# DIMENSI METRIK SISI GRAF HASIL OPERASI *COMB* $C_n$ TERHADAP GRAF $K_1 + G$

*EDGE METRIC DIMENSION ON THE COMB GRAPH OF* $C_n$ *TO* $K_1 + G$ *GRAPH*

**TESIS**


**ABDILLA NURUL AZISAH. MN.**

**H022221018**


**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**SEKOLAH PASCASARJANA**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2023**

**DIMENSI METRIK SISI GRAF HASIL OPERASI *COMB* $C_n$ TERHADAP GRAF $K_1 + G$**

*EDGE METRIC DIMENSION ON THE COMB GRAPH OF $C_n$ TO $K_1 + G$ GRAPH*

**TESIS**

**ABDILLA NURUL AZISAH. MN.**

**H022221018**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**SEKOLAH PASCASARJANA**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2023**

# DIMENSI METRIK SISI GRAF HASIL OPERASI *COMB* $C_n$ TERHADAP GRAF $K_1 + G$

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

ABDILLA NURUL AZISAH. MN.
NIM: H022221018

Kepada

**PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA**
**FAKUTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**

**2023**

**TESIS**

**DIMENSI METRIK SISI GRAF HASIL OPERASI *COMB* $C_n$ TERHADAP GRAF $K_1 + G$**

**ABDILLA NURUL AZISAH. MN.**
**NIM: H022221018**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka
Penyelesaian Studi Program Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
pada tanggal 13 Oktober 2023
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui

Pembimbing Utama

**Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.**
NIP. 19641231 199003 2 007

Pembimbing Pendamping

**Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS**
NIP. 19580802 198403 1 002

Ketua Program Studi
Matematika

**Dr. Muhammad Zakir,M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS HASANUDDIN

**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19720515 1997 02 1 002

# LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Abdilla Nurul Azisah. MN.

Nomor Mahasiswa : H022221018

Program Studi : Magister Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan karya hasil saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 13 Oktober 2023

Yang menyatakan

Abdilla Nurul Azisah. MN.

# UCAPAN TERIMA KASIH

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin, kalimat pertama yang penulis ucapkan kepada-Nya sebagai rasa syukur yang dalam. Allah subhanahu wata'ala, Maha Pemberi, yang menggerakkan hati dan pikiran serta menggelorakan semangat dalam diri Hamba-Nya. Shalawat dan salam kepada baginda Rasulullah, Nabiullah Muhammad saw yang membimbing umatnya menuju kebaikan dan kebenaran.

Penulis telah menyelesaikan tesis yang berjudul "Dimensi Metrik Sisi Graf Hasil Operasi *Comb* $C_n$ Terhadap Graf $K_1 + G$". Tujuan utama penulisan karya ini untuk memenuhi persyaratan akademik dalam rangka memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis sangat sadar bahwa penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis menyampaikan terima kasih yang setulusnya kepada kedua orang tua yang tercinta **Ibunda Nurfati** dan **Ayahanda Muksin** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang tiada henti mengalir dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Terima kasih atas segala aspek dukungan yang tidak terkira nilainya. Semoga Allah swt memberikan balasan atas segala kebaikan kedua orang tua saya.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.**, selaku pembimbing utama dan Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS**, selaku pembimbing pertama untuk segala ilmu, nasehat, beserta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya mendampingi penulis sehingga karya ini dapat terselesaikan.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, dan Bapak **Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.** selaku anggota tim

penguji yang telah bersedia untuk meluangkan waktu dan pikiran dalam memberikan saran sekaligus arahan dalam penyusunan tesis ini.

3. Terima kasih kepada adik-adik tersayang, **Arsyilla Nurul Azizah MN.** Dan **Muhammad Jaharullah Al-Faruq MN.** yang terus menjadi pemacu bagi penulis untuk semakin giat berusaha..
4. Para kawan **Fitriyani**, **Nurhafika Rafiuddin**, **St. Nurhilmah Busrah**, dan **Ilmi Nurfaizah Rustan** yang telah menemani penulis dari awal perkuliahan di Magister S2 Matematika Universitas Hasanuddin, meluangkan waktu untuk mendengarkan keresahan dan memberi nasehat serta dukungan sehingga penulis bisa berada di penyelesaian tugas akhir ini.
5. Para kawan **Ahmad Taufiq**, **Ahmad Agung Syarifuddin**, **Nurhafida Rahmania**, **Muhammad Ikhwan Mubarak**, **St. Nur Khalifah Ali** dan kawan lain di **Tuo Marendeng** beserta teman-teman **alumni SMA Negeri 1 Tinambung** yang kiranya terus memberi dukungan kepada penulis, baik moril hingga tenaga.
6. **Teman-teman Prodi Matematika S2 Angkatan 2022-2023 semester ganjil** yang telah membantu penulis, senantiasa membersamai dan menyayangi.

Serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu persatu. Semoga segala bantuan beserta kebaikan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah-mudahan tulisan ini memberi manfaat kepada para pembaca dan seluruh pihak yang membutuhkan terutama untuk penulis sendiri.

Makassar, 13 Oktober 2023

Penulis

Abdilla Nurul Azisah MN.

# ABSTRAK

Misalkan graf $G$ adalah graf sederhana yang sebarang. Dalam penelitian ini, ditetapkan teorema beserta bukti tentang dimensi metrik sisi dari graf hasil operasi comb graf siklus $C_n$ terhadap graf $K_1 + G$. Penelitian ini merupakan pengembangan dari temuan dimensi metrik sisi dari graf hasil operasi comb graf siklus terhadap graf komplit. Dimensi metrik sisi dari graf yang diteliti adalah hasil kali antara kardinalitas graf siklus terhadap kardinalitas dari graf $G$ yang telah dikurangi oleh 1.

**Kata kunci:** Dimensi metrik sisi, graf sederhana, operasi comb, titik dominan.

ABSTRACT

Suppose that graph $G$ is any simple graph. In this study, the theorem and the proof about the edge metric dimension of the comb product graph of cycle graph $C_n$ to the graph $K_1 + G$ is established. This is based on the development of the findings about the edge metric dimension of comb product graph of cycle to the complete graphs. The edge metric dimension is the product of the cycle cardinality and the cardinality of the graph $G$ that is reduced by 1.


**Key words:** Edge metric dimension, simple graph, comb product graph, dominant vertex.

# DAFTAR ISI

# BAB I
# PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang penelitian, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan beserta manfaat penelitian.

## 1.1 Latar Belakang

Permasalahan dalam kehidupan sehari-hari mendorong manusia untuk menemukan solusi penyelesaian sehingga timbul perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi dalam menyelesaikan berbagai permasalahan. Manusia biasanya menggunakan ilmu matematika dalam menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Salah satu konsep dalam ilmu ini adalah teori graf. Graf dapat digunakan untuk merepresentasikan masalah yang rumit ke dalam bentuk penyajian yang lebih sederhana sehingga mudah dipahami juga dianalisis dalam perolehan penyelesaian atau solusinya.

Graf digunakan dalam menjelaskan objek-objek diskrit serta hubungan antar objeknya. Objek dinyatakan sebagai sebuah titik dan hubungan antar objek dinyatakan dengan garis atau sisi. Berdasarkan fakta mengenai hubungan antar objek, hal ini terkait erat dengan konsep jarak (metrik), seperti jarak antar titik dalam suatu graf. Konsep metrik ini merupakan salah satu topik menarik yang telah banyak diteliti, termasuk salah satunya adalah dimensi metrik pada graf.

Konsep awal dimensi metrik graf diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 yang selanjutnya dikaji pula oleh Harary dan Melter pada tahun 1976. Setelahnya, lahirlah berbagai kajian dimensi metrik graf dengan perkembangan yang cukup pesat sampai saat ini (Singh dkk., 2021). Dalam penentuan dimensi metrik graf, digunakan konsep dasar jarak antar titik. Selain itu, terdapat himpunan penentu (*resolving set*) yang merupakan himpunan bagian dari himpunan titik pada suatu graf apabila setiap titik di graf tersebut memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap anggota-anggota himpunan penentu tersebut. Himpunan penentu dengan kardinalitas minimum disebut basis metrik (sebut basis metrik titik) dan kardinalitasnya menyatakan dimensi metrik (sebut dimensi metrik titik) dari graf, misal graf $G$, yang dinotasikan dengan $\beta(G)$.

Seiring perkembangannya, kini bermunculan banyak jenis dimensi metrik, seperti dimensi metrik lokal, dimensi metrik kuat, dimensi metrik fraksional, dan sebagainya. Salah satu yang diperkenalkan dalam beberapa tahun terakhir ini adalah dimensi metrik sisi (*edge metric dimension)* dari suatu graf. Berbeda dengan dimensi metrik titik yang menggunakan konsep jarak antar titik, dimensi metrik sisi menggunakan konsep jarak antara suatu sisi dengan titik pada graf. Seperti dimensi metrik titik, dimensi metrik sisi memiliki himpunan penentu sisi (*edge resolving set*) yang disebut juga generator metrik sisi (*edge metric generator)*. Himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum disebut basis metrik sisi dan kardinalitasnya menyatakan dimensi metrik sisi dari graf $G$ yang dinotasikan dengan $\beta_e(G)$.

Konsep dimensi metrik sisi diperkenalkan oleh Kelenc dkk. (2017). Hal ini berdasarkan fakta bahwa basis metrik dari suatu graf $G$ hanya membedakan titik-titik di graf $G$, namun tidak cukup untuk membedakan seluruh sisi di graf tersebut. Kelenc dkk. (2018) membuktikan hal ini dengan temuannya bahwa terjadi salah satu hal pada sebuah graf, yaitu $\beta(G) > \beta_e(G)$, $\beta(G) < \beta_e(G)$, dan $\beta(G) = \beta_e(G)$. Selain itu, dijelaskan pula dimensi metrik sisi dari beberapa graf khusus, seperti graf lintasan, graf siklus, graf komplit, dan beberapa graf khusus. Di sisi lain, Nasir dkk. (2018) menjelaskan dimensi metrik sisi dari graf-graf famili $n$-*sunlet* dan prisma. Adapun Zubrilina (2018) memberikan karakterisasi graf-graf berorde $n$ yang dimensi metrik sisinya $n-1$ dan mengajukan masalah terbuka tentang graf berorde $n$ apa saja yang dimensi metrik sisinya $n-2$. Hal ini terjawab oleh Wei dkk. (2020) yang memberikan karakterisasi dari semua graf bipartit terhubung yang dimensi metrik sisinya $n-2$.

Salah satu penelitian terbaru oleh Singh dkk. (2021) membahas tentang dimensi metrik titik dan dimensi metrik sisi dari graf-graf *windmill*. Temuan spesifik tentang dimensi metrik sisi graf *french cycle windmill* menjadi landasan utama dalam pengembangan yang hendak dilakukan dalam penelitian ini. Setelah diamati, ternyata graf *french cycle windmill* merupakan graf hasil operasi *comb* graf siklus $(C_m)$ dengan graf komplit $(K_n)$. Selain itu, graf komplit merupakan salah satu graf yang memiliki titik dominan.

Graf hasil operasi *comb* graf siklus $(C_m)$ terhadap graf komplit $(K_n)$ ditulis $C_m \rhd K_n$ dengan simbol $\rhd$ yang menyatakan operasi *comb*. Operasi *comb* yang digunakan Singh dkk. (2021) pada temuan tersebut merupakan operasi antar dua buah graf misal graf $G$ dan $H$ sehingga graf $G \rhd H$ merupakan graf yang terdiri atas satu kopian graf $G$ dan $|V(G)|$ kopian dari graf $H$ yang selanjutnya terdapat satu titik pada graf $H$ kopian ke-$i$ yang ditempelkan pada titik ke- $i$ di graf $G$.

Menariknya, graf komplit yang berperan sebagai graf $H$ pada kasus ini menyebabkan titik pada graf $H$ kopian ke-$i$ yang ditempelkan pada titik ke-$i$ di graf $C_m$ merupakan titik dominan. Jadi, penelitian Singh dkk. (2021) belum menganalisis secara umum dimensi metrik sisi graf hasil operasi *comb* graf siklus terhadap graf terhubung lain yang sederhana dan memiliki titik dominan.

Berdasarkan hal tersebut, peneliti tertarik untuk menentukan dimensi metrik sisi graf hasil operasi *comb* graf $C_n$ terhadap graf sederhana yang memiliki titik dominan, sehingga temuan Singh dkk. (2021) dapat diperoleh dari penelitian ini. Graf sederhana dengan titik dominan dapat dinyatakan sebagai graf hasil operasi jumlah graf $K_1$ dan $G$, dengan graf $G$ adalah graf sederhana yang sebarang. Penelitian yang dilakukan menggeneralisasikan dimensi metrik sisi graf hasil operasi *comb* graf siklus terhadap graf sederhana dan terhubung yang memiliki titik dominan atau graf $K_1 + G$ dengan $G$ graf sederhana yang sebarang.

Dengan demikian, tesis ini berjudul "Dimensi metrik sisi graf hasil operasi *comb* $C_n$ terhadap graf $K_1 + G$".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, rumusan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1.2.1. Berapa batas atas dimensi metrik sisi pada graf hasil operasi *comb* $C_n$ terhadap graf $K_1 + G$, dengan graf $G$ adalah graf sederhana yang sebarang?

1.2.2. Berapa batas bawah dimensi metrik sisi pada graf hasil operasi *comb* $C_n$ terhadap graf $K_1 + G$, dengan graf $G$ adalah graf sederhana yang sebarang?

## 1.3 Batasan Masalah

Pada tesis ini, penulis membatasi graf hasil operasi *comb* $C_n$ terhadap graf $K_1 + G$, dengan graf $G$ adalah graf sederhana yang sebarang. Hal ini tentu mencakup penelitian yang dilakukan oleh Singh dkk. (2021) pada penemuan dimensi metrik sisi graf *french cycle windmill* yang merupakan graf hasil operasi *comb* $C_n$ terhadap graf komplit $K_m$ atau $K_1 + K_{m-1}$, sehingga $G = K_{m-1}$. Satu hal yang penting dalam penelitian ini adalah dibatasinya titik tetap yang dilekatkan pada graf siklus, yaitu titik dominan dari graf $K_1 + G$. Selain itu, $|V(G)| \geq 2$.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Menentukan dimensi metrik sisi pada graf hasil operasi *comb* $C_n$ terhadap graf $K_1 + G$, dengan graf $G$ adalah graf sederhana yang sebarang.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini sebagai berikut.

1.5.1. Berkontribusi dalam pengembangan ilmu teori graf khususnya dimensi metrik sehingga penelitian ini dapat dipergunakan oleh para peneliti selanjutnya dalam menentukan dimensi metrik sisi graf, khususnya graf hasil operasi.

1.5.2. Menambah pengetahuan penulis dan pembaca tentang graf khususnya pada dimensi metrik sisi graf hasil operasi, yang dalam penelitian ini adalah graf hasil operasi *comb*.

# BAB II
# TINJAUAN PUSTAKA

Dimensi metrik sisi graf menyatakan kardinalitas basis metrik sisi. Basis metrik graf $G$, yang disebut sebagai basis metrik titik dalam tesis ini, hanya merepresentasikan himpunan titik yang memiliki pengaruh berbeda ke setiap titik di graf $G$, namun belum cukup untuk menyatakan pengaruhnya terhadap seluruh sisi di graf tersebut. Kelenc dkk. (2018) membuktikan hal ini melalui temuannya bahwa jika dimensi metrik titik graf $G$ adalah $\beta(G)$ dan dimensi metrik sisinya adalah $\beta_e(G)$, maka $\beta(G) > \beta_e(G)$, $\beta(G) < \beta_e(G)$, atau $\beta(G) = \beta_e(G)$. Karena dimensi metrik sisi berkaitan dengan dimensi metrik, maka selain konsep-konsep yang terkait dimensi metrik sisi akan dibahas juga pengertian, notasi dan istilah yang terkait dengan dimensi metrik titik. Pada bagian awal, bab ini membahas konsep dasar graf, operasi graf, beserta jenis-jenis graf khusus. Adapun definisi, notasi dan istilah yang digunakan merujuk pada sumber berupa buku tentang graf oleh Hasmawati (2023) dan Chartrand dan Zhang (2020).

Tesis ini merupakan karya tulis tentang dimensi metrik sisi graf. Oleh sebab itu, Subbab pertama akan membahas mengenai konsep dasar graf. Subbab ini bertujuan untuk menjelaskan istilah-istilah pada graf.

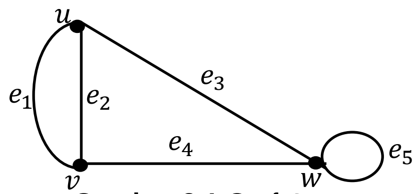
## 2.1 Konsep Dasar Graf

Rahman (2017) menjelaskan bahwa suatu graf terdiri atas satu himpunan titik dan satu himpunan sisi. Objek direpresentasikan oleh titik dan hubungan antar dua objek direpresentasikan oleh sisi. Jadi, graf dapat digunakan untuk merepresentasikan berbagai model objek beserta hubungan diantaranya.

**Definisi 2.1.** *Suatu graf adalah pasangan himpunan terurut* $(V, E)$ *dengan* $V$ *adalah himpunan berhingga yang anggotanya disebut titik dan* $E$ *adalah himpunan yang anggotanya pasangan-pasangan titik yang disebut sisi.*

Bondy dan Murty (2008) menjelaskan bahwa jika terdapat titik $u$ dan $v$ sehingga $e = uv \in E$, maka titik $u$ dan $v$ disebut bertetangga dan sisi $e$ terkait dengan titik $u$ dan $v$. Himpunan $V$ disebut himpunan titik dan $E$ disebut himpunan sisi. Pada Definisi 2.1., graf $G$ dapat ditulis $G = (V(G), E(G))$ dengan $V = V(G)$ dan $E = E(G)$. Kardinalitas $V(G)$ ditulis $|V(G)|$ dan kardinalitas $E(G)$ ditulis $|E(G)|$, berturut-turut disebut orde dan ukuran dari graf $G$.

**Contoh 2.1.** Diberikan graf $G$ dengan $V(G) = \{u, v, w\}$ dan $E(G) = \{uv, vw, uw, vw, ww\}$. Jika $uv = e_1$, $vu = e_2$, $uw = e_3$, $vw = e_4$, dan $ww = e_5$, maka graf $G$ dapat digambarkan sebagai berikut.




**Gambar 2.1** Graf $G$

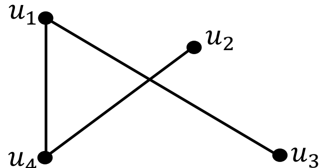
Karena, $|V(G)| = 3$ dan $|E(G)| = 5$, graf $G$ maka berorde 3 dan berukuran 5.

Himpunan titik yang bertetangga dengan titik $v \in V(G)$ disebut ketetanggan buka dari titik $v$ yang dilambangkan dengan $N(v)$. Adapun himpunan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ disebut ketetanggan tutup. Selain itu, jika terdapat dua sisi berbeda $e_1$ dan $e_2$ yang terkait dengan satu titik yang sama, maka kedua sisi itu bertetangga.

Pada Contoh 2.1., titik-titik yang bertetangga adalah titik $u$ dan $v$, titik $u$ dan $w$, serta titik $v$ dan $w$. Selain itu, sisi $e_1$ dan $e_2$ merupakan sisi yang terkait dengan titik $u$ dan $v$, sisi $e_3$ terkait dengan titik $u$ dan $w$, sisi $e_4$ terkait dengan titik $v$ dan $w$, dan sisi $e_5$ hanya terkait dengan titik $w$. Adapun sisi-sisi yang bertetangga adalah sisi $e_1, e_2$, dan $e_3$, sisi $e_1, e_2$, dan $e_4$, serta sisi $e_3, e_4$, dan $e_5$.

Misalkan $e = uv \in E(G)$ dan $u, v \in V(G)$. Jika $u = v$, maka sisi $e$ disebut *loop*. Adapun jika sisi $uv$ berbeda dengan sisi $vu$, maka kedua sisi tersebut dinamakan sisi paralel. Jadi, suatu titik pada graf dapat bertetangga dengan dirinya dan dua titik berbeda dapat terhubung oleh beberapa sisi, sisi-sisi tersebut dinamakan paralel. Jika $V(G) \neq \emptyset$, $u \neq v$, dan $uv = vu$, maka graf $G$ disebut **graf sederhana** (simple graph).

**Contoh 2.2.** Diberikan graf $G$ sederhana dengan $V(G) = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(G) = \left\{u_i u_j \middle| |i - j| \geq \frac{n}{2}\right\}$. Pilih $n = 4$, diperoleh $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) = \{u_1 u_3, u_1 u_4, u_2 u_4\}$ sehingga graf $G$ dapat digambarkan sebagai berikut.




**Gambar 2.2** Graf $G$

Berdasarkan batasan masalah pada Subbab 1.3, graf yang dibahas dalam tesis ini adalah graf sederhana. Dengan demikian, pembahasan seterusnya hanya berfokus pada graf sederhana.

**Definisi 2.2.** *Derajat dari suatu titik $v$ pada graf $G$ (disimbolkan dengan $deg(v)$) menyatakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik $v$.*

Jika graf $G$ sederhana dan $v \in V(G)$, maka $deg(v)$ menyatakan kardinalitas $N(v)$. Titik $v$ disebut titik terisolasi jika $deg(v) = 0$ dan titik $v$ disebut titik ujung jika $deg(v) = 1$. Adapun sisi yang terkait dengan titik ujung disebut sisi pendan. Selain itu, derajat maksimum dari graf $G$ (disimbolkan $\Delta(G)$) merupakan derajat tertinggi dan derajat minimumnya (disimbolkan $\delta(G)$) merupakan derajat terendah dari anggota-anggota $V(G)$. Jika $\Delta(G) = \delta(G)$, maka graf $G$ reguler.

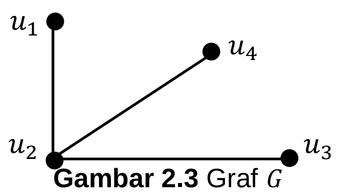
**Contoh 2.3.** Dari Gambar 2.2. diperoleh $deg(u_1) = 2$, $deg(u_2) = 1$, $deg(u_3) = 1$, dan $deg(u_4) = 2$. Jadi, $\Delta(G) = 2$ dan $\delta(G) = 1$ sehingga $\Delta(G) \neq \delta(G)$. Akibatnya, graf tersebut tidak reguler.

**Definisi 2.3.** *Misalkan graf $G$ dengan $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ dan $E(G) = \{e_i : e_i = v_i v_j \text{ untuk suatu } i, j\}$. Jalan $W$ pada graf $G$ dengan panjang $k$ adalah barisan titik dan sisi: $v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k$ dengan $e_i = v_i v_j$; $i \in \{0,1,2, \dots, k-1\}$.* Jalan $W$ disebut lintasan jika $v_i \neq v_j$ untuk setiap $i, j \in \{0,1,2, \dots, k-1\}$.

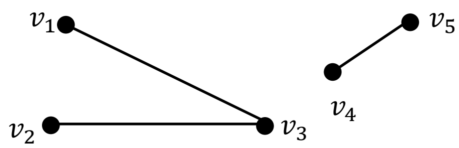
**Contoh 2.4.** Perhatikan Contoh 2.2. Berdasarkan Definisi 2.3., salah satu lintasan yang terdapat pada graf tersebut adalah $P: u_1, u_1u_4, u_4, u_4u_2, u_2$, sedangkan salah satu jalan adalah $W: u_1, u_1u_4, u_4, u_4u_2, u_2, u_2u_4, u_4$.

**Definisi 2.4.** *Graf $G$ disebut graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan titik $u$ dan $v$, $\forall u, v \in V(G)$. Sebaliknya, graf itu tak terhubung.*

**Contoh 2.5.** Diberikan graf $G$ dengan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4\}$ serta graf $H$ dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(H) = \{v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_5\}$. Kedua graf ini dapat digambarkan sebagai berikut.




**Gambar 2.3** Graf $G$




**Gambar 2.4** Graf $H$

Berdasarkan Definisi 2.4., graf $G$ merupakan graf terhubung sebab selalu ada lintasan yang menghubungkan setiap dua titik. Akan tetapi, graf $H$ tak terhubung sebab titik $v_1$ dan $v_4$ tidak dihubungkan oleh lintasan manapun.

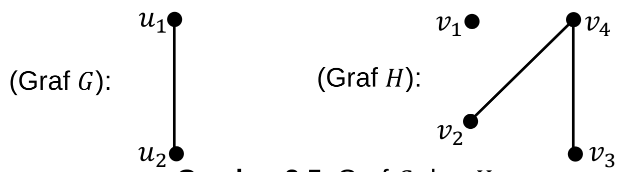
Selain konsep dasar diperlukan pembahasan tentang operasi dalam graf. Hal ini berkenaan dengan topik tesis, yaitu dimensi metrik sisi dari graf hasil operasi comb dari dua buah graf. Oleh sebab itu, Subbab berikutnya membahas tentang operasi-operasi dalam graf yang terkait dengan topik tesis ini.

## 2.2 Operasi-operasi dalam Graf

Di dalam teori graf, terdapat berbagai jenis operasi antar graf yang merupakan salah satu cara untuk memperoleh berbagai graf baru, seperti operasi gabung ($\cup$), jumlah ($+$), operasi *comb* ($\rhd$), dan lain-lain (Umilasari, 2015). Terkait dengan fokus pada tesis ini, operasi graf yang akan dibahas adalah operasi gabung ($\cup$), jumlah ($+$) dan operasi *comb* ($\rhd$) dua buah graf.

**Definisi 2.5.** *Graf hasil operasi gabung ($\cup$) antar dua buah graf, sebut graf $G$ dan graf $H$ (dinotasikan $G \cup H$) memiliki $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Lebih lanjut, graf $\bigcup_{i=1}^{n} G$ ditulis sebagai $nG$ dengan $n \in Z^+$.*

**Contoh 2.6.** Diberikan graf $G$ dan $H$ dengan $V(G) = \{u_1, u_2\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2\}$ serta $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(H) = \{v_2v_4, v_3v_4\}$. Berikut ilustrasinya.



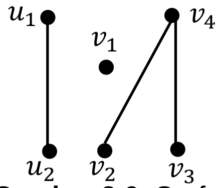

**Gambar 2.5.** Graf $G$ dan $H$

Dengan demikian, graf $G \cup H$ memiliki

$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H) = \{u_1, u_2\} \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G \cup H) = E(G) \cup E(H) = \{u_1u_2\} \cup \{v_2v_4, v_3v_4\} = \{u_1u_2, v_2v_4, v_3v_4\}$

sehingga graf $G \cup H$ dapat digambarkan sebagai berikut.




**Gambar 2.6.** Graf $G \cup H$

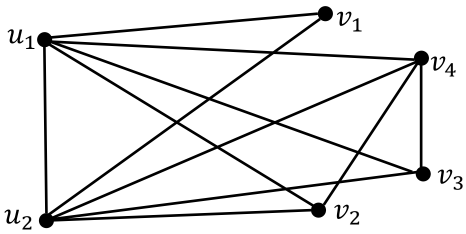
**Definisi 2.6.** *Graf hasil operasi jumlah (+) antar dua buah graf, sebut graf $G$ dan graf $H$ (dinotasikan $G + H$) memiliki $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G), v \in V(H)\}$.*

**Contoh 2.7.** Diberikan graf $G$ dan $H$ pada Contoh 2.6. Graf $G + H$ memiliki,

$V(G + H) = V(G) \cup V(H) = \{u_1, u_2\} \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$\begin{aligned} E(G + H) &= E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G), v \in V(H)\} \\ &= \{u_1u_2\} \cup \{v_2v_4, v_3v_4\} \cup \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_1v_4, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_2v_4\} \\ &= \{u_1u_2, v_2v_4, v_3v_4, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_1v_4, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_2v_4\} \end{aligned}$$

Graf $G + H$ tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.




**Gambar 2.7.** Graf $G + H$

**Definisi 2.7.** *Misalkan graf $G$ dan $H$ terhubung dan $u \in V(H)$. Graf hasil operasi comb graf $G$ terhadap graf $H$ (graf $G \rhd H$) adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian $G$ juga $|V(G)|$ kopian dari $H$ dan melekatkan titik $u$ dari masing masing graf $H$ kopian ke-i pada titik ke-i dari graf $G$* (Saputro dkk., 2017).

Penentuan titik $u$ dari graf $H$ yang hendak dilekatkan pada titik di graf $G$ dapat dilakukan secara sebarang. Akan tetapi, dengan tujuan khusus, penentuan titik $u$ dari graf $H$ dapat dilakukan secara tetap sehingga disebut titik tetap dari graf $H$.

**Contoh 2.8.** Diberikan graf sederhana $G$ dan $H$ dengan $V(G) = \{u_i | 1 \leq i \leq 4\}$, $E(G) = \{u_iu_j | i \neq j\}$ serta $V(H) = \{x_k | 1 \leq k \leq 4\}$ dan $E(H) = \{x_kx_{k+1} | 1 \leq k \leq 3\}$.

Berdasarkan Definisi 2.7., graf $G \rhd H$ artinya graf $H$ diperbanyak sebanyak $|V(G)| = 4$, sebut $H_1, H_2, \dots, H_4$. Jadi,

$V(H_1) = \{x_{1k} | 1 \leq k \leq 4\}$,

$V(H_2) = \{x_{2k} | 1 \leq k \leq 4\}$,

$V(H_3) = \{x_{3k} | 1 \leq k \leq 4\}$, dan

$V(H_4) = \{x_{4k} | 1 \leq k \leq 4\}$.

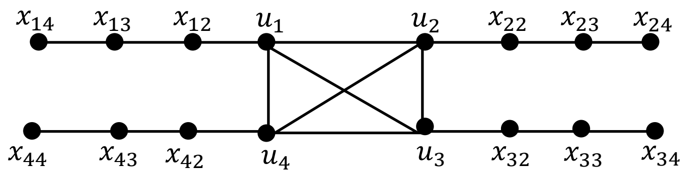
Dengan demikian, $V(H_i) = \{x_{ik} | 1 \leq i \leq 4, 1 \leq k \leq 4\}$. Dengan cara yang sama, diperoleh $E(H_i) = \left\{x_{ik}x_{i(k+1)} | 1 \leq i \leq 4, 1 \leq k \leq 4\right\}$.

Misalkan titik tetap dari graf $H$ adalah $x_1 \in H$. Jadi, pada graf $G \rhd H$ berlaku $u_i = x_{i1}$, sehingga

$$V(G \rhd H) = V(G) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{4} V(H_i) \backslash \{x_{i1}\} \right)$$

$$E(G \rhd H) = E(G) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{4} E(H_i) \backslash \{x_{i1}x_{i2}\} \right) \cup \{u_i x_{i2} | 1 \leq i \leq 4, 1\}$$

Jadi, graf $G \rhd H$ dapat digambarkan sebagai berikut.



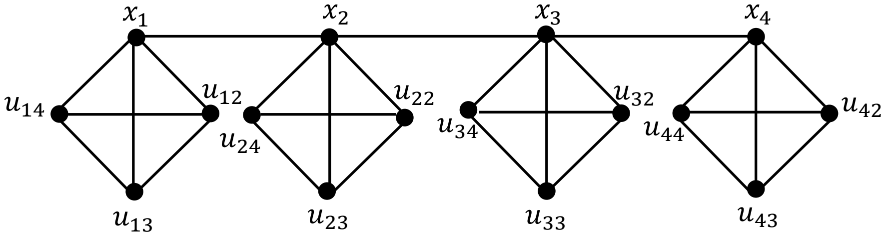

**Gambar 2.8.** Graf $G \rhd H$

Dengan cara yang sama untuk graf $H \rhd G$, maka $V(G_i) = \{u_{ki} | 1 \leq i \leq 4, 1 \leq k \leq 4\}$ dan $E(G_i) = \left\{u_{ki}u_{kj} | 1 \leq k \leq 4, 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j\right\}$. Jika $u_1 \in V(G)$ sebagai titik tetap graf $G$, maka berakibat $x_i = u_{i1}$, $x_i \in H$ dan $u_{i1} \in V(G_i)$, pada graf $H \rhd G$ sehingga diperoleh

$$V(H \rhd G) = V(H) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{4} V(G_i) \backslash \{u_{i1}\} \right)$$

$$E(H \rhd G) = E(H) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{4} E(G_i) \right)$$

Graf $H \rhd G$, graf ini dapat digambarkan sebagai berikut.




**Gambar 2.9.** Graf $H \rhd G$

Berdasarkan definisi dan dua gambar graf di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa operasi ini tidak bersifat komutatif.

Tesis ini berjudul dimensi metrik sisi graf hasil operasi comb $C_n$ terhadap graf $K_1 + G$. Graf $C_n$ merupakan salah satu graf khusus. Jadi, Subbab berikut akan membahas terkait graf-graf khusus.

## 2.3 Graf-graf Khusus

Beberapa jenis graf memiliki peranan penting dalam teori graf sehingga menjadikannya graf spesial atau khusus (Bondy & Murty, 2008). Berikut adalah beberapa jenis graf yang dimaksud sebab memiliki ciri khusus tertentu. Tentunya, graf-graf berikut merupakan graf sederhana.

### 2.3.1. Graf trivial dan graf kosong

Graf trivial merupakan graf yang berorde 1 sedangkan graf kosong adalah graf yang berukuran 0 (Chartrand & Zhang, 2020).

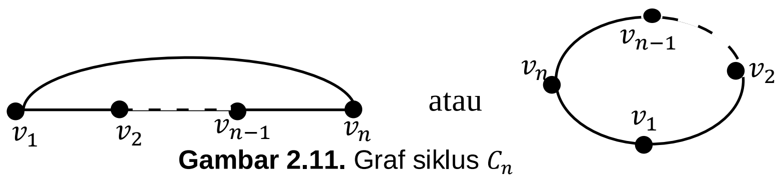
### 2.3.2. Graf lintasan

Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan. Misalkan $V(G) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(G) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$. Graf $G$ ini dinotasikan $P_n$ berorde $n$ dan berukuran $n - 1$.


**Gambar 2.10.** Graf lintasan $P_n$

### 2.3.3. Graf siklus

Graf siklus dapat diperoleh dengan menambahkan satu sisi pada graf lintasan dengan $n$ titik yang menghubungkan titik-titik berderajat 1 pada lintasan tersebut. Misalkan $V(G) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(G) = \{v_i v_{i+1(mod\ n)} | 1 \leq i \leq n\}$. Graf $G$ adalah graf siklus dengan $n$ buah titik yang dinotasikan dengan $C_n$ yang berorde dan berukuran $n$.

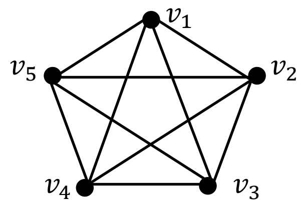



**Gambar 2.11.** Graf siklus $C_n$

### 2.3.4. Graf komplit

Graf sederhana $G$ disebut graf komplit apabila $\forall u, v \in V(G)$, $u$ dan $v$ bertetangga. Graf komplit berorde $n$ dinotasikan dengan $K_n$ dan memiliki ukuran

$\frac{n(n-1)}{2}$ (Chartrand & Zhang, 2020) dengan $(x) = n - 1$; $\forall x \in V(K_n)$. Misalkan graf $G$ sederhana dengan $V(G) = \{v_i | 1 \leq i \leq 5\}$ dan $E(G) = \{v_i v_j | i \neq j\}$. Jadi, graf $G$ adalah graf komplit dengan banyak titik 5 atau $G = K_5$.



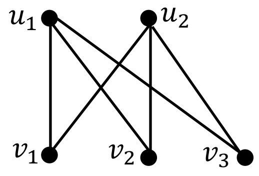

**Gambar 2.12.** Graf $K_5$

### 2.3.5. Graf bipartisi dan bipartisi komplit

Bondy dan Murty (2008) menjelaskan bahwa graf $G$ dikatakan graf bipartisi jika himpunan titiknya dapat dipartisi ke dalam dua subhimpunan titik $A$ dan $B$ sedemikian sehingga setiap sisi yang ada pada graf tersebut memiliki satu titik ujung di $A$ dan lainnya di $B$. Graf bipartisi dinotasikan dengan $G[A, B]$ (Bondy & Murty, 2008).

Sebagai contoh, $V(G) = \{v_i | 1 \leq i \leq 6\}$ dan $E(G) = \{v_1v_4, v_1v_5, v_2v_5, v_3v_6\}$. Perhatikan bahwa, $v_1, v_2$, dan $v_3$ tidak saling bertetangga, begitupun $v_4, v_5$, dan $v_6$. Jadi, dapat dibuat $A = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V(G)$ dan $B = \{v_3, v_4, v_5\} \subseteq V(G)$ sehingga setiap sisi yang ada pada graf $G$ memiliki satu titik ujung di $A$ dan lainnya di $B$. Jadi, graf $G$ bipartisi.

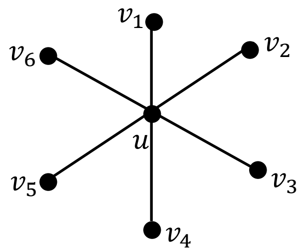
Lebih lanjut, jika graf $G[A, B]$ merupakan graf sederhana dan setiap titik di himpunan $A$ bertetangga dengan setiap titik di himpunan $B$, begitupun sebaliknya, maka graf ini disebut graf bipartisi komplit. Graf ini dinotasikan dengan $K_{m,n}$ atau $K_{n,m}$ dengan $m = |A|$ dan $n = |B|$ (Chartrand & Zhang, 2020). Contohnya, graf $K_{2,3}$ dengan $A = \{u_1, u_2\}$ dan $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, maka graf bipartisi dengan 5 titik ini digambarkan sebagai berikut.




**Gambar 2.13.** Graf bipartisi komplit $K_{2,3}$

### 2.3.6. Graf bintang

Chartrand dan Zhang (2020) menjelaskan bahwa graf bintang adalah graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dengan $m = 1$ atau $n = 1$. Dengan demikian, untuk graf bintang dapat dinotasikan sebagai $K_{1,n}, n \in Z^+$. Berikut adalah contoh gambar graf bintang $K_{1,6}$.

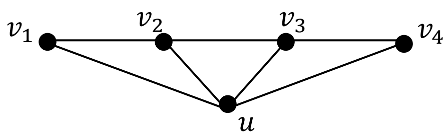



**Gambar 2.14.** Graf Bintang $K_{1,6}$

Akan tetapi, dalam tesis ini, graf bintang $K_{1,n}$ dinotasikan dengan $S_{1,n}$ yang berorde $n + 1$ dan berukuran $n$.

### 2.3.7. Graf kipas

Mufti dkk. (2020) mendefinisikan bahwa graf kipas $F_{1,n}$ merupakan graf yang diperoleh dari satu graf lintasan $P_n$ dengan menghubungkan setiap titiknya ke satu titik tambahan yang menjadi titik persekutuan. Dalam tesis ini, graf kipas dinotasikan $F_{1,n}$ yang berorde $n + 1$ dan berukuran $2n - 1$. Berikut adalah graf Kipas $F_{1,4}$.

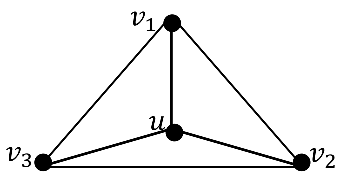



**Gambar 2.15.** Graf kipas $F_{1,4}$

### 2.3.8. Graf roda

Rahman (2017) mendefinisikan bahwa graf roda merupakan graf yang terbentuk dari graf siklus $C_n$ dengan menambahkan suatu titik baru yang selanjutnya diberikan sisi-sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan setiap titik di graf $C_n$. Graf roda dalam tesis ini dinotasikan dengan $W_{1,n}$ yang berorde $n + 1$ dan berukuran $2n$.

Berikut adalah graf roda $W_{1,3}$.




**Gambar 2.16.** Graf roda $W_{1,3}$.

Selain berkenaan dengan operasi graf, latar belakang penelitian dalam tesis ini berkaitan dengan titik dominan. Jadi, Subbab berikutnya membahas mengenai titik dominan dan graf sederhana yang memiliki titik dominan.

## 2.4 Graf Sederhana dengan Titik Dominan

**Definisi 2.8.** *Titik* $u \in V(G)$ *disebut titik dominan jika* $d(u,v) = 1$ *untuk setiap* $v \in V(G)\backslash\{u\}$ (Iswadi dkk., 2011).

**Akibat Definisi 2.8.** *Titik* $u$ *disebut titik dominan pada graf* $G$ *jika dan hanya jika* $deg(u) = |V(G)| - 1$.

**Contoh 2.9.** Diberikan graf $G$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$. Dengan demikian, diperoleh $deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 4$, $deg(v_3) = 3$, $deg(v_4) = 4$, dan $deg(v_5) = 3$.
Karena derajat titik dominan adalah $|V(G)| - 1 = 5 - 1 = 4$, maka titik dominan pada graf $G$ adalah titik $v_2$ dan $v_4$.

**Akibat Definisi 2.6.** *Misalkan graf* $G$ *adalah graf sederhana. Graf* $K_1 + G$ *adalah graf sederhana yang memiliki titik dominan.*

**Bukti:**

Misalkan graf $K_1$ dengan $V(K_1) = \{u\}$ dan graf sederhana $G$. Berdasarkan Definisi 2.4., graf $K_1 + G$ merupakan graf terhubung karena $d(u,v) = 1, \forall v \in V(K_1 + G)\backslash\{u\}$. Menurut Definisi 2.8., $u$ merupakan titik dominan. Jadi, terdapat paling sedikit satu titik dominan pada graf $K_1 + G$. Dengan demikian, graf $K_1 + G$ adalah graf sederhana yang memiliki titik dominan.

**Contoh 2.10.** Diberikan graf sederhana $G$ dengan $V(G) = \{v_i | 1 \le i \le 6\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_6\}$. Misalkan graf $K_1$ dengan $V(K_1) = \{u\}$. Berdasarkan Definisi 2.6., $V(K_1 + G) = \{u\} \cup V(G)$ dan $E(K_1 + G) = E(G) \cup \{uv_1, uv_2, uv_3, uv_4, uv_5, uv_6\}$. Karena $\{uv_1, uv_2, uv_3, uv_4, uv_5, uv_6\} \subseteq E(K_1 + G)$, maka $d(u,v) = 1, \forall v \in V(K_1 + G)\backslash\{u\}$, jadi titik $u$ dominan. Akibatnya, graf $K_1 + G$ memiliki titik dominan.

Berdasarkan graf-graf khusus yang dibahas pada Subbab 2.3, graf yang memiliki titik dominan adalah graf komplit $K_n = K_1 + K_{n-1}$, graf bintang $S_{1,n} = K_1 + nK_1$, graf roda $W_{1,n} = K_1 + C_n$, dan graf kipas $F_{1,n} = K_1 + P_n$. Hal ini berakibat bahwa

$$C_n \rhd (K_1 + mK_1) = C_n \rhd S_{1,m} \tag{2.1}$$

$$C_n \rhd (K_1 + P_m) = C_n \rhd F_{1,m} \tag{2.2}$$

$$C_n \rhd (K_1 + C_m) = C_n \rhd W_{1,m} \tag{2.3}$$

Tesis ini berfokus pada graf $C_n \rhd (K_1 + G)$. Berdasarkan Definisi 2.7., graf $K_1 + G$ akan disalin hingga banyaknya graf $K_1 + G$ sama dengan $|V(C_n)|$ dan salah satu titik dari setiap salinan grafnya dilekatkan ke tiap titik di graf $C_n$. Dalam tesis ini, digunakan titik dominan sebagai titik tetap graf $K_1 + G$ yang mengakibatkan titik tetapnya berasal dari graf $K_1$.

Selain itu, fokus tesis ini adalah menemukan dimensi metrik sisi graf $C_n \rhd (K_1 + G)$. Oleh sebab itu, Subbab berikutnya akan membahas tentang dimensi metrik sisi graf.

## 2.5 Dimensi Metrik Sisi Graf

Dimensi metrik sisi adalah salah satu topik yang merupakan pengembangan dari dimensi metrik. Dimensi metrik (dalam tesis ini disebut sebagai dimensi metrik titik) pertama kali diperkenalkan oleh Slater, Harary dan Melter (Zubrilina, 2018). Berikut adalah penjelasan dimensi metrik titik.

Diberikan graf $G$ dan sekumpulan titik terurut $W = (w_1, w_2, \ldots, w_k), w_i \in V(G)$. Selanjutnya diambil titik $v \in V(G)$, maka koordinat atau representasi titik $v$ terhadap $W$ dinyatakan dengan $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$. Jika representasi titik $v$ terhadap $W$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda, maka himpunan yang anggota-anggotanya adalah $w_1, w_2, \ldots, w_k$, sebut $W' = \{w_i | 1 \leq i \leq k\}$ dinyatakan sebagai himpunan penentu. Himpunan penentu dengan kardinalitas minimum disebut sebagai basis metrik titik dari graf $G$ dan kardinalitasnya merupakan dimensi metrik titik yang dinotasikan dengan $\beta(G)$.

Dimensi metrik titik berfokus pada pembahasan jarak antara dua titik, sedangkan konsep dimensi metrik sisi membuat pembahasan semakin kompleks sebab adanya pertimbangan dan analisis tentang jarak antara titik dan sisi pada suatu graf. Dimensi metrik sisi pertama kali diperkenalkan oleh Kelenc dkk. (2017). Oleh sebab itu, kajian dimensi metrik sisi terbilang baru di teori graf.

**Definisi 2.9.** *Misalkan $G$ adalah graf sederhana dan $u, v \in V(G)$. Jarak $u$ dan $v$ (ditulis $d(u, v)$), yakni*

$$d(u,v) = \begin{cases} 0; \text{jika } u = v \\ k; \text{jika } u, v \text{ dihubungkan oleh suatu lintasan terpendek dengan panjang } k \\ \infty; \text{ jika } u, v \text{ tidak terhubung oleh lintasan manapun} \end{cases}$$

(Diestel, 2005)

**Contoh 2.11**. Diberikan graf $G$ sederhana dengan $V(G) = \{v_i|1 \leq i \leq 8\}$ dan $E(G) = \{e_i = v_i v_{i+4}|1 \leq i \leq 4\} \cup \{v_i v_j|i \neq j, 5 \leq i, j \leq 8\}$ dengan $\{v_i v_j|i \neq j, 5 \leq i, j \leq 8\} = \{e_5 = v_5 v_6, e_6 = v_6 v_7, e_7 = v_7 v_8, e_8 = v_8 v_5, e_9 = v_5 v_7, e_{10} = v_6 v_8\}$.

Banyaknya pasangan titik berbeda dari graf $G$ (urutan tidak diperhatikan) adalah $C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8.7}{2} = 28$. Berikut jarak antar dua buah titiknya.

- $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_1, v_4) = d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_3, v_4) = 3$,
- $d(v_1, v_6) = d(v_1, v_7) = d(v_1, v_8) = d(v_2, v_5) = d(v_2, v_7) = d(v_2, v_8) = d(v_3, v_5) = d(v_3, v_6) = d(v_3, v_8) = d(v_4, v_5) = d(v_4, v_6) = d(v_4, v_7) = 2$
- $d(v_1, v_5) = d(v_2, v_6) = d(v_3, v_7) = d(v_4, v_8) = d(v_5, v_6) = d(v_5, v_7) = d(v_5, v_8) = d(v_6, v_7) = d(v_6, v_8) = d(v_7, v_8) = 1$.

**Definisi 2.10.** *Misalkan $u, v, w \in V(G)$ dengan sisi $e = uw$ pada graf $G$. Jarak antara titik $v$ dan sisi $e$ adalah $s(e, v) = min\,\{d(u, v), d(w, v)\}$* (Kelenc dkk., 2018).

**Contoh 2.12.** Diberikan graf $G$ pada Contoh 2.11., maka jarak antara sisi $e_2$ dan titik $v_8$ adalah $s(e_2, v_8) = min\,\{d(v_2, v_8), d(v_6, v_8)\} = min\{2,1\} = 1$.

**Definisi 2.11.** *Diberikan suatu $p$ –tuple titik $R = (r_1, r_2, \ldots, r_p), r_i \in V(G)$. Representasi sisi $e$ terhadap $R$ dinotasikan $r(e|R)$ dengan $r(e|R) = (s(e, r_1), s(e, r_2), \ldots, s(e, r_p))$. Jika $\forall e_i, e_j \in E(G), r(e_i|R) \neq r(e_j|R)$, maka himpunan titik yang anggota-anggotanya $r_1, r_2, \ldots, r_p$, yaitu $R' = \{r_i|1 \leq i \leq p\}$ disebut himpunan penentu sisi.*

**Contoh 2.13.** Diberikan graf $G$ pada Contoh 2.11.

Pilih $R = (v_1, v_2, v_3, v_4), v_i \in V(G)$, maka

| | |
|---|---|
| $r(e_1\|R) = (0,2,2,2)$ | $r(e_6\|R) = (2,1,1,2)$ |
| $r(e_2\|R) = (2,0,2.2)$ | $r(e_7\|R) = (2,2,1,1)$ |
| $r(e_3\|R) = (2,2,0,2)$ | $r(e_8\|R) = (1,2,2,1)$ |
| $r(e_4\|R) = (2,2,2,0)$ | $r(e_9\|R) = (2,1,2,1)$ |
| $r(e_5\|R) = (1,1,2,2)$ | $r(e_{10}\|R) = (1,2,1,2)$ |

Diperoleh $r(e_1|R) \neq r(e_2|R) \neq \cdots \neq r(e_{10}|R)$, maka $R' = \{v_i|1 \leq i \leq 4\}$ adalah himpunan penentu sisi.

**Definisi 2.12.** *Himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum disebut basis metrik sisi dan kardinalitasnya disebut dimensi metrik sisi graf (dinotasikan $\beta_e(G)$ untuk graf $G$)* (Wei dkk., 2020).

**Contoh 2.14.** Diberikan graf $C_4$ dengan $V(C_4) = \{v_i | 1 \leq i \leq 4\}$ dan $E(C_4) = \{e_i = v_i v_{i+1(mod\ 4)} | 1 \leq i \leq 4\}$.

Jika diambil $R = (v_i), i \in (1,2,3,4)$, maka $r(e_i|R) = (0)$ dan $r\left(e_{i+3(mod\ 4)}\middle|R\right) = (0)$. Akibatnya, terdapat dua sisi dengan representasi yang sama. Jadi $R' = \{v_i\}, i \in (1,2,3,4)$, bukan himpunan penentu sisi yang dalam hal ini $|R'| = 1$.

Jika diambil $R = (v_1, v_2), v_i \in V(C_4)$, maka $r(e_1|R) = (0,0)$, $r(e_2|R) = (1,0)$, $r(e_3|R) = (1,1)$, dan $r(e_4|R) = (0,1)$. Karena $r(e_1|R) \neq r(e_2|R) \neq r(e_3|R) \neq r(e_4|R)$, maka $R' = \{v_1, v_2\}$ adalah himpunan penentu sisi. Jadi, $R' = \{v_1, v_2\}$ merupakan himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 2 sehingga himpunan $R'$ adalah basis metrik sisi. Jadi, $\beta_e(C_4) = 2$.

## 2.6 Hasil Penelitian Terdahulu

Subbab ini akan menyajikan beberapa hasil penelitian sebelumnya tentang dimensi metrik sisi. Hasil-hasilnya disajikan dalam teorema-teorema berikut.

**Teorema 2.1.** Untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 2$, $\beta_e(P_n) = 1$, $\beta_e(C_n) = 2$, dan $\beta_e(K_n) = n - 1$ (Kelenc dkk., 2018)

**Teorema 2.2.** $\beta_e(G) = 1$ jika dan hanya jika graf $G$ adalah graf lintasan. (Kelenc dkk., 2018)

**Teorema 2.3.** Untuk sebarang graf bipartit komplit $K_{r,t}$, kecuali $K_{1,1}$, maka $\beta_e\left(K_{r,t}\right) = r + t - 2$. (Kelenc dkk., 2018)

**Corollary 2.1.** Karena graf bintang $S_{1,n}$ merupakan graf bipartit komplit $K_{1,n}$, maka $\beta_e\left(S_{1,n}\right) = n - 1$.

**Teorema 2.4.** Jika $F_{1,n}$ adalah graf kipas, maka

$$\beta_e\left(F_{1,n}\right) = \begin{cases} n, & untuk\ n = 2 \\ n - 1, & untuk\ n \geq 3 \end{cases}$$ (Kelenc dkk., 2018)

**Teorema 2.5.** Jika $W_{1,n}$ adalah graf roda, maka

$$\beta_e(W_{1,n}) = \begin{cases} n\,, & untuk\ n = 3 \\ n-1, & untuk\ n \geq 4 \end{cases} \qquad \text{(Kelenc dkk., 2018)}$$

**Teorema 2.6.** Misalkan graf terhubung $G$ dengan $|V(G)| = n$. Jika terdapat titik $v \in V(G)$ dengan $deg(v) = n-1$ maka $\beta_e(G) = n-1$ atau $\beta_e(G) = n-2$. Lebih lanjut, $\beta_e(G) = n-1$ jika terdapat dua titik berbeda yang berderajat $n-1$. (Kelenc dkk., 2018).

**Teorema 2.7.** Misalkan graf terhubung $G$ dengan $|V(G)| = n$. Misalkan untuk sebarang $x \in V(G)$ terdapat titik lain sebut $u \in V(G)$ sedemikian sehingga $(V \backslash N(x)) \subseteq N(u)$, maka $\beta_e(K_1 + G) = n$. Untuk kasus lain, $\beta_e(G) = n-1$. (Zubrilina, 2018).

**Teorema 2.8.** Misalkan graf terhubung $G$ dengan $|V(G)| = n$. Misalkan terdapat titik $v \in V(G)$ yang berderajat $n-1$. $\beta_e(G) = n-2$ jika terdapat titik $u \in V(G)\backslash\{v\}$ sedemikian sehingga untuk sebarang $x \in N(u)\backslash\{v\}$, $(V(G)\backslash\{v\})\backslash(N(x) \cup N(u)) \neq \emptyset$ jika $N(u)\backslash\{v\} \neq \emptyset$. Untuk lainnya, $\beta_e(G) = n-1$. (Wei dkk., 2020)

**Teorema 2.9.** Graf $CW_n^m$ atau graf *french cycle windmill* adalah graf hasil operasi *comb* $C_m$ dan $K_n$. $\beta_e\,(CW_n^m) = \beta_e(C_m \rhd K_n) = m(n-2)$ (Singh dkk., 2021), dengan demikian, $C_n \rhd K_m = C_n \rhd (K_1 + K_{m-1})$.

Berikut diberikan contoh penentuan dimensi metrik sisi graf hasil operasi comb graf siklus $C_3$ terhadap suatu graf sederhana dengan titik dominan, yaitu graf bintang $S_{1,4}$. Titik tetap dari graf $S_{1,4}$ yang dilekatkan pada graf $C_3$ dalam penelitian ini merupakan titik dominan. Berdasarkan hal itu, secara induktif diperoleh $\beta_e(C_3 \rhd S_{1,4}) = 9$.

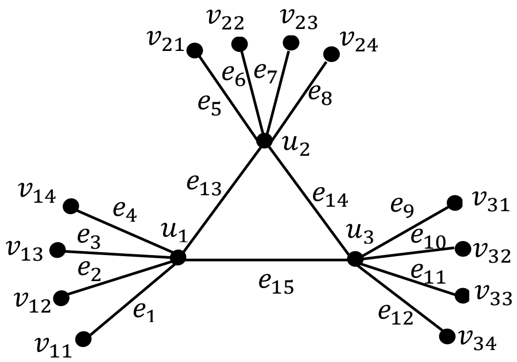
Misalkan $V(C_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E(C_3) = \{e_{13} = u_1u_2, e_{14} = u_2u_3, e_{15} = u_1u_3\}$ serta $V(S_{1,4}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(S_{1,4}) = \{e_1 = v_1v_5, e_2 = v_2v_5, e_3 = v_3v_5, e_4 = v_4v_5\}$. Misalkan pula, $S_{1,4} = H$ dan $v_5$ titik dominan graf $H$, maka dengan menggunakan Definisi 2.7. $V(H_i) = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}, v_{i5}\}$ dan $E(H_i) = \{e_{j+4(i-1)} | e_j = v_jv_5, 1 \leq j \leq 4\}$. Jadi,

$$V(C_3 \rhd S_{1,4}) = V(C_3 \rhd H) = V(C_3) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3} V(H_i)\backslash\{v_{i5}\}\right)$$

$$E(C_3 \rhd S_{1,4}) = E(C_3 \rhd H) = E(C_3) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{3} E(H_i) \right)$$

$$= E(C_3) \cup \{e_{j+4(i-1)} | 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4\}.$$

Berikut adalah gambar dari graf $C_3 \rhd S_{1,4}$.



**Gambar 2.17.** Graf $C_3 \rhd S_{1,4}$

- Ambil sekumpulan titik terurut $R = (u_1, u_2, u_3)$, maka

$$r(e_1|R) = r(e_2|R) = r(e_3|R) = r(e_4|R) = (0,1,1)$$

Jadi, $R' = \{u_i | 1 \leq i \leq 3\}$ bukan himpunan penentu sisi.

- Ambil $R = (u_1, v_{11}, u_2, u_3)$, maka

$$r(e_2|R) = r(e_3|R) = r(e_4|R) = (0,1,1,1)$$

Jadi, $R' = \{u_i, v_{11} | 1 \leq i \leq 3\}$ bukan himpunan penentu sisi.

- Ambil $R = (u_1, v_{11}, v_{12}, u_2, u_3)$, maka

$$r(e_3|R) = r(e_4|R) = (0,1,1,1,1)$$

Jadi, $R' = \{u_i, v_{11}, v_{12} | 1 \leq i \leq 3\}$ bukan himpunan penentu sisi.

- Ambil $R = (u_1, v_{11}, v_{12}, v_{13}, u_2, u_3)$, maka

$$r(e_5|R) = r(e_6|R) = r(e_7|R) = r(e_8|R) = (1,2,2,2,0,1)$$

Jadi, $R' = \{u_i, v_{11}, v_{12}, v_{13} | 1 \leq i \leq 3\}$ bukan himpunan penentu sisi.

- Ambil $R = (u_1, v_{11}, v_{12}, v_{13}, u_2, v_{21}, v_{22}, u_3)$, maka

$$r(e_7|R) = r(e_8|R) = (1,2,2,2,0,1,1,1)$$

Jadi, $R' = \{u_i, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22} | 1 \leq i \leq 3\}$ bukan himpunan penentu sisi.

- Ambil $R = (u_1, v_{11}, v_{12}, v_{13}, u_2, v_{21}, v_{22}, v_{23}, u_3, v_{31}, v_{32}, v_{33})$, maka

$r(e_1|R) = (0,0,1,1,1,2,2,2,1,2,2,2)$ $r(e_5|R) = (1,2,2,2,0,0,1,1,1,2,2,2)$ $r(e_9|R) = (1,2,2,2,1,2,2,2,0,0,1,1)$
$r(e_2|R) = (0,1,0,1,1,2,2,2,1,2,2,2)$ $r(e_6|R) = (1,2,2,2,0,1,0,1,1,2,2,2)$ $r(e_{10}|R) = (1,2,2,2,1,2,2,2,0,1,0,1)$

$r(e_3|R) = (0,1,1,0,1,2,2,2,1,2,2,2)$ $r(e_7|R) = (1,2,2,2,0,1,1,0,1,2,2,2)$ $r(e_{11}|R) = (1,2,2,2,1,2,2,2,0,1,1,0)$

$r(e_4|R) = (0,1,1,1,1,2,2,2,1,2,2,2)$ $r(e_8|R) = (1,2,2,2,0,1,1,1,1,2,2,2)$ $r(e_{12}|R) = (1,2,2,2,1,2,2,2,0,1,1,1)$

$r(e_{13}|R) = (0,1,1,1,0,1,1,1,1,2,2,2)$

$r(e_{14}|R) = (1,2,2,2,0,1,1,1,0,1,1,1)$

$r(e_{15}|R) = (0,1,1,1,1,2,2,2,0,1,1,1)$

Karena tidak ada representasi yang sama maka $R' = \{u_i, v_{ij} | 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3\}$ adalah himpunan penentu sisi.

Perhatikan bahwa, penghapusan titik $u_1, u_2, u_3$ dapat dilakukan dan himpunan $R'$ yang baru adalah himpunan penentu sisi dengan jumlah anggota yang lebih minimum.

- Ambil $R = (v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33})$, maka

$r(e_1|R) = (0,1,1,2,2,2,2,2,2)$ $r(e_5|R) = (2,2,2,0,1,1,2,2,2)$ $r(e_9|R) = (2,2,2,2,2,2,0,1,1)$

$r(e_2|R) = (1,0,1,2,2,2,2,2,2)$ $r(e_6|R) = (2,2,2,1,0,1,2,2,2)$ $r(e_{10}|R) = (2,2,2,2,2,2,1,0,1)$

$r(e_3|R) = (1,1,0,2,2,2,2,2,2)$ $r(e_7|R) = (2,2,2,1,1,0,2,2,2)$ $r(e_{11}|R) = (2,2,2,2,2,2,1,1,0)$

$r(e_4|R) = (1,1,1,2,2,2,2,2,2)$ $r(e_8|R) = (2,2,2,1,1,1,2,2,2)$ $r(e_{12}|R) = (2,2,2,2,2,2,1,1,1)$

$r(e_{13}|R) = (1,1,1,1,1,1,2,2,2)$

$r(e_{14}|R) = (2,2,2,1,1,1,1,1,1)$

$r(e_{15}|R) = (1,1,1,2,2,2,1,1,1)$

Karena tidak ada representasi sisi yang sama terhadap $R$ maka $R' = \{v_{ij} | 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3\}$ adalah himpunan penentu sisi. Perhatikan apabila dihapus salah satu anggota $R$, maka $R'$ bukan himpunan penentu sisi. Jadi, $R'$ basis metrik sisi dank arena $|R'| = 9$, maka $\beta_e(C_3 \rhd S_{1,4}) = 9$.