TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL COUPLED WINDOWED
DAN SIFAT-SIFATNYA

**Tesis**

diajukan oleh

**FITRIYANI**
**H022221017**

**PROGRAM PASCASARJANA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**
**2023**

# TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL COUPLED WINDOWED DAN SIFAT-SIFATNYA

*COUPLED WINDOWED FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM AND ITS PROPERTIES*

**FITRIYANI**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2023**

# TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL COUPLED WINDOWED DAN SIFAT-SIFATNYA

TESIS

Sebagai salah satu syarat mencapai gelar magister sains

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

**FITRIYANI**
**H022221017**

Kepada

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**
**2023**

**TESIS**

**TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL COUPLED WINDOWED DAN SIFAT-SIFATNYA**

**FITRIYANI**

**NIM: H022221017**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 26 September 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

| Pembimbing Utama | Pembimbing Pendamping |
|---|---|
| **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** | **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** |
| NIP. 19701231 199802 1 001 | NIP. 19680803 199202 1 001 |
| Ketua Program Studi<br>Matematika S2 | Dekan Fakulras MIPA<br>Universitas Hasanuddin |
| **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** | **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.** |
| NIP. 19640207 199103 1013 | NIP. 19720515 1997 02 1002 |

## LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan dibawa ini

| | |
|---|---|
| Nama | : Fitriyani |
| Nomor Mahasiswa | : H022221017 |
| Program Studi | : Magister Matematika |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atau perbuatan tersebut.

Makassar, 2 Oktober 2023

Yang menyatakan

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 57964AKX647249838

Fitriyani

# UCAPAN TERIMA KASIH

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Transformasi Fourier fraksional *coupled windowed* dan sifat-sifatnya". Tesis ini diajukan untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar magister pada Program Studi Magister Matematika Program Pascasarjana Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanudin. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang menjadi suri tauladan bagi kita semua.

Selama penelitian ini penulis telah mendapatkan banyak dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih yang teristimewa penulis ucapkan kepada **Ibunda Sarwina** atas setiap bait do'a yang tak pernah henti mengiringi setiap proses yang dilalui penulis, yang selalu menjadi penyemangat penulis, yang tiada henti memberikan kasih sayang serta nasehat dan dukungannya baik secara moral maupun materil. Terima kasih juga kepada saudara penulis, **Laila Kadrianti** yang selalu meluangkan waktu untuk mendengarkan keluh kesah dan memberi semangat kepada penulis. Penulis juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si.** dan Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.,** selaku dosen pembimbing yang bersedia meluangkan waktunya kepada penulis untuk berbagi ilmu, nasehat, serta kesabaran selama proses bimbingan hingga tesis ini dapat terselesaikan.
2. Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** dan Bapak **Dr. Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.,** selaku dosen penguji yang telah meluangkan waktunya memberikan saran dan masukan yang membangun untuk penyelesaian tesis ini.
3. **Seluruh dosen** dan **staff** Departemen Matematika Universitas Hasanudin yang telah memberikan bekal ilmu dan bantuan dalam pengurusan admisitrasi.
4. Teman-teman **Lab Analisis** kak **Nasrullah**, kak **Afdal**, kak **Topan**, Bu **Sri**, Bu **Uni**, **Imanuel**, **Ifa**, **Ajeng**, kak **Ulil** yang selalu memberikan motivasi dan dukungan selama proses penyelesaian tugas akhir.
5. Teman-teman **Prodi Matematika 2018 FMIPA UNM** khususnya **Ilmi**, **Ela**, **Mu'adz** dan terkhusus **Hilmah** yang telah banyak memberikan saran, memotivasi dan berjuang bersama dalam penyelesaian tugas akhir ini.
6. Teman-teman **Pascasarjana Matematika 2022-1** yang telah memberikan motivasi dan semangat serta segala kebersamaan yang telah dibangun.
7. Kepada pemilik **NIM 1811042004** yang selalu meluangkan waktunya mendengarkan keluh kesah penulis, memberikan semangat dan dukungan selama proses penyusunan tesis ini.

Serta seluruh pihak yang terlibat yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna untuk itu semua jenis saran, kritik dan masukan yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Akhir kata, semoga Allah SWT membalas segala bantuan dan kebaikan dari semua pihak kepada penulis dan menjadikannya sebagai amal jariyah. Semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat dan memberikan wawasan tambahan bagi pembaca ataupun pihak yang membutuhkan dan khusunya bagi penulis sendiri.

Makassar, 20 September 2023

Fitriyani

# ABSTRAK

Penelitian ini memperkenalkan definisi transformasi Fourier fraksional *coupled windowed* (TFFrCW) yang merupakan generalisasi dari transformasi Fourier fraksional *coupled*. TFFrCW merupakan gabungan dari transformasi Fourier fraksional *coupled* dengan transformasi Fourier 2 dimensi. Berdasarkan definisi tersebut diperoleh beberapa sifat-sifat seperti sifat linear, sifat translasi, sifat modulasi, sifat parity, sifat ortogonal dan formula inversnya juga dipelajari untuk transformasi Fourier fraksional *coupled windowed*.

**Kata kunci**: Tranformasi Fourier fraksional, transformasi Fourier fraksional *coupled windowed*

# ABSTRACT

This study will introduce the definition of the coupled windowed Fractional Fourier transform (TFFrCW) which is a generalization of the fractional coupled Fourier transform. TFFrCW is a combination of a coupled fractional Fourier transform with two-dimensional Fourier transform. Based on this definition, several properties such as linear properties, translational properties, modulation properties, parity properties, orthogonal properties and inverse formulas are also studied for the coupled windowed fractional Fourier transform.

**Keywords** : Fractional Fourier transform, coupled windowed fractional Fourier transform.

# DAFTAR ISI

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang digunakan untuk memecahkan suatu permasalahan. Dalam menyederhanakan suatu persoalan analisis, sebagian besar orang melakukan transformasi dengan melihat persoalan akan diselesaikan secara lebih mudah dan sederhana. Salah satu kajian matematika yang konsepnya banyak digunakan dalam menyelesaikan suatu permasalahan yaitu transformasi Fourier.

Transformasi Fourier pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan asal Perancis yaitu Jean Baptiste Joseph Fourier pada abad ke-19. Transformasi Fourier merupakan sebuah metode yang digunakan untuk mengubah suatu sinyal dalam kawasan waktu menjadi kawasan frekuensi. Setelah sinyal berada dalam kawasan frekuensi dan diolah, sinyal dapat dikembalikan menjadi kawasan waktu kembali. Transformasi Fourier mengalami perkembangan yang sangat pesat dan banyak diaplikasikan di berbagai bidang, diantaranya bidang mekanika gelombang, elektronika, serta dalam pemrosesan sinyal, meliputi analisis sinyal dan pengolahan sinyal frekuensi [9].

Transformasi Fourier fraksional merupakan sebuah generalisasi dari transformasi Fourier biasa dengan sebuah parameter orde $\theta$. Jika $\theta = \frac{\pi}{2}$ maka transformasi Fourier fraksional akan menjadi transformasi Fourier biasa. Dengan perkembangan dari transformasi Fourier fraksional, domain frekuensi biasa hanya menjadi sebuah kasus khusus dari rangkaian kesatuan domain transformasi Fourier fraksional [12]. Seperti kasus transformasi Fourier, transformasi Fourier fraksional merupakan alat matematika yang efektif yang telah digunakan secara luas dalam mekanika kuantum, jaringan syaraf, persamaan diferensial, optik, system komunikasi [2, 13]. Hal tersebut dianggap sebagai perluasan dari transformasi Fourier yang dimulai pada tahun 1980 oleh Namias [7].

Hingga saat ini, telah banyak peneliti yang mengkaji dan mengembangkan transformasi Fourier fraksional. Baru-baru ini [5] dan [11] menggeneralisasi transformasi Fourier fraksional ke transformasi baru yang disebut transformasi Fourier fraksional *coupled*. [11] dalam penelitiannya mengkaji dan mengklasifikasikan beberapa ketaksamaan prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier fraksional *coupled*. [5] dalam penelitiannya memperoleh beberapa properti baru dari transformasi Fourier fraksional *coupled* kemudian memperluas transformasi tersebut beberapa diantaranya ke $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Lebih lanjut [6] memperkenalkan transformasi Fourier fraksional *coupled* short-time menggunakan kernel dari transformasi Fourier fraksional *coupled*. Pada penelitian tersebut juga dikaji beberapa sifat dan prinsip ketidakpastian yang terkait dengan transformasi ini. Disisi lain, [1] dalam penelitiannya telah mengkaji beberapa sifat pada transformasi kanonik linear windowed dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dengan transformasi kanonik linear dan prinsip ketidakpastian logaritmik pada transformasi ini. Pada penelitian tersebut banyak sifat yang telah diteliti, termasuk sifat linear, sifat translasi dan prinsip ketidakpastian. Akan tetapi penelitian tersebut belum mengembangkan transformasi Fourier ke transformasi Fourier fraksional *coupled windowed*.

Berdasarkan uraian diatas, maka penelitian ini mengembangkan transformasi Fourier fraksional *coupled* menjadi transformasi Fourier baru yang disebut transformasi Fourier fraksional *coupled windowed*. Dalam hal ini akan diperkenalkan definisi dan menurunkan beberapa sifat yang terkait dengan transformasi Fourier fraksional *coupled windowed*.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana sifat-sifat dari tansformasi Fourier fraksional *coupled windowed*?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini yaitu untuk menyelidiki sifat-sifat dari tansformasi Fourier fraksional *coupled windowed* seperti sifat linear, sifat translasi, sifat modulasi, sifat parity, sifat ortogonal dan inversnya.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian pada tugas akhir ini yaitu diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru sekaligus literature tambahan bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi Fourier, khususnya pada sifat-sifat dari transformasi Fourier fraksional *coupled windowed*.

## 1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya akan membahas tentang sifat-sifat dasar dari tansformasi Fourier fraksional *coupled windowed* seperti sifat linear, sifat translasi, sifat modulasi, sifat parity, sifat ortogonal dan inversnya.

# BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi, teorema, dan istilah-istilah sebagai teori atau landasan dalam penulisan tugas akhir ini. Sebelum membahas tentang tranformasi Fourier fraksional *coupled windowed* terlebih dahulu akan dibahas mengenai ruang lebesgue untuk transformasi Fourier, transformasi Fourier dan sifat-sifatnya, transformasi Fourier fraksional, transformasi Fourier fraksional coupled, transformasi Fourier windowed.

## 2.1 Integral Lebesgue

### 2.1.1 Ruang $L^1(\mathbb{R})$

**Definisi 2.1.1.** *[10] Misalkan $f$ adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi $f$ yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu*

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty \right\}. \tag{2.1}$$

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma $\| \cdot \|_1$ yang dirumuskan

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt. \tag{2.2}$$

**Contoh 1.** *Misalkan $f(x) = x^2, -2 < x < 2$.*

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$.

**Solusi 1.** *Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada Persamaan* (2.1)*, diperoleh*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \int_{-2}^{2} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-2}^{2} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

*Jadi, $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

**Contoh 2.** *Misalkan* $f(x) = \begin{cases} 1, -2 < x < 2 \\ 0, x \ selainnya \end{cases}$ .

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$.

**Solusi 2.** *Berdasarkan definisi ruang* $L^1(\mathbb{R})$ *pada Persamaan* (2.1)*, diperoleh*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-2} 0 \, dx + \int_{-2}^{2} |1| dx + \int_{2}^{\infty} 0 \, dx \\ &= 0 + x|_{-2}^{2} + 0 \\ &= 4. \end{aligned}$$

*Jadi,* $f \in L^1(\mathbb{R})$.

### 2.1.2 Ruang $L^2(\mathbb{R})$

**Definisi 2.1.2.** *[10] Misalkan $f$ adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai kumpulan semua fungsi $f$ yang mutlak kuadratnya terintegralkan, yang dinotasikan sebagai berikut:*

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}. \tag{2.3}$$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\| \cdot \|_2$ yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left[ \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan inner product $\langle f, f \rangle$ dengan aturan jika $f \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)} dt. \tag{2.5}$$

Dan normnya dinyatakan dengan

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \tag{2.6}$$

**Contoh 3.** *Misalkan* $f(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}(-\infty < t < \infty)$ .

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f$ ada dalam fungsi $L^2(\mathbb{R})$.

**Solusi 3.** *Sehingga berdasarkan definisi di ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada Persamaan (2.3), diperoleh*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|t|}|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-|t|})^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} (e^{t})^2 dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} e^{2t} dt + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} (e^{-t})^2 dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2a}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-2a} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - 0 + 0 + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

*Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R})$.*

### 2.1.3 Ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$

**Definisi 2.1.3.** *[3] Misalkan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur bernilai real. Koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur yang terintegralkan $p$ pada $\mathbb{R}$ dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai*

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{t})|^2 d\boldsymbol{t} < \infty \right\}. \tag{2.7}$$

Maka norm dari $f$ dalam $L^2(\mathbb{R}^2)$ dilengkapi dengan

$$\|f\|_2 = \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{t})|^2 d\boldsymbol{t} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

**Contoh 4.** *Misalkan $f(\boldsymbol{t}) = e^{-|\boldsymbol{t}|^2}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^2$.*

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f$ ada dalam fungsi $L^2(\mathbb{R}^2)$.

**Solusi 4.** *Sehingga berdasarkan definisi di ruang$L^2(\mathbb{R}^2)$ pada Persamaan (2.7), diperoleh*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\boldsymbol{t})|^2 d\boldsymbol{t} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|\boldsymbol{t}|^2}|^2 d\boldsymbol{t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\boldsymbol{t}|^2} d\boldsymbol{t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t_1^2+t_2^2)} d\boldsymbol{t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t_1^2}\, dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t_2^2}\, dt_2 \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} < \infty.
\end{aligned}
$$

*Jadi,* $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

## 2.2 Teorema Fubini

**Teorema 2.2.1.** *Jika $f$ kontinu pada segiempat $R = [a, b] \times [c, d]$, maka*

$$\iint\limits_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \tag{2.9}$$

*dimana $dA = dydx = dxdy$.*

## 2.3 Formula Parseval

**Teorema 2.3.1.** *Jika $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, maka diperoleh*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle. \tag{2.10}$$

*dengan*

$$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega. \tag{2.11}$$

## 2.4 Ketaksamaan Pitt

Ruang Schwartz merupakan ruang fungsi dari semua fungsi yang turunannya menurun dengan cepat. Ruang ini mempunyai sifat penting bahwa transformasi Fourier merupakan automorfisme pada ruang ini. Suatu fungsi dalam ruang Schwartz terkadang disebut fungsi Schwartz.

**Teorema 2.4.1.** *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ berlaku*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{\omega}|^{-\eta} |\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega} \leq C_\eta \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{t}|^{\eta} |f(\boldsymbol{t})|^2 d\boldsymbol{t}. \tag{2.12}$$

*dengan*

$$C_\eta = \pi^\eta \left( \frac{\Gamma(\frac{2-\eta}{4})}{\Gamma\left(\frac{2+\eta}{4}\right)} \right)^2, \quad 0 \leq \eta < 2, \tag{2.13}$$

*dan* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ *adalah ruang Schwartz pada* $\mathbb{R}^2$.

## 2.5 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier merupakan bentuk kontinu dari deret Fourier. Transformasi Fourier adalah model transformasi yang memindahkan domain waktu menjadi domain frekuensi. Transformasi Fourier kontinu biasanya disingkat dengan transformasi Fourier.

### 2.5.1 Transformasi Fourier $L^1(\mathbb{R})$

**Definisi 2.5.1.** *[10] Misalkan diberikan fungsi* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *terdefinisi pada* $\mathbb{R}$, *maka transformasi Fourier dari fungsi* $f$ *di notasikan* $\hat{f}(\omega)$ *dan didefinisikan oleh*

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{2.14}$$

Dalam hal ini $i^2 = -1$. Fungsi eksponensial $e^{-i\omega t}$ disebut kernel dari transformasi Fourier. Karena $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ maka Persamaan (2.14) diatas dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt. \end{aligned}$$

**Contoh 5.** *Diketahui fungsi* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *sebagai berikut:*

$$f(t) = \begin{cases} 3, -1 < t < 1 \\ 0, t \textit{ selainnya} \end{cases} .$$

Akan dicari transformasi Fourier dari fungsi $f$.

**Solusi 5.** *Berikut adalah transformasi Fourier dari fungsi diatas*

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{-1} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{1}^{\omega} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= 0 + \int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega t}dt + 0 \\
&= \int_{-1}^{1} 3e^{-i\omega t}dt \\
&= 3\int_{-1}^{1} (\cos\omega t - i\sin\omega t)dt \\
&= 3\left(\int_{-1}^{1} \cos\omega t dt - i\int_{-1}^{1} \sin\omega t dt\right) \\
&= 3\left(\Big[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\Big]_{-1}^{1} - i\Big[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\Big]_{-1}^{1}\right) \\
&= \frac{3}{\omega}\big(\sin\omega - \sin(-\omega)\big) + i\big(\cos\omega - \cos(-\omega)\big) \\
&= \frac{3}{\omega}\big(\sin\omega + \sin\omega\big) + i\big(\cos\omega - \cos\omega\big) \\
&= \frac{6}{\omega}\sin\omega.
\end{aligned}
$$

*Jadi,* $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{6}{\omega}\sin\omega$.

**Contoh 6.** *Diketahui fungsi* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *sebagai berikut:*

$$
f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & jika\, t \geq 0 \\ 0, & jika\, t < 0 \end{cases}.
$$

Akan dicari transformasi Fourier dari fungsi $f$.

**Solusi 6.** *Maka transformasi Fourier dari fungsi diatas adalah:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}dt \\
&= -\frac{1}{1+i\omega}e^{-(1+i\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{1+i\omega}e^{-\infty} - \left(-\frac{1}{1+i\omega}e^{0}\right) \\
&= 0 + \frac{1}{1+i\omega}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{1+i\omega}$$

*Jadi,* $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$.

### 2.5.2 Transformasi Fourier $L^2(\mathbb{R}^2)$

**Definisi 2.5.2.** *[3]Misalkan diberikan fungsi* $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *terdefinisi pada* $\mathbb{R}$, *transformasi Fourier dari fungsi f di notasikan* $\hat{f}(\omega)$ *dan didefinisikan oleh*

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})e^{-i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}}d\boldsymbol{t} \tag{2.15}$$

Karena $e^{i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}} = \cos\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega} + i\sin\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}$ maka Persamaan (2.15) diatas dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})(\cos\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega} - i\sin\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})\cos\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{t} - i\int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})\sin\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{t} \qquad (2.16)\end{aligned}$$

**Contoh 7.** *Diberikan fungsi* $f(\boldsymbol{t}) = e^{-|\boldsymbol{t}|^2}$.

Akan dicari transformasi Fourier dari $f(\boldsymbol{t})$.

**Solusi 7.** *Maka transformasi Fourier dari fungsi diatas adalah:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})e^{-i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}}d\boldsymbol{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|\boldsymbol{t}|^2}e^{-i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}}d\boldsymbol{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t_1^2+t_2^2)}e^{-i(t_1\omega_1)+t_2\omega_2}d\boldsymbol{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t_1^2+t_2^2)}e^{-it_1\omega_1}e^{-it_2\omega_2}d\boldsymbol{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t_1^2+it_1\omega_1)}e^{-(t_2^2+it_2\omega_2)}d\boldsymbol{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left((t_1+i\frac{\omega_1}{2})^2-(i\frac{\omega_1}{2})^2\right)}e^{-\left((t_2+i\frac{\omega_2}{2})^2-(i\frac{\omega_2}{2})^2\right)}d\boldsymbol{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t_1+i\frac{\omega_1}{2})^2}e^{-\frac{\omega_1^2}{4}}e^{-(t_2+i\frac{\omega_2}{2})^2}e^{-\frac{\omega_2^2}{4}} \\ &= e^{-(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4})}\int_{\mathbb{R}} e^{-(t_1+i\frac{\omega_1}{2})^2}dt_1\int_{\mathbb{R}} e^{-(t_2+i\frac{\omega_2}{2})^2}dt_2\end{aligned}$$

$$= e^{-(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4})}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}$$
$$= \pi e^{-(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4})}.$$

*Jadi,* $\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega}) = \pi e^{-(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4})}$.

### 2.5.3 Invers Transformasi Fourier

**Definisi 2.5.3.** *[10] Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier [10] ditulis sebagai*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{2.17}$$

## 2.6 Sifat-sifat Transformasi Fourier

Dalam bagian ini akan dibahas sifat-sifat transformasi Fourier dengan notasi sebagai berikut:

**Teorema 2.6.1** (Sifat Penjumlahan). *Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka*

$$\mathcal{F}\{f+g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.18}$$

**Teorema 2.6.2** (Sifat Linear). *Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka*

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \omega g\}(\omega) = \alpha\mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.19}$$

*dengan $\alpha, \beta$ merupakan konstanta bilangan riil.*

**Teorema 2.6.3** (Sifat Translasi). *Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan translasi $T_k f(t) = f(t-k)$ maka*

$$\mathcal{F}\{T_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega). \tag{2.20}$$

**Teorema 2.6.4** (Sifat Modulasi). *Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0} f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$ maka*

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \tag{2.21}$$

**Teorema 2.6.5** (Sifat Skalar). *Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \neq 0$ dan misal $f(t) = f(at)$ maka*

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{a}\mathcal{F}\{f\}\big(\frac{\omega}{a}\big). \tag{2.22}$$

## 2.7 Transformasi Fourier Fraksional

**Definisi 2.7.1** (TFFr). *[12] Transformasi Fourier fraksional dengan sudut parameter $\theta$ dari fungsi $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, dinotasikan $\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega)$ didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \hat{f}^\theta(\omega) = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(\omega, x) f(x) dx. \tag{2.23}$$

Kemudian untuk kernelnya adalah

$$K^\theta(\omega, x) = \begin{cases} C^\theta e^{-i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} + ix\omega\csc\theta} & ; \frac{\pi}{2} \neq \theta \neq n\pi \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\omega} & ; \theta = \frac{\pi}{2} \\ \delta(x - \omega) & ; \theta = 2n\pi \\ \delta(x + \omega) & ; \theta = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.24}$$

dan $C^\theta = (2\pi i \sin\theta)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}$
atau

$$\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}} e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - ix\omega\csc\theta} f(x) dx.$$

Khususnya untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1 - i\cot\frac{\pi}{2}}{2\pi}} e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - ix\omega\csc\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{0 - ix\omega} f(x) dx \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f\}(\omega). \end{aligned}$$

Jadi, untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$ transformasi Fourier fraksional berubah menjadi transformasi Fourier biasa.

Untuk $\theta = 2\pi, \ldots, 2n\pi$ diperoleh $\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - \omega) f(x) dx$ dan untuk $\theta = 3\pi, \ldots, (2n+1)\pi$, diperoleh $\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x + \omega) f(x) dx$.

## 2.8 Transformasi Fourier Fraksional *Coupled*

Pada subbab ini akan dibahas mengenai definisi transformasi Fourier fraksional *Coupled*.

### 2.8.1 Transformasi Fourier Fraksional *Coupled*

**Definisi 2.8.1** (TFFrC). *[11] Misalkan sebarang fungsi $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ maka definisi transformasi Fourier fraksional coupled adalah:*

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t}) K_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}, \tag{2.25}$$

*dengan*

$$K_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{t}) = d(\gamma) e^{-i\left(a(\gamma)(|\boldsymbol{t}|^2+|\boldsymbol{\omega}|^2)-\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}\right)}. \tag{2.26}$$

*Dimana*

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \delta = \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad a(\gamma) = \frac{\cot\gamma}{2}, \quad b(\gamma,\delta) = \frac{\cos\delta}{\sin\gamma},$$
$$c(\gamma,\delta) = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}, \quad d(\gamma) = \frac{ie^{-i\gamma}}{2\pi\sin\gamma}, \quad M = \begin{pmatrix} b(\gamma,\delta) & c(\gamma,\delta) \\ -c(\gamma,\delta) & b(\gamma,\delta) \end{pmatrix},$$

*dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\alpha + \beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.*

$M$ invertible karena dapat ditemukan $M^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \sin\gamma\cos\delta & -\sin\gamma\sin\delta \\ \sin\gamma\sin\delta & \sin\gamma\cos\delta \end{smallmatrix}\right)$ sehingga $MM^{-1} = M^{-1}M = I$.

Relasi (2.25) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = d(\gamma) \int_{\mathbb{R}^2} \left(f(\boldsymbol{t}) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{t}|^2}\right) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2} e^{i\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{t}. \tag{2.27}$$

Perhatikan bahwa

$$g(\boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{t}) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{t}|^2}, \tag{2.28}$$

sehingga diperoleh

$$|g(\boldsymbol{t})| = |f(\boldsymbol{t})|. \tag{2.29}$$

Sekarang Persamaan (2.27) menjadi

$$\begin{aligned} (d(\gamma))^{-1} e^{ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} g(\boldsymbol{t}) e^{i\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{t} \\ &= \mathcal{F}\{g\}(-M\boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \tag{2.30}$$

**Contoh 8.** *Diberikan fungsi $f(\boldsymbol{t})$ sebagai berikut*

$$f(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t_1, t_2 \leq 1 \\ 0, & \boldsymbol{t} \ selainnya \end{cases}.$$

Akan dicari transformasi Fourier fraksional *coupled* dari $f(\boldsymbol{t})$.

**Solusi 8.** *Berdasarkan Definisi 2.8.1, maka solusi dari persamaan diatas adalah*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\omega}) &= d(\gamma) \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\left(a(\gamma)\left(|\boldsymbol{t}|^2+|\boldsymbol{\omega}|^2\right)-\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}\right)} d\boldsymbol{t} \\
&= d(\gamma) \int_0^1 \int_0^1 e^{-i\left(a(\gamma)(t_1^2+t_2^2)\right)} e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2} e^{i\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(\gamma,\delta)\omega_1 & c(\gamma,\delta)\omega_2 \\ -c(\gamma,\delta)\omega_1 & b(\gamma,\delta)\omega_2 \end{pmatrix}\right)} dt_1 dt_2 \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2} \int_0^1 \int_0^1 e^{-i\left(a(\gamma)(t_1^2+t_2^2)\right)} \\
&\quad e^{-i\left(t_1(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)+t_2(-c(\gamma,\delta)\omega_1+b(\gamma,\delta)\omega_2)\right)} dt_1 dt_2 \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2} \int_0^1 e^{-ia(\gamma)t_1^2-it_1(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)} dt_1 \\
&\quad \int_0^1 e^{-ia(\gamma)t_2^2-it_2(-c(\gamma,\delta)\omega_1+b(\gamma,\delta)\omega_2)} dt_2 \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2} \int_0^1 e^{-ia(\gamma)\left(t_1^2+\frac{t_1(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)}{a(\gamma)}\right)} dt_1 \\
&\quad \int_0^1 e^{-ia(\gamma)\left(t_2^2+\frac{t_2(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)}{a(\gamma)}\right)} dt_2 \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2} \int_0^1 e^{-ia(\gamma)\left(\left(t_1+\frac{b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2}{2a(\gamma)}\right)^2-\left(\frac{(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)^2}{4a(\gamma)^2}\right)\right)} dt_1 \\
&\quad \int_0^1 e^{-ia(\gamma)\left(\left(t_2+\frac{b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1}{2a(\gamma)}\right)^2-\left(\frac{(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)^2}{4a(\gamma)^2}\right)\right)} dt_2 \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2} e^{\left(\frac{i(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)^2}{4a(\gamma)}+\frac{i(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)^2}{4a(\gamma)}\right)} \\
&\quad \int_0^1 e^{-ia(\gamma)\left(t_1+\frac{b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2}{2a(\gamma)}\right)^2} dt_1 \int_0^1 e^{-ia(\gamma)\left(t_2+\frac{b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1}{2a(\gamma)}\right)^2} dt_2 \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2+\frac{i}{4a(\gamma)}\left((b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)^2+(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)^2\right)} \\
&\quad \int_0^1 e^{-\left(\sqrt{ia(\gamma)}t_1+\frac{\sqrt{i}(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)}{2\sqrt{a(\gamma)}}\right)^2} dt_1 \int_0^1 e^{-\left(\sqrt{ia(\gamma)}t_2+\frac{\sqrt{i}(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)}{2\sqrt{a(\gamma)}}\right)^2} dt_2 \\
&= \frac{d(\gamma)}{ia(\gamma)} e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2+\frac{i}{4a(\gamma)}\left((b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)^2+(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)^2\right)}
\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{a(\gamma)}}(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)}^{\sqrt{ia(\gamma)}+\frac{\sqrt{i}(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)^2}{2\sqrt{a(\gamma)}}} e^{-u^2}du \int_{\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{a(\gamma)}}(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)}^{\sqrt{ia(\gamma)}+\frac{\sqrt{i}(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)^2}{2\sqrt{a(\gamma)}}} e^{-z^2}dz$$

$$= \frac{4d(\gamma)}{ia(\gamma)\pi} e^{-ia(\gamma)|\boldsymbol{\omega}|^2+\frac{i}{4a(\gamma)}\left((b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)^2+(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)^2\right)}$$

$$\left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{ia(\gamma)}+\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{a(\gamma)}}(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)^2\right)\right.$$

$$\left.-\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{a(\gamma)}}(b(\gamma,\delta)\omega_1+c(\gamma,\delta)\omega_2)\right)\right)$$

$$\left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{ia(\gamma)}+\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{a(\gamma)}}(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)^2\right)\right.$$

$$\left.-\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{a(\gamma)}}(b(\gamma,\delta)\omega_2-c(\gamma,\delta)\omega_1)\right)\right).$$

### 2.8.2 Invers Transformasi Fourier Fraksional Coupled

**Definisi 2.8.2** (Invers TFFrC). *Untuk setiap $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, maka diberikan invers transformasi Fourier fraksional coupled*

$$f(\boldsymbol{t}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\omega})\overline{K_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{t})}d\boldsymbol{\omega}$$
$$= \overline{d(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\omega})e^{i\left(a(\gamma)(|\boldsymbol{t}|^2+|\boldsymbol{\omega}|^2)-\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}\right)}d\boldsymbol{\omega}. \tag{2.31}$$

## 2.9 Transformasi Fourier Windowed

**Definisi 2.9.1** (TFW). *[1] Transformasi Fourier windowed dari $f \in L^2(\mathbb{R})$ terhadap fungsi windowed $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ didefinisikan sebagai*

$$\mathcal{W}_\phi f(\omega,u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\phi_{\omega,u}(x)}dx. \tag{2.32}$$

Untuk *fungsi windowed* $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, maka kernel Fourier *windowed* $\phi_{\omega,u}(x)$ didefinisikan sebagai

$$\phi_{\omega,u}(x) = \phi(x-u)e^{i\omega x}. \tag{2.33}$$

**Contoh 9.** *Diketahui*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < x < \infty \\ 0, & selainnya. \end{cases} \qquad \phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & selainnya. \end{cases}$$

$$\phi(x-u) = \begin{cases} 1, & u < x < 1 + x \\ 0, & selainnya. \end{cases}$$

Akan dicari transformasi Fourier windowednya.

**Solusi 9.** *Berdasarkan Definisi 2.9.1 diatas, diperoleh solusi berikut*

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_\phi f(\omega, u) &= \int_0^\infty e^{-x}\phi(x-u)e^{i\omega x}dx \\
&= \int_u^{1+u} e^{-x}e^{i\omega x}dx \\
&= \int_u^{1+u} e^{(i\omega-1)x}dx \\
&= \frac{1}{i\omega-1}e^{(i\omega-1)x}\Big|_u^{1+u} \\
&= \frac{e^{(i\omega-1)(1+u)}}{i\omega-1} - \frac{e^{(i\omega-1)u}}{i\omega-1} \\
&= \frac{e^{(i\omega-1)u}}{i\omega-1}\left(e^{(i\omega-1)}-1\right).
\end{aligned}$$

*Jadi,* $\mathcal{W}_\phi f(\omega, u) = \frac{e^{(i\omega-1)u}}{i\omega-1}\left(e^{(i\omega-1)}-1\right)$.