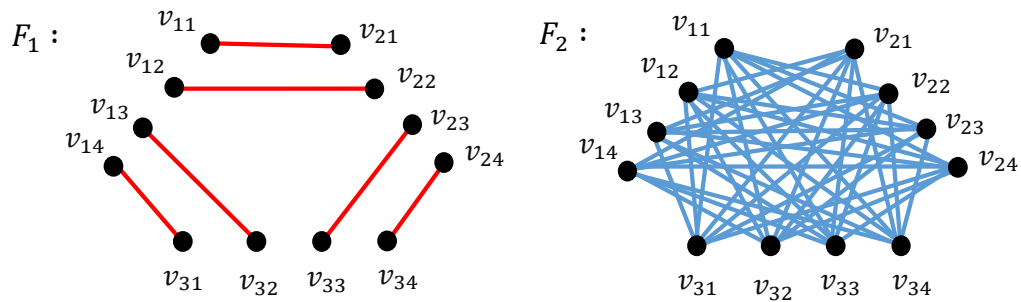


**Gambar 24.** Pewarnaan pada graf  $K_{3 \times 4}$

Pada Gambar 24 dapat dilihat bahwa graf  $K_{3 \times 4}$  memuat *matching* sempurna berwarna merah,  $C_4 = \{v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{24}, v_{11}\}$  berwarna biru,  $P_{12} = \{v_{11}, v_{22}, v_{31}, v_{12}, v_{21}, v_{32}, v_{14}, v_{23}, v_{34}, v_{13}, v_{24}, v_{33}\}$  berwarna biru, dan masih banyak subgraf lainnya.

Jenis pewarnaan yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah pewarnaan sisi sebarang. Pada penelitian ini, konsep pewarnaan juga akan dikombinasikan dengan konsep dekomposisi, yaitu yaitu mengasumsikan graf

domain  $K_{jxt} = F_1 \oplus F_2$  dengan  $F_1$  merupakan subgraf berwarna merah dan  $F_2$  merupakan subgraf berwarna biru. Sebagai contoh, perhatikan pewarnaan sisi sebarang pada graf  $K_{3x4}$  di atas. Misalkan  $K_{3x4} = F_1 \oplus F_2$  maka diperoleh subgraf  $F_1$  dan subgraf  $F_2$  yang direpresentasikan pada Gambar 25 berikut.



**Gambar 25.** Subgraf  $F_1$  merah dan  $F_2$  biru

Pada Gambar 25 dapat dilihat bahwa subgraf  $F_1$  memuat *matching* sempurna dan subgraf  $F_2$  memuat  $C_4 = \{v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{24}, v_{11}\}$ ,  $P_{12} = \{v_{11}, v_{22}, v_{31}, v_{12}, v_{21}, v_{32}, v_{14}, v_{23}, v_{34}, v_{13}, v_{24}, v_{33}\}$  dan masih banyak subgraf lainnya.

## 2.6 Fungsi Khusus

Pada subbab ini akan dibahas beberapa fungsi khusus yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu fungsi *floor*, *ceiling*, dan fungsi modulo. Definisi fungsi *floor*, *ceiling*, dan fungsi modulo diberikan pada Definisi 2.6.1 dan Definisi 2.6.2 (Imrona & Umbara, 2016).

**Definisi 2.6.1** Misalkan  $x$  adalah bilangan real. Fungsi floor dari  $x$  dinotasikan  $\lfloor x \rfloor$  menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan  $x$ . Fungsi ceiling dari  $x$  dinotasikan  $\lceil x \rceil$  menyatakan nilai bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan  $x$ .

Untuk lebih memahami Definisi 2.6.1, perhatikan contoh berikut.

$$x = 4,6 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 4 \text{ dan } \lceil x \rceil = 5$$

$$x = 2,3 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \text{ dan } \lceil x \rceil = 3$$

$$x = 5,5 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 5 \text{ dan } \lceil x \rceil = 6$$

$$x = 3 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 3 \text{ dan } \lceil x \rceil = 3$$

**Definisi 2.6.2** Misalkan  $a$  adalah sembarang bilangan bulat dan  $b$  adalah bilangan bulat positif. Fungsi modulo adalah fungsi dengan operator  $mod$  dimana  $a \bmod b$  memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila  $a$  dibagi dengan  $b$ . Jika  $a \bmod b = r$  maka terdapat bilangan bulat  $m$  sedemikian sehingga  $a = bm + r$ .

Untuk lebih memahami Definisi 2.6.2, perhatikan contoh berikut.

$$5 \bmod 4 = 1 \rightarrow 5 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$5 \bmod 3 = 2 \rightarrow 5 = 3 \cdot 1 + 2$$

$$10 \bmod 4 = 2 \rightarrow 10 = 4 \cdot 2 + 2$$

$$10 \bmod 3 = 1 \rightarrow 10 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$15 \bmod 3 = 0 \rightarrow 15 = 3 \cdot 5 + 0$$

## 2.7 Beberapa Teorema, Lemma, dan Sifat

Pada subbab ini akan disajikan beberapa teorema, lemma, dan sifat yang akan digunakan dalam penelitian ini.

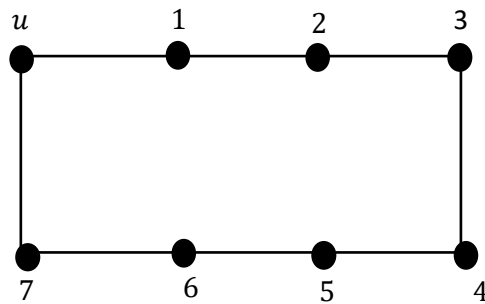
**Definisi 2.7.1** Sebuah graf  $G$  yang berorde  $n \geq 3$  disebut graf pansiklik (*pancyclic*) jika  $G$  memuat semua siklus dengan panjang dari 3 sampai  $n$  dan disebut graf pansiklik lemah (*weakly pancyclic*) jika  $G$  memuat siklus  $C_l$ , untuk  $g(G) \leq l \leq c(G)$  (Putri, 2017).

Dalam pengertian graf pansiklik terdapat istilah *girth* dan *circumference*. Panjang siklus terbesar pada suatu graf  $G$  disebut *circumference*, dinotasikan dengan  $c(G)$ . Sedangkan panjang siklus terkecil disebut *girth*, dinotasikan dengan  $g(G)$ .

**Teorema 2.7.2** Graf  $G$  adalah bipartit jika dan hanya jika setiap siklus pada  $G$  memiliki panjang genap (Hasmawati, 2015).

**Bukti.**

⇐ Misalkan  $G$  tidak memuat siklus dengan panjang ganjil. Asumsikan  $G$  terhubung. Misalkan  $u$  adalah sebarang titik di  $G$ , dan  $U$  adalah himpunan yang memuat titik-titik dengan panjang genap dari  $u$ . Misalkan pula  $W$  adalah himpunan yang memuat titik dengan panjang ganjil dari  $u$ . Dengan demikian  $\{U, W\}$  adalah koleksi partisi dari  $V(G)$  dengan  $U = \{u, 2, 4, 6\}$  dan  $W = \{1, 3, 5, 7\}$ . Representasi dari graf  $G$  dapat dilihat pada gambar berikut.



**Gambar 26.** Representasi graf  $G$

Kita klaim bahwa setiap sisi dari  $G$  mengaitkan suatu titik di  $U$  dan suatu titik di  $W$ . Andaikan itu tidak benar. Berarti terdapat satu sisi di  $G$  yang mengaitkan dua titik di  $U$  atau dua titik di  $W$ , sebut itu  $wx \in E(G)$  dengan  $w, x \in W$ . Karena  $d(u, w)$  dan  $d(u, x)$  duanya ganjil, maka dapat ditulis  $d(u, w) = 2s + 1$  dan  $d(u, x) = 2r + 1$  untuk suatu bilangan asli  $s, r$ . Labeli titik-titik dari  $u$  ke  $w$  dan dari  $u$  ke  $x$  sebagai berikut.

$u = v_0, v_1, \dots, v_{2s+1} = w$  dan  $u = x_0, x_1, \dots, x_{2r+1} = x$ . Dua lintasan tersebut tambah sisi  $wx$  memebentuk siklus  $C$ , dengan

$$C : u = v_0, v_1, \dots, v_{2s+1} = w, wx, x = x_{2r+1}, \dots, x_1, x_0 = u.$$

Siklus  $C$  mempunyai panjang  $2s + 1 + 2r + 1$  tambah satu sisi  $wx$ . Dengan kata lain panjang  $C$  adalah  $(2s + 1) + (2r + 1) + 1 = 2(s + r + 1) + 1$ . Nilai  $2(s + r + 1) + 1$  adalah ganjil. Jadi  $G$  memiliki siklus dengan panjang ganjil. Hal ini kontradiksi dengan  $G$  tidak memuat siklus ganjil. Jadi, tidak benar bahwa terdapat sisi di  $G$  yang mengaitkan dua titik pada partisi yang sama. Dengan kata lain, setiap

sisi dari  $G$  mengaitkan suatu titik di partisi yang satu dan suatu titik di partisi yang satunya. Menurut Definisi 2.4.6  $G$  adalah bipartit.

⇒ Misalkan  $G$  nontrivial dan bipartit. Akan ditunjukkan  $G$  tidak memuat siklus ganjil. Partisi himpunan  $V(G)$  ke dalam dua subhimpunan sebut  $U$  dan  $W$  sedemikian sehingga setiap sisi di  $G$  mengaitkan suatu titik di  $U$  dan suatu titik di  $W$ . Misalkan  $e_1 = u_1w_1, e_2 = u_2w_2, e_3 = u_3w_3$ , dan  $e_4 = u_4w_4$ . Jika titik tersebut berbeda semua maka  $G$  tidak memuat siklus. Jika masih ada sisi lain misal  $e$  di  $G$  maka  $e = u_iw_j, i, j = 1, 2, 3, 4$ , dan  $i \neq j$ , sebut  $i = 3$  dan  $j = 2$ . Dalam hal ini, terdapat lintasan  $P_4 = u_2, w_2, u_3, w_3$  dengan panjang tiga. Jika lintasan ini terletak pada suatu siklus  $C$ , maka  $C = E(P_4) + \{u_2w_3\}$  dengan panjang empat. Situasi lain akan selalu serupa. Karenanya dapat disimpulkan bahwa  $G$  tidak memuat siklus ganjil.

**Lemma 2.7.3** Misalkan  $G$  adalah graf berorde  $n$ . jika  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , maka  $G$  adalah pansiklik atau  $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$  untuk  $n$  genap (Putri, 2017).

**Lemma 2.7.4** Setiap graf non bipartit  $G$  berorde  $n$  dengan  $\delta(G) \geq \frac{n+2}{3}$  adalah pansiklik lemah dengan  $g(G) = 3$  atau 4 (Putri, 2017).

**Lemma 2.7.5** Misalkan  $G$  adalah graf berorde  $n \geq 3$  dan  $\delta(G) = \delta$ . Jika  $G$  merupakan graf terhubung-2, maka  $c(G) \geq \min\{2\delta, |G|\}$  (Putri, 2017).

Lemma 2.7.3 dikenal juga dengan lemma Bondy, Lemma 2.7.4 dikenal dengan lemma Brandt, dan Lemma 2.7.5 dikenal dengan lemma Dirac. Ketiga lemma tersebut merupakan lemma yang digunakan untuk menjamin keberadaan siklus. Salah satu contoh graf yang memuat subgraf siklus adalah graf jam pasir, maka untuk mengetahui keberadaan graf jam pasir dapat digunakan ketiga lemma tersebut.

**Definisi 2.7.6** Misalkan  $G(V, E)$  adalah graf sebarang dan  $k$  bilangan bulat non negatif. Graf  $G$  disebut terhubung- $k$  ( $k$ -connected) jika  $|G| > k$  dan  $G - X$  terhubung untuk setiap  $X \subseteq V$  dengan  $|X| < k$  (Putri, 2017).



Sebagai contoh graf siklus  $C_n$  merupakan graf terhubung-2 karena  $C_n \setminus v$  merupakan graf terhubung untuk setiap  $v$  dengan  $v \in V(C_n)$ . Akan tetapi  $C_n$  bukan merupakan graf terhubung-3 karena jika dua titik yang tidak bertetangga, sebut  $x$  dan  $y$ , dihilangkan maka graf  $C_n \setminus \{x, y\}$  merupakan graf tak terhubung.

## 2.8 Bilangan Ramsey Graf

Pada tahun 1935, kajian tentang teori Ramsey berkembang pesat. Hal tersebut ditandai dengan penemuan konsep pengaplikasian teori Ramsey ke dalam teori graf oleh Erdős dan Szekeres yang menghasilkan teorema Ramsey untuk graf lengkap (Hasmawati, 2007). Bilangan Ramsey yang diperoleh untuk graf lengkap disebut dengan bilangan Ramsey klasik. Hingga tahun 2021 hanya ditemukan sembilan bilangan Ramsey klasik. Beberapa peneliti kemudian memperumum konsep bilangan Ramsey klasik menjadi konsep bilangan Ramsey graf sebarang. Definisi formal bilangan Ramsey graf sebarang diberikan pada Definisi 2.8.1.

**Definisi 2.8.1** Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ , bilangan Ramsey graf dua warna  $R(G, H)$  adalah bilangan asli terkecil  $n$  sedemikian sehingga jika semua sisi pada graf lengkap  $K_n$  diwarnai dengan dua warna, maka  $K_n$  memuat subgraf yang semua sisinya berwarna sama isomorfik dengan graf  $G$  atau  $H$  (Hasmawati, 2007).

Pada tahun 2004 Burger dan Vuuren mengkaji dua konsep bilangan Ramsey, yaitu bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(G, H)$  dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran  $m_j(G, H)$ . Definisi formal dari  $M_j(G, H)$  dan  $m_j(G, H)$  berturut-turut diberikan pada Definisi 2.8.2 dan Definisi 2.8.3.

**Definisi 2.8.2** Misalkan  $j, a, b, c$ , dan  $d$  adalah bilangan-bilangan asli dengan  $a, c \geq 2$ . Bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(K_{axb}, K_{cxd})$  adalah bilangan asli terkecil  $t$  sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf  $K_{txj}$  diberi warna merah dan warna biru secara sebarang, maka graf  $K_{txj}$  akan memuat subgraf  $K_{axb}$  merah atau  $K_{cxd}$  biru (Sy & Baskoro, 2021).

**Definisi 2.8.3** Misalkan  $j, a, b, c$ , dan  $d$  adalah bilangan-bilangan asli dengan  $a, c \geq 2$ . Bilangan Ramsey multipartit-ukuran  $m_j(K_{axb}, K_{cxd})$  adalah bilangan asli terkecil  $t$  sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf  $K_{jxt}$  diberi warna merah dan warna biru secara sebarang, maka graf  $K_{jxt}$  akan memuat subgraf  $K_{axb}$  merah atau  $K_{cxd}$  biru dan didefinisikan tak hingga dalam keadaan lain (Sy & Baskoro, 2021).

Pada pembahasan selanjutnya, graf  $K_{jxt}$  yang dimaksud pada Definisi 2.8.3 disebut sebagai graf domain. Bilangan Ramsey multipartit ukuran memiliki sifat kesimetrian yaitu  $m_j(K_{axb}, K_{cxd}) = m_j(K_{cxd}, K_{axb})$  (Sy & Baskoro, 2021). Seperti halnya bilangan Ramsey graf yang telah diperumum untuk graf sebarang, bilangan Ramsey multipartit ukuran juga telah diperumum untuk graf sebarang. Perumuman tersebut didefinisikan pada Definisi 2.8.4 berikut.

**Definisi 2.8.4** Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ , bilangan Ramsey multipartit ukuran dua warna  $m_j(G, H)$  adalah bilangan asli terkecil  $t$  sedemikian sehingga jika semua sisi pada graf multipartit seimbang lengkap  $K_{jxt}$  diwarnai dengan dua warna, maka  $K_{jxt}$  memuat subgraf yang semua sisinya berwarna sama isomorfik dengan graf  $G$  atau  $H$  (Sy & Baskoro, 2021).

Dengan memanfaatkan konsep dekomposisi pada graf maka definisi bilangan Ramsey multipartit ukuran dapat dituliskan sebagai berikut.

**Definisi 2.8.5** Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ . Misal  $F_1 \oplus F_2$  adalah sebarang faktorisasi dari  $F \cong K_{jxt}$ . Bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  adalah bilangan asli terkecil  $t$  sedemikian sehingga  $F_1$  memuat subgraf yang isomorfik dengan graf  $G$  atau  $F_2$  memuat subgraf yang isomorfik dengan graf  $H$ .

Konsep penentuan bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah konsep dekomposisi seperti yang dinyatakan pada Definisi 2.8.5. Pada bab selanjutnya, jika suatu graf (sebut graf  $F_1$ ) memuat subgraf yang isomorfik dengan graf tertentu (sebut graf  $G$ ) maka akan dikatakan graf  $F_1$  memuat subgraf  $G$ . Sebaliknya jika suatu graf (sebut graf  $F_1$ )

tidak memuat subgraf yang isomorfik dengan graf tertentu (sebut graf  $G$ ) maka akan dikatakan graf  $F_1$  tidak memuat subgraf  $G$ .

Penentuan nilai eksak bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  dilakukan dengan penentuan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil terlebih dahulu. Suatu bilangan asli  $t$  disebut nilai eksak bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  jika  $t$  merupakan batas bawah terbesar sekaligus batas atas terkecil bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  atau secara matematis dapat dituliskan  $m_j(G, H) = t$  jika  $m_j(G, H) \geq t$  dan  $m_j(G, H) \leq t$ . Adapun definisi dari batas bawah terbesar dan batas atas terkecil diberikan pada Definisi 2.8.6 dan Definisi 2.8.7 berikut (Putri, 2017).

**Definisi 2.8.6** Suatu bilangan asli  $t$  disebut batas bawah bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  jika untuk suatu graf  $F \cong K_{jxt-1}$  terdapat faktorisasi  $F_1 \oplus F_2$  dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat subgraf yang isomorfik dengan graf  $G$  dan  $F_2$  tidak memuat subgraf yang isomorfik dengan graf  $H$ . Nilai  $t$  terbesar yang memenuhi disebut batas bawah terbesar.

**Definisi 2.8.7** Suatu bilangan asli  $t$  disebut batas atas bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  jika untuk suatu graf  $F \cong K_{jxt}$  dengan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sebarang faktorisasi dari  $F$  maka akan selalu berlaku  $F_1$  memuat subgraf yang isomorfik dengan graf  $G$  atau  $F_2$  memuat subgraf yang isomorfik dengan graf  $H$ . Nilai  $t$  terkecil yang memenuhi disebut batas atas terkecil.

Batas bawah terbesar bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  diperoleh dengan cara mengonstruksi graf kritis  $F$  untuk  $G$  dan  $H$  dengan  $F \cong K_{jxt}$ . Definisi graf kritis diberikan pada definisi berikut.

**Definisi 2.8.8** Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ . Misal  $F_1 \oplus F_2$  adalah sebarang faktorisasi dari graf  $F \cong K_{jxt}$ .  $F$  disebut graf kritis untuk  $G$  dan  $H$  jika terdapat faktorisasi  $F_1 \oplus F_2$  sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat subgraf yang isomorfik dengan graf  $G$  dan  $F_2$  tidak memuat subgraf yang isomorfik dengan graf  $H$  (Putri, 2017).

Graf kritis  $F \cong K_{jxt}$  dengan nilai  $t$  terbesar disebut graf kritis maksimal. Nilai  $t$  pada graf kritis maksimal ditambah satu merupakan batas bawah terbesar bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$  atau secara matematis dapat dituliskan jika diperoleh graf kritis maksimal  $F \cong K_{jxt}$  maka  $m_j(G, H) \geq \frac{|F|}{j} + 1 = t + 1$ .

## 2.9 Hasil Penelitian Terdahulu

Pada subbab ini akan disajikan beberapa hasil penelitian yang telah diperoleh oleh peneliti-peneliti sebelumnya yang berkaitan dengan bilangan Ramsey multipartit ukuran graf lintasan  $P_m$  versus graf jam pasir  $Hg_n$ . Hasil-hasil penelitian tersebut disajikan dalam bentuk teorema-teorema sebagai berikut (Sy & Baskoro, 2021).

**Teorema 2.9.1** Untuk  $n \geq 6$ ,  $m_j(P_s, P_n) = \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$  dengan  $2 \leq s \leq 3$ .

**Teorema 2.9.2** Untuk  $j \geq 2$  dan  $n \geq 6$ ,

$$m_j(P_s, C_n) = \begin{cases} \infty, & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil, & \text{untuk yang lainnya,} \end{cases}$$

dengan  $s = 2$  atau  $3$ .

**Teorema 2.9.3** Untuk bilangan asli  $n \geq 4$ ,  $m_2(P_n, C_4) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ .

**Teorema 2.9.4** Untuk bilangan-bilangan bulat  $j, n \geq 2$ ,

$$m_j(P_n, P_4) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4}{j} \right\rceil, & \text{untuk } j \geq 2 \text{ dan } n = 2, \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \geq 3, \\ \left\lceil \frac{n+1}{j} \right\rceil, & \text{untuk } j \geq 3 \text{ dan } n \geq 3. \end{cases}$$

**Teorema 2.9.5** Untuk bilangan-bilangan bulat  $j, n \geq 2$ ,

$$m_j(P_4, C_n) = \begin{cases} \infty, & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \frac{n}{2} + 1, & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \geq 4 \text{ genap,} \\ \left\lceil \frac{n+1}{j} \right\rceil, & \text{untuk } j, n \geq 3. \end{cases}$$

**Teorema 2.9.6** Misalkan  $G$  adalah sebuah graf roda  $W_n$ , sebuah graf bintang  $S_n$ , atau sebuah graf kipas  $F_n$  dengan  $n \geq 6$ . Untuk  $j \geq 3$ ,

$$m_j(P_2, G) = \left\lceil \frac{n}{j-1} \right\rceil \text{ dan}$$

$$m_j(P_3, G) = \begin{cases} \infty, & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } G \cong W_n \text{ dengan } n \text{ ganjil,} \\ \frac{n}{j-1}, & \text{untuk } j \text{ ganjil, semua } G, \text{ dan } n = (j-1)s, \\ & \text{dengan } s \text{ adalah ganjil,} \\ \left\lceil \frac{n+1}{j-1} \right\rceil, & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

**Teorema 2.9.7** Misalkan  $M_n$  adalah sebuah graf kincir, untuk  $j \geq 3, n \geq 3$ ,

$$m_j(P_2, M_{2n}) = \left\lceil \frac{2n}{j-1} \right\rceil \text{ dan}$$

$$m_j(P_3, M_{2n}) = \begin{cases} \frac{2n}{j-1}, & \text{untuk } j \text{ ganjil dan } 2n = (j-1)s \text{ dengan } s \text{ ganjil,} \\ \left\lceil \frac{2n+1}{j-1} \right\rceil, & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

**Teorema 2.9.8** Untuk bilangan bulat  $j \geq 3$  dan  $n \geq 2$ ,

$$m_j(P_n, C_3) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n = 2 \text{ atau } 3, \\ n-1, & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n \geq 4 \text{ genap,} \\ n-2, & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n \geq 5 \text{ ganjil,} \\ \left\lceil \frac{2n}{j} \right\rceil, & \text{untuk } j \geq 4 \text{ genap,} \\ \left\lceil \frac{2n-1}{j} \right\rceil, & \text{untuk } j \geq 5 \text{ ganjil.} \end{cases}$$