

3.6. Daftar Pustaka

- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York, Springer.
- Chakraborty, K., Jana, S., & Kar, T. K. (2012). Global Dynamics and Bifurcation in a Stage Structured Prey–Predator Fishery Model with Harvesting. *Applied Mathematics and Computation*, 218(18), 9271-9290.
- Chen, S., Wei, J., & Yu, J. (2018). Stationary Patterns of a Diffusive Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 39(1), 33-57.
- Clark, C.W. (1990). *Mathematical Bioeconomic: The Optimal Management of Renewable Resources*. New York, Wiley & Sons.
- Dubey, B., Agarwal, S., & Kumar, A. (2018). Optimal Harvesting Policy of a Prey–Predator Model with Crowley–Martin Type Functional Response and Stage Structure in the Predator. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 23(4), 493-514.
- Firman, Toaha, S., & Kasbawati. (2014). Modification of the Trajectory Following Method for Asymptotic Stability in a System Nonlinear Control. *Nonlinear Dynamics and System Theory* 159(1), 7923-7934.
- Frisman, E. Y., Zhdanova, O. L., Kulakov, M. P., Neverova, G. P., & Revutskaya, O. L. (2021). Mathematical Modeling of Population Dynamics Based on Recurrent Equations: Results and Prospects. *Biology Bulletin*, 48(1), 1-15.
- Hossain, S., Haque, M. M., Kabir, M. H., Gani, M. O., & Sarwardi, S. (2021). Complex Spatiotemporal Dynamics of a Harvested Prey–Predator Model with Crowley–Martin Response Function. *Results in Control and Optimization*, 5(1), 1-7

- Liao, T., Yu, H., & Zhao, M. (2017). Dynamics of a Delayed Phytoplankton-Zooplankton System with Crowley-Martin Functional Response. *Advances in Difference Equations*, 2017(5), 1–30.
- Nasution, S. H., & Dina, R. (2019). Population Structure and Gonadal Maturity Stage of Endemic and Alien Fish Dominant Species in Lake Matano, South Sulawesi. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 380(1), 1-8.
- Ndii, M.Z., & Supriatna, A.K. (2020). Stochastic Dengue Mathematical Model in the Presence of Wolbachia: Exploring the Disease Extinction. *Nonlinear Dynamics and System Theory*, 20(2), 214-227.
- Qu, Y., & Wei, J. (2010). Bifurcation Analysis in a Predator–Prey System with Stage-Structure and Harvesting. *Journal of the Franklin Institute*, 347(7), 1097-1113.
- Santra, P. K., Mahapatra, G. S., & Phaijoo, G. R. (2020). Bifurcation and Chaos of a Discrete Predator-Prey Model with Crowley–Martin Functional Response Incorporating Proportional Prey Refuge. *Mathematical Problems in Engineering*, 202(1), 5309814.
- Sivasamy, R., Sathiyathan, K., & Balachandran, K. (2019). Dynamics of a Modified Leslie-Gower Model with Crowley-Martin Functional Response and Prey Harvesting. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 8(4), 621-636.
- Toaha, S. (2013). *Pemodelan Matematika dalam Dinamika Populasi*. Makassar, Dua Satu Press.
- Toaha, S., & Azis, M. I. (2018). Stability and Optimal Harvesting of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model. In *Journal of Physics: Conference Series* 979 (1), 1-8.
- Toaha, S., Firman, & Ribal, A. (2022). Global Stability and Optimal Harvesting of Predator-Prey Model with Holling Response Function of

Type II and Harvesting in Free Area of Capture. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 22(1), 105–116.

Toaha, S., Kusuma, J., Khaeruddin, & Bahri, M. (2014). Stability Analysis and Optimal Harvesting Policy of Prey-Predator Model with Stage Structure for Predator. *Applied Mathematical Sciences*, 8(159), 7923–7934.

Zaghdani, A. (2021). Mathematical Study of a Modified SEIR Model for the Novel SARS-Cov-2 Coronavirus. *Nonlinear Dynamics and System Theory*, 21(3), 326-336.

IV. ANALISIS WAKTU TUNDA PADA MODEL MANGSA PEMANGSA YANG BERMIGRASI DENGAN FUNGSI RESPONS TIPE CROWLEY-MARTIN

4.1. Abstrak

Model matematika yang disusun menggambarkan adanya interaksi antara mangsa dengan pemangsa dengan adanya migrasi diantara pemangsa dan menganalisis adanya pengaruh waktu tunda pada interaksi mangsa dengan pemangsa pada area diizinkan pemanenan. Pelibatan waktu tunda diasumsikan sebagai masa pertumbuhan populasi hingga masa kematangan. Hasil analisis menunjukkan bahwa perubahan parameter waktu tunda dari kecil menjadi besar dari batas waktu tunda menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan stabil menjadi tidak stabil dan terjadi bifurkasi. Hal tersebut menandakan bahwa pada model mangsa pemangsa dengan tingkat pemanenan dan waktu tunda. Untuk pengembangan selanjutnya dapat pertimbangan asumsi yang mendekati fenomena realitas dan dapat melibatkan fungsi respon yang lebih kompleks dengan berbagai macam tipe Holling.

Kata Kunci: Model Mangsa-Pemangsa, Crowley-Martin Type, Time Delay.

4.2. Pendahuluan

Interaksi di antara spesies merupakan fenomena alam yang biasa terjadi. Interaksi tersebut dapat dimodelkan secara matematika dengan menggunakan berbagai model interaksi diantaranya model mangsa pemangsa. Model tersebut disusun untuk menjelaskan fenomena yang terjadi agar lebih mudah dipahami dan dapat digunakan untuk memprediksikan populasi atau spesies pada waktu tertentu (Dubey *et al.*, 2018). Beberapa studi menjelaskan bahwa penyusunan model interaksi populasi dapat mempertimbangkan pengaruh fungsi respon, migrasi, dan waktu tunda (Li *et al.*, 2015).

Interaksi di antara populasi dapat menyebabkan perubahan populasi yang dapat mendekati atau menjauhi kapasitas batas (*carring capacity*). Sebagai contoh adanya individu yang tidak dapat melahirkan terus menerus sepanjang hidupnya atau adanya beberapa individu yang belum mampu berkembang biak, sehingga memerlukan waktu tunda (*time delay*) untuk berkembang biak (Mondal & Samanta, 2021). Kondisi ini dikenal dengan masa pertumbuhan menuju kematangan spesies atau adanya waktu tunda dalam masa pertumbuhan hingga masa kematangan populasi. Waktu tunda penting dalam pemodelan masalah nyata sebab keputusan biasanya dibuat berdasarkan informasi pada keadaan sebelumnya, sehingga penting untuk dipertimbangkan dalam memodelkan pertumbuhan populasi (Huang *et al.*, 2019).

Setiap spesies selalu mengalami perubahan dari waktu ke waktu, dimulai dengan adanya kelahiran, proses perkembangan, hingga kematian bahkan sampai pada kepunahan. Perubahan tersebut yang kemudian dikenal sebagai model pertumbuhan logistic yang digunakan untuk menggambarkan pertumbuhan suatu populasi (Chakraborty *et al.*, 2011). Model pertumbuhan logistik merupakan persamaan matematika yang menggambarkan pertumbuhan populasi dalam suatu ekosistem dengan mempertimbangkan daya dukung lingkungan. Keadaan daya dukung lingkungan dapat berubah dengan adanya pertumbuhan spesies dari waktu ke waktu. Akibatnya, pertumbuhan populasi akan mengalami penundaan waktu. Penundaan tersebut menyebabkan penurunan populasi tetapi kemudian terjadi peningkatan sehingga terjadi osilasi pada pertumbuhan populasi.

Model pertumbuhan logistik tidak dapat mendeskripsikan pertumbuhan populasi pada kasus keterlambatan atau adanya waktu tunda, sehingga diperlukan pengembangan model pertumbuhan logistik dengan penambahan variable waktu tunda. Menurut Haberman dalam (Toaha, 2018) pelibatan waktu tunda dalam model menjadi sangat penting mengingat laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah

populasi pada waktu sekarang (t), akan tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya atau pada waktu ($t - \tau$). Hal ini disebabkan karena jumlah populasi sekarang tidak serta-merta mempengaruhi laju pertumbuhan populasi, tetapi memerlukan beberapa saat untuk memberikan respon pada laju pertumbuhan populasi.

Pelibatan waktu tunda dalam model matematika menjadi salah satu faktor penting yang menyebabkan terjadinya perubahan kestabilan titik kesetimbangan interior dan terjadi bifurkasi. Sebagai contoh, analisis pengaruh waktu tunda karena masa inkubasi penyakit pada populasi mangsa pemangsa. Zhou *et al.*, (2009) menganalisis tiga dimensi model eko-epidemiologi dengan waktu tunda. Hu & Li (2012) telah menyelidiki model mangsa-pemangsa yang tertunda pada kedua populasi. Xu & Zhang (2013) model mangsa pemangsa yang tertunda dengan penyakit pada pemangsa.

Selain itu, terdapat beberapa penelitian yang mengkaji pengaruh waktu tunda dalam model ekologi, diantaranya, Yuang *et al.*, (2015) menganalisis waktu tunda dengan modifikasi model mangsa pemangsa Leslie-Gower dan dikembangkan oleh Yang & Zhang (2017) yang memperhatikan dinamika dalam difusi model. Huang *et al.*, (2019) menganalisis strategi pengendalian bifurkasi model mangsa pemangsa fraksional dengan waktu tunda dan dikembangkan lagi Huang & Cao (2019) dengan melakukan studi komparatif pengendalian bifurkasi model tersebut. Selanjutnya, Djilali (2019) mengkaji pengaruh bentuk kawanan dalam model mangsa pemangsa difusi dengan adanya waktu tunda. Kajian tentang pengaruh waktu tunda dalam model dengan berbagai pendekatan telah dilakukan oleh banyak ahli sebagaimana diuraikan sebelumnya. Dengan demikian, focus kajian penelitian ini yaitu analisis model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley-Martin dengan pelibatan waktu tunda dan migrasi diantara pemangsa.

4.3. Metode

Model sistem akan dianalisis kestabilan titik kesetimbangan dan menentukan ambang batas waktu tunda. Metode yang digunakan dalam menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dan penentuan ambang batas waktu tunda adalah metode pelinearan dengan pendekatan transformasi bentuk sehingga diperoleh persamaan karakteristik melalui matriks Jacobian. Metode tersebut dapat diaplikasikan untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model nonlinear jika titik kesetimbangan yang stabil untuk $\tau = 0$. Selanjutnya, karena nilai eigen yang terhasil merupakan suatu fungsi yang kontinu terhadap τ maka nilai eigen yang bergantung kepada τ juga masih mempunyai bagian real yang positif untuk suatu waktu τ yang relatif kecil. Dengan menggunakan pendekatan dalam metode tersebut, penentuan ambang batas nilai waktu tunda τ dapat dilakukan sehingga terjadinya bifurkasi.

Bifurkasi dimaknai sebagai perubahan jumlah atau kestabilan titik kesetimbangan dalam suatu sistem dinamik. Nilai parameter ketika terjadinya bifurkasi dinamakan titik bifurkasi yang salah satu jenisnya dikenal dengan istilah bifurkasi Hopf. Bifurkasi dapat bersifat superkritis atau subkritis yang mengakibatkan sistem menjadi stabil atau tidak stabil. Dalam persamaan diferensial dengan waktu tunda digunakan dalam menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan yaitu (1) syarat dan kondisi perlu untuk titik kesetimbangan menjadi stabil asimtotik untuk semua $\tau \geq 0$ yaitu (a) bagian real untuk setiap akar-akar dari $\Delta(\lambda, 0) = 0$ adalah negative, (b) untuk setiap w dan $\tau \geq 0$, $\Delta(iw, \tau) \neq 0$, dimana $i = \text{imajiner}$. (2) Jika nilai eigen dari sebuah persamaan karakteristik bernilai positif dan persamaan karakteristik dalam bentuk polinom berderajat n mempunyai akar real positif, maka titik kesetimbangan adalah stabil asimtotik untuk $\tau \geq 0$ (Kar, 2003).

4.4. Hasil Analisis

4.4.1. Model Matematika

Model awal dengan adanya interaksi antara pemangsa dapat ditunjukkan pada persamaan berikut

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= rB \left(1 - \frac{B}{K}\right) - \frac{\alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)} - \beta MB, \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{\delta \alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)} - (b + \sigma)N + \theta M, \\ \frac{dM}{dt} &= \vartheta MB - cM + \sigma N - \theta M,\end{aligned}\tag{4.1}$$

dengan $B(0) \geq 0$, $N(0) \geq 0$, $M(0) \geq 0$.

Selanjutnya dengan penambahan pengaruh waktu tunda (*time delay*) pada populasi mangsa dan populasi pemangsa pada area tercemar dengan τ yang menyatakan pertumbuhan hingga kematangan mangsa. Dengan alasan ekologis bahwa pemangsaan pada area yang tercemar mengkonsumsi mangsa yang sudah matang. Dengan demikian, persamaan tersebut dapat dikembangkan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= rB(t) \left(1 - \frac{B(t)}{K}\right) - \frac{\alpha N(t)B(t)}{1+\eta B(t)+\mu N(t)+\eta B(t)\mu N(t)} - \beta B(t - \tau)M(t), \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{\delta \alpha N(t)B(t)}{1+\eta B(t)+\mu N(t)+\eta B(t)\mu N(t)} - (b + \sigma)N(t) + \theta M(t), \\ \frac{dM}{dt} &= \vartheta B(t - \tau)M(t) - cM(t) + \sigma N(t) - \theta M(t),\end{aligned}\tag{4.2}$$

dengan $B(0) \geq 0$, $N(0) \geq 0$, $M(0) \geq 0$.

4.4.2. Analisis Kestabilan

Hasil analisis persamaan (4.2) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan interior bersifat stabil. Pemberian waktu tunda $\tau > 0$ akan menyebabkan perubahan kestabilan titik tetap dari stabil menjadi tidak stabil. Untuk menganalisis kestabilan suatu sistem disekitar titik kesetimbangan terlebih dahulu dilakukan linearisasi sistem persamaan (4.2) dengan transformasi $X(t) = B(t) - B^*$, $Y(t) = N(t) - N^*$, dan $Z(t) = M(t) - M^*$.

Sebelum melakukan linearisasi persamaan (4.2) perlu diperhatikan,

$$\frac{N(t)B(t)}{1+\eta B(t)+\mu N(t)+\eta B(t)\mu N(t)} = \frac{1}{\eta\mu} \left(1 - \frac{1}{1+\eta B(t)} - \frac{1}{1+\mu N(t)} + \frac{1}{(1+\eta B(t))(1+\mu N(t))} \right).$$

Selanjutnya, substitusi $X(t)$, $Y(t)$ dan $Z(t)$ ke persamaan (4.2) sehingga diperoleh,

- Untuk kompartemen $\frac{dB}{dt}$

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= r(X(t) + B^*) \left(1 - \frac{X(t)+B^*}{K} \right) - \frac{\alpha}{\eta\mu} \left(1 - \frac{1}{1+\eta(X(t)+B^*)} - \frac{1}{1+\mu(Y(t)+N^*)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(1+\eta(X(t)+B^*))(1+\mu(Y(t)+N^*))} \right) - \beta(X(t - \tau) + B^*)(Z(t) + M^*). \\ &= rX(t) + rB^* - \frac{r(X(t)+B^*)^2}{K} - \frac{\alpha}{\eta\mu} \left(1 - \frac{1}{1+\eta B^*} + \frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} - \right. \\ &\quad \frac{\eta^2 X(t)^2}{(1+\eta B^*)^3 + \eta(1+\eta B^*)^2 X(t)} - \frac{1}{1+\mu N^*} + \frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{\mu^2 Y(t)^2}{(1+\mu N^*)^3 + \mu(1+\mu N^*)^2 Y(t)} + \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{1+\eta B^*} - \frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} + \frac{\eta^2 X(t)^2}{(1+\eta B^*)^3 + \eta(1+\eta B^*)^2 X(t)} \right) \left(\frac{1}{1+\mu N^*} - \frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\mu^2 Y(t)^2}{(1+\mu N^*)^3 + \mu(1+\mu N^*)^2 Y(t)} \right) \right) - \beta X(t - \tau)Z(t) - \beta B^*Z(t) - \beta X(t - \tau)M^* - \\ &\quad \beta B^*M^*. \end{aligned}$$

Dengan mengabaikan perkalian antar variabel dan mengabaikan suku-suku yang berorde lebih dari satu maka didapatkan persamaan berikut

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= rX(t) - \frac{2}{K}rX(t)B^* - \frac{\alpha}{\eta\mu} \left(\frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} + \frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)} \left(\frac{\eta X(t)}{1+\eta B^*} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\mu Y(t)}{1+\mu N^*} \right) \right) - \beta B^*Z(t) - \beta X(t - \tau)M^*. \\ &= rX(t) - \frac{2}{K}rX(t)B^* - \frac{\alpha}{\eta\mu} \left(\frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} + \frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2(1+\mu N^*)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu Y(t)}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)^2} \right) - \beta B^*Z(t) - \beta X(t - \tau)M^*. \\ &= rX(t) - \frac{2}{K}rX(t)B^* - \frac{\alpha}{\eta\mu} \left(\frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} - \frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2(1+\mu N^*)} \right) + \frac{\alpha}{\eta\mu} \left(\frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu Y(t)}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)^2} \right) - \beta B^*Z(t) - \beta X(t - \tau)M^*. \end{aligned}$$

$$\dot{X}(t) = \left(r \left(1 - \frac{2}{K} B^* \right) - \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{1}{(1+\eta B^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*)^2 (1+\mu N^*)} \right) \right) X(t) - \frac{\alpha}{\eta} \left(\frac{1}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*) (1+\mu N^*)^2} \right) Y(t) - \beta B^* Z(t) - \beta X(t - \tau) M^*. \quad (4.3)$$

- Untuk kompartemen $\frac{dN}{dt}$.

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \frac{\delta\alpha}{\eta\mu} \left(1 - \frac{1}{1+\eta(X(t)+B^*)} - \frac{1}{1+\mu(Y(t)+N^*)} + \frac{1}{(1+\eta(X(t)+B^*))(1+\mu(Y(t)+N^*))} \right) - \\ & b(Y(t) + N^*) - \sigma(Y(t) + N^*) + \theta(Z(t) + M^*). \\ &= \frac{\delta\alpha}{\eta\mu} \left(1 - \frac{1}{1+\eta B^*} + \frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} - \frac{\eta^2 X(t)^2}{(1+\eta B^*)^3 + \eta(1+\eta B^*)^2 X(t)} - \frac{1}{1+\mu N^*} + \frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} - \right. \\ & \left. \frac{\mu^2 Y(t)^2}{(1+\mu N^*)^3 + \mu(1+\mu N^*)^2 Y(t)} + \left(\frac{1}{1+\eta B^*} - \frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} + \frac{\eta^2 X(t)^2}{(1+\eta B^*)^3 + \eta(1+\eta B^*)^2 X(t)} \right) \left(\frac{1}{1+\mu N^*} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} + \frac{\mu^2 Y(t)^2}{(1+\mu N^*)^3 + \mu(1+\mu N^*)^2 Y(t)} \right) \right) - bY(t) - bN^* - \sigma Y(t) - \sigma N^* + \\ & \theta Z(t) + \theta M^*. \end{aligned}$$

Dengan mengabaikan perkalian antar variabel dan mengabaikan suku-suku yang berorde lebih dari satu maka didapatkan persamaan berikut

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \frac{\delta\alpha}{\eta\mu} \left(\frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} + \frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)} \left(\frac{\eta X(t)}{1+\eta B^*} + \frac{\mu Y(t)}{1+\mu N^*} \right) \right) - (b + \\ & \sigma)Y(t) + \theta Z(t). \\ &= \frac{\delta\alpha}{\eta\mu} \left(\frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} + \frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2(1+\mu N^*)} - \frac{\mu Y(t)}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)^2} \right) - (b + \\ & \sigma)Y(t) + \theta Z(t). \\ &= \frac{\delta\alpha}{\eta\mu} \left(\frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2} - \frac{\eta X(t)}{(1+\eta B^*)^2(1+\mu N^*)} \right) + \frac{\delta\alpha}{\eta\mu} \left(\frac{\mu Y(t)}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{\mu Y(t)}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)^2} \right) - (b + \\ & \sigma)Y(t) + \theta Z(t). \\ \dot{Y}(t) &= \frac{\delta\alpha}{\mu} \left(\frac{1}{(1+\eta B^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*)^2(1+\mu N^*)} \right) X(t) + \frac{\delta\alpha}{\eta} \left(\frac{1}{(1+\mu N^*)^2} - \right. \\ & \left. \frac{1}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)^2} \right) Y(t) - (b + \sigma)Y(t) + \theta Z(t). \quad (4.4) \end{aligned}$$

- Untuk kompartemen $\frac{dM}{dt}$.

$$\dot{Z}(t) = \vartheta(X(t - \tau) + B^*)(Z(t) + M^*) + \sigma(Y(t) + N^*) - c(Z(t) + M^*) - \theta(Z(t) + M^*).$$

$$= \vartheta X(t - \tau)Z(t) + \vartheta B^*Z(t) + \vartheta X(t - \tau)M^* + \vartheta B^*M^* + \sigma Y(t) + \sigma N^* - cZ(t) + cM^* - \theta Z(t) + \theta M^*.$$

Dengan mengabaikan perkalian antar variabel, maka didapatkan persamaan berikut

$$\dot{Z}(t) = \vartheta B^*Z(t) + \vartheta X(t - \tau)M^* + \sigma Y(t) - cZ(t) - \theta Z(t).$$

Atau

$$\dot{Z}(t) = \vartheta M^*X(t - \tau) + \sigma Y(t) + (\vartheta B^* - c - \theta)Z(t). \quad (4.5)$$

Selanjutnya akan ditentukan matriks Jacobian yaitu

$$U(X, Y, Z) = \dot{X}(t) = \left(r \left(1 - \frac{2}{K} B^* \right) - \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{1}{(1+\eta B^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*)^2(1+\mu N^*)} \right) \right) X(t) - \frac{\alpha}{\eta} \left(\frac{1}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)^2} \right) Y(t) - \beta B^*Z(t) - \beta X(t - \tau)M^*.$$

$$V(X, Y, Z) = \dot{Y}(t) = \frac{\delta \alpha}{\mu} \left(\frac{1}{(1+\eta B^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*)^2(1+\mu N^*)} \right) X(t) + \frac{\delta \alpha}{\eta} \left(\frac{1}{(1+\mu N^*)^2} - \frac{1}{(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)^2} \right) Y(t) - (b + \sigma)Y(t) + \theta Z(t).$$

$$W(X, Y, Z) = \dot{Z}(t) = \vartheta M^*X(t - \tau) + \sigma Y(t) + (\vartheta B^* - c - \theta)Z(t).$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk notasi matriks

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} X(t - \tau) \\ Y(t - \tau) \\ Z(t - \tau) \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & \frac{\partial U}{\partial Y} & \frac{\partial U}{\partial Z} \\ \frac{\partial V}{\partial X} & \frac{\partial V}{\partial Y} & \frac{\partial V}{\partial Z} \\ \frac{\partial W}{\partial X} & \frac{\partial W}{\partial Y} & \frac{\partial W}{\partial Z} \end{pmatrix}$$

dimana

$$\frac{\partial U}{\partial X} = r \left(1 - \frac{2B^*}{K} \right) - \frac{\alpha}{\mu(1 + \eta B^*)^2} + \frac{\alpha}{\mu(1 + \eta B^*)^2(1 + \mu N^*)},$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\alpha}{\eta(1 + \mu N^*)^2} + \frac{\alpha}{\eta(1 + \eta B^*)(1 + \mu N^*)^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = -\beta B^*,$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\delta \alpha}{\mu(1 + \eta B^*)^2} - \frac{\delta \alpha}{\mu(1 + \eta B^*)^2(1 + \mu N^*)},$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\delta \alpha}{\eta(1 + \mu N^*)^2} - \frac{\delta \alpha}{\eta(1 + \eta B^*)(1 + \mu N^*)^2} - (b + \sigma),$$

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = \theta,$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \sigma,$$

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \vartheta B^* - c - \theta.$$

Dan

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\beta B^* e^{-\lambda \tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vartheta M^* e^{-\lambda \tau} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, diperoleh matriks Jacobian, yaitu $J = A_1 + A_2$

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dimana

$$a_{11} = r \left(1 - \frac{2B^*}{K} \right) - \frac{\alpha}{\mu(1 + \eta B^*)^2} + \frac{\alpha}{\mu(1 + \eta B^*)^2(1 + \mu N^*)} - \beta B^* e^{-\lambda \tau},$$

$$a_{12} = -\frac{\alpha}{\eta(1 + \mu N^*)^2} + \frac{\alpha}{\eta(1 + \eta B^*)(1 + \mu N^*)^2},$$

$$a_{13} = -\beta B^*,$$

$$a_{21} = \frac{\delta \alpha}{\mu(1 + \eta B^*)^2} - \frac{\delta \alpha}{\mu(1 + \eta B^*)^2(1 + \mu N^*)},$$

$$a_{22} = \frac{\delta \alpha}{\eta(1 + \mu N^*)^2} - \frac{\delta \alpha}{\eta(1 + \eta B^*)(1 + \mu N^*)^2} - (b + \sigma),$$

$$a_{23} = \theta,$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \vartheta M^* e^{-\lambda\tau}, \\
a_{32} &= \sigma, \\
a_{33} &= \vartheta B^* - c - \theta.
\end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigennya dengan menggunakan persamaan karakteristik $\det(\lambda I - J) = 0$ sehingga ditulis

$$\begin{vmatrix}
\lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & \lambda - a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & \lambda - a_{33}
\end{vmatrix} = 0.$$

Dengan memisalkan $u_1 = \frac{B^*}{K}$; $u_2 = \frac{\alpha}{\mu(1+\eta B^*)^2}$; $u_3 = \frac{\alpha}{\mu(1+\eta B^*)^2(1+\mu N^*)}$;

$v_1 = \frac{\alpha}{\eta(1+\mu N^*)^2}$, $v_2 = \frac{\alpha}{\eta(1+\eta B^*)(1+\mu N^*)^2}$ dan $v_3 = \vartheta B^* - c - \theta$ maka

$$\begin{vmatrix}
\lambda - (r(1 - 2u_1) - u_2 + u_3 - \beta M^* e^{-\lambda\tau}) & v_1 - v_2 & \beta B^* \\
-\delta u_2 + \delta u_3 & \lambda - (\delta v_1 - \delta v_2 - b - \sigma) & -\theta \\
-\vartheta M^* e^{-\lambda\tau} & -\sigma & \lambda - v_3
\end{vmatrix} = 0.$$

Juga diperoleh persamaan karakteristik berikut.

$$\lambda^3 + \Delta_2 \lambda^2 + \Delta_1 \lambda + \Delta_0 + (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (4.6)$$

dengan

$$\Delta_2 = -\delta v_1 + \delta v_2 + b - r + \sigma + 2u_1 + u_2 - u_3 - v_3,$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \delta r v_1 - \delta r v_2 - 2\delta u_1 v_1 + 2\delta u_1 v_2 + \delta v_1 v_3 - \delta v_2 v_3 - b r + 2b u_1 + b u_2 - \\
&\quad b u_3 - b v_3 - r \sigma + r v_3 - \sigma \theta + 2\sigma u_1 + \sigma u_2 - \sigma u_3 - \sigma v_3 - 2u_1 v_3 - \\
&\quad u_2 v_3 + u_3 v_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= B\beta\delta\sigma u_2 - B\beta\delta\sigma u_3 - \delta r v_1 v_3 + \delta r v_2 v_3 + 2\delta u_1 v_1 v_3 - 2\delta u_1 v_2 v_3 + \\
&\quad b r v_3 - 2b u_1 v_3 - b u_2 v_3 + b u_3 v_3 + r \sigma \theta + r \sigma v_3 - 2\sigma \theta u_1 - \sigma \theta u_2 + \\
&\quad \sigma \theta u_3 - 2\sigma u_1 v_3 - \sigma u_2 v_3 + \sigma u_3 v_3,
\end{aligned}$$

$$q_2 = M^* \beta,$$

$$q_1 = B M \beta \vartheta - M \beta \delta v_1 + M \beta \delta v_2 + M b \beta + M \beta \sigma - M \beta v_3,$$

$$\begin{aligned}
q_0 &= -B M \beta \delta v_1 \vartheta + B M \beta \delta v_2 \vartheta + B M b \beta \vartheta + B M \beta \sigma \vartheta + M \beta \delta v_1 v_3 - \\
&\quad M \beta \delta v_2 v_3 - M b \beta v_3 - M \beta \sigma \theta - M \beta \sigma v_3 + M \theta v_1 \vartheta - M \theta v_2 \vartheta.
\end{aligned}$$

Jika pengaruh waktu tundanya tidak ada ($\tau = 0$), maka persamaan (4.6) menjadi

$$\lambda^3 + (\Delta_2 + q_2)\lambda^2 + (\Delta_1 + q_1)\lambda + \Delta_0 + q_0 = 0. \quad (4.7)$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz nilai eigen dari persamaan karakteristik akan bernilai real dan negatif (berbentuk kompleks) dengan bagian real negatif jika dan hanya jika,

$$a_0 > 0, a_2 > 0, \text{ dan } a_2 a_1 - a_0 > 0.$$

Dengan $a_2 = \Delta_2 + q_2$, $a_1 = \Delta_1 + q_1$, dan $a_0 = \Delta_0 + q_0$. Berdasarkan kriteria tersebut titik kesetimbangan tanpa pengaruh waktu tunda akan bersifat stabil asimtotik.

4.4.3. Penentuan Akar Persamaan Karakteristik

Untuk menentukan sifat kestabilan ketika adanya waktu tunda ($\tau > 0$) yaitu dengan memisalkan akar karakteristik. Kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh bagian real solusi persamaan karakteristik $f(\lambda)$. Misalkan $\lambda = \eta \pm iw$ adalah akar persamaan karakteristik $f(\lambda)$, titik kesetimbangan akan stabil jika $\eta < 0$. Jika terdapat suatu nilai tundaan kritis $\tau > 0$ yang dapat menyebabkan $\eta(\tau) = 0$ sehingga $\lambda = \pm iw(\tau)$ merupakan akar imajiner persamaan $f(\lambda)$, maka titik kesetimbangan mengalami perubahan sifat kestabilan.

Selanjutnya, mensubstitusi $\lambda = iw, w > 0$ ke dalam persamaan (4.6) maka diperoleh

$$\Delta(iw, \tau) = (iw)^3 + \Delta_2(iw)^2 + \Delta_1(iw) + \Delta_0 + (q_2(iw)^2 + q_1(iw) + q_0) e^{-iw\tau} \quad (4.8)$$

Dengan mengganti suku eksponensial dalam bentuk trigonometri ($e^{-iw\tau} = \cos w\tau - i \sin w\tau$) maka bentuk persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$\Delta(iw, \tau) = -iw^3 - \Delta_2 w^2 + \Delta_1 iw + \Delta_0 - q_2 w^2 \cos w\tau + q_2 iw^2 \sin w\tau + q_1 w \sin w\tau + q_1 iw \cos w\tau - q_0 i \sin w\tau + q_0 \cos w\tau. \quad (4.9)$$

Dengan memisahkan bagian bagian imajiner dan realnya maka diperoleh,

$$-iw^3 + \Delta_1 iw + q_2 iw^2 \sin w\tau + q_1 iw \cos w\tau - q_0 i \sin w\tau = 0.$$

$$-\Delta_2 w^2 + \Delta_0 - q_2 w^2 \cos w\tau + q_1 w \sin w\tau + q_0 \cos w\tau = 0.$$

Atau ekuivalen dengan,

$$\begin{aligned} w^3 - \Delta_1 w &= (q_2 w^2 - q_0) \sin w\tau + q_1 w \cos w\tau. \\ \Delta_2 w^2 - \Delta_0 &= -(q_2 w^2 - q_0) \cos w\tau + q_1 w \sin w\tau. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dengan mengkuadratkan masing-masing ruas, maka diperoleh

$$\begin{aligned} w^6 - 2\Delta_1 w^4 + \Delta_1^2 w^2 &= (q_2 w^2 - q_0)^2 \sin^2 w\tau + \\ &\quad q_1^2 w^2 \cos^2 w\tau + 2q_1 w (q_2 w^2 - q_0) \sin w\tau \cos w\tau. \\ \Delta_2^2 w^4 - 2\Delta_2 \Delta_0 w^2 + \Delta_0^2 &= (q_2 w^2 - q_0)^2 \cos^2 w\tau + \\ &\quad q_1^2 w^2 \sin^2 w\tau - 2q_1 w (q_2 w^2 - q_0) \sin w\tau \cos w\tau. \end{aligned}$$

Kemudian kedua persamaan dijumlahkan serta dikelompokkan sesuai pangkat w .

$$\begin{aligned} w^6 - (2\Delta_1 - \Delta_2^2) w^4 + (\Delta_1^2 - 2\Delta_2 \Delta_0) w^2 + \Delta_0^2 &= (q_2 w^2 - q_0)^2 (\sin^2 w\tau + \\ &\quad \cos^2 w\tau) + q_1^2 w^2 (\sin^2 w\tau + \cos^2 w\tau). \\ w^6 - (2\Delta_1 - \Delta_2^2) w^4 + (\Delta_1^2 - 2\Delta_2 \Delta_0) w^2 + \Delta_0^2 &= q_2^2 w^4 + q_0^2 - 2q_0 q_2 w^2 + \\ &\quad q_1^2 w^2. \end{aligned}$$

Maka diperoleh polinomial derajat enam berikut

$$w^6 - (2\Delta_1 - \Delta_2^2 + q_2^2) w^4 + (\Delta_1^2 - 2\Delta_2 \Delta_0 - q_1^2 + 2q_0 q_2) w^2 + \Delta_0^2 - q_0^2 = 0. \quad (4.11)$$

Jika dimisalkan $w^2 = z$ merupakan akar dari persamaan (4.10) maka

$$z^3 - (2\Delta_1 - \Delta_2^2 + q_2^2) z^2 + (\Delta_1^2 - 2\Delta_2 \Delta_0 - q_1^2 + 2q_0 q_2) z + \Delta_0^2 - q_0^2 = 0. \quad (4.12)$$

Diperoleh nilai w_{\pm} paling sedikit satu nilai real positif jika dan hanya jika

$$2\Delta_1 - \Delta_2^2 + q_2^2 < 0, \Delta_1^2 - 2\Delta_2 \Delta_0 - q_1^2 + 2q_0 q_2 > 0, \text{ dan } \Delta_0^2 - q_0^2 > 0. \quad (4.13)$$

4.4.4. Penentuan titik kritis waktu tunda.

Selanjutnya, dengan mensubstitusi nilai w ke dalam persamaan (4.10) untuk mendapatkan nilai tundaan kritis dengan memisalkan,

$$a = -q_2 w^2 + q_0, b = -q_1 w, c = -q_1 w, d = q_2 w^2 - q_0, e = -w^3 + \Delta_1 w, f = -\Delta_2 w^2 + \Delta_0, x = \sin w\tau, y = \cos w\tau.$$

Dengan menggunakan kaidah sistem persamaan linear maka diperoleh

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

$$\sin w\tau = \frac{\begin{vmatrix} -w^3 + \Delta_1 w & -q_1 w \\ -\Delta_2 w^2 + \Delta_0 & q_2 w^2 - q_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -q_2 w^2 + q_0 & -q_1 w \\ -q_1 w & q_2 w^2 - q_0 \end{vmatrix}} = \frac{(-w^3 + \Delta_1 w)(q_2 w^2 - q_0) - q_1 w(\Delta_2 w^2 - \Delta_0)}{-q_2^2 w^2 + q_0^2 - q_1^2 w^2}.$$

$$\cos w\tau = \frac{\begin{vmatrix} -q_2 w^2 + q_0 & -w^3 + \Delta_1 w \\ -q_1 w & -\Delta_2 w^2 + \Delta_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -q_2 w^2 + q_0 & -q_1 w \\ -q_1 w & q_2 w^2 - q_0 \end{vmatrix}} = \frac{(-q_2 w^2 + q_0)(-\Delta_2 w^2 + \Delta_0) - q_1 w(w^3 - \Delta_1 w)}{-q_2^2 w^2 + q_0^2 - q_1^2 w^2}.$$

Untuk mendapatkan nilai tunda kritis τ_0 maka dilakukan dengan operasi aljabar berikut.

$$\frac{\sin w\tau}{\cos w\tau} = \frac{(-w^3 + \Delta_1 w)(q_2 w^2 - q_0) - q_1 w(\Delta_2 w^2 - \Delta_0)}{(-q_2 w^2 + q_0)(-\Delta_2 w^2 + \Delta_0) - q_1 w(w^3 - \Delta_1 w)}.$$

$$\tan w\tau = \frac{(-w^3 + \Delta_1 w)(q_2 w^2 - q_0) - q_1 w(\Delta_2 w^2 - \Delta_0)}{(-q_2 w^2 + q_0)(-\Delta_2 w^2 + \Delta_0) - q_1 w(w^3 - \Delta_1 w)}.$$

$$w\tau = \arctan \left\{ \frac{(-w^3 + \Delta_1 w)(q_2 w^2 - q_0) - q_1 w(\Delta_2 w^2 - \Delta_0)}{(-q_2 w^2 + q_0)(-\Delta_2 w^2 + \Delta_0) - q_1 w(w^3 - \Delta_1 w)} \right\}.$$

$$\tau_0 = \frac{1}{w} \arctan \left\{ \frac{(-w^3 + \Delta_1 w)(q_2 w^2 - q_0) - q_1 w(\Delta_2 w^2 - \Delta_0)}{(-q_2 w^2 + q_0)(-\Delta_2 w^2 + \Delta_0) - q_1 w(w^3 - \Delta_1 w)} \right\}. \quad (4.14)$$

Setelah diperoleh nilai kritis tundaan yang memuat akar karakteristik yang terdapat pada garis imajiner maka dimungkinkan terjadi bifurkasi pada titik tersebut. Kemudian akan diselidiki kondisi transversaliti dengan membuktikan bahwa akar karakteristik akan bergerak menuju bidang real yang positif. Bifurkasi terjadi apabila persamaan karakteristik (4.6) memenuhi kondisi transversaliti yaitu suatu kondisi yang dapat menyebabkan perubahan sifat kestabilan dari titik kesetimbangan ketika terjadi perubahan waktu tunda.

4.4.5. Kondisi Transversaliti Dan Bifurkasi

Jika λ merupakan fungsi dalam τ , $\lambda = \lambda(\tau)$, $\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}$ dapat ditentukan dengan menggunakan turunan implisit dari persamaan karakteristik (4.6) yaitu

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \Delta_2\lambda^2 + \Delta_1\lambda + \Delta_0 + (q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0)e^{-\lambda\tau} \text{ atau}$$

$$\lambda^3 + q_2\lambda^2e^{-\lambda\tau} + \Delta_2\lambda^2 + q_1\lambda e^{-\lambda\tau} + \Delta_1\lambda + q_0e^{-\lambda\tau} + \Delta_0 = 0.$$

Persamaan tersebut didiferensialkan terhadap τ menjadi,

$$3\lambda^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + q_2 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\lambda^2 e^{-\lambda\tau}) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda^2 e^{-\lambda\tau}) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) + 2\Delta_2 \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + q_1 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\lambda e^{-\lambda\tau}) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda e^{-\lambda\tau}) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) + \Delta_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + q_0 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (e^{-\lambda\tau}) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{-\lambda\tau}) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) = 0.$$

$$3\lambda^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \left(q_2 \lambda^2 (-\lambda) e^{-\lambda\tau} + 2q_2 \lambda e^{-\lambda\tau} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + q_2 \lambda^2 (-\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) + 2\Delta_2 \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \left(q_1 \lambda (-\lambda) e^{-\lambda\tau} + q_1 e^{-\lambda\tau} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + q_1 \lambda (-\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) + \Delta_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \left(q_0 (-\lambda) e^{-\lambda\tau} + q_0 (-\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) = 0.$$

$$(3\lambda^2 + 2\Delta_2 \lambda + \Delta_1) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + (2q_2 \lambda e^{-\lambda\tau} + q_1 e^{-\lambda\tau}) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} - \tau (q_2 \lambda^2 e^{-\lambda\tau} + q_1 \lambda e^{-\lambda\tau} + q_0 e^{-\lambda\tau}) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} - \lambda (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau} = 0.$$

$$(3\lambda^2 + 2\Delta_2 \lambda + \Delta_1 + 2q_2 \lambda e^{-\lambda\tau} + q_1 e^{-\lambda\tau} - \tau (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau}) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} - \lambda (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau} = 0.$$

$$(3\lambda^2 + 2\Delta_2 \lambda + \Delta_1 + 2q_2 \lambda e^{-\lambda\tau} + q_1 e^{-\lambda\tau} - \tau (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau}) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = \lambda (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau}.$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = \frac{\lambda (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau}}{3\lambda^2 + 2\Delta_2 \lambda + \Delta_1 + (2q_2 \lambda + q_1) e^{-\lambda\tau} - \tau (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau}}.$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right)^{-1} = \frac{3\lambda^2 + 2\Delta_2 \lambda + \Delta_1}{\lambda (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau}} + \frac{2q_2 \lambda + q_1}{\lambda (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0)} - \frac{\tau}{\lambda}. \quad (4.15)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (4.6) juga diperoleh nilai $e^{-\lambda\tau}$ berikut

$$(q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda\tau} = -\lambda^3 - \Delta_2 \lambda^2 - \Delta_1 \lambda - \Delta_0$$

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{-\lambda^3 - \Delta_2 \lambda^2 - \Delta_1 \lambda - \Delta_0}{q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0}$$

Dengan demikian, nilai $e^{-\lambda\tau}$ disubsitusikan ke dalam persamaan (4.15) sehingga,

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right)^{-1} = \frac{3\lambda^2 + 2\Delta_2 \lambda + \Delta_1}{\lambda (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0) \left(\frac{-\lambda^3 - \Delta_2 \lambda^2 - \Delta_1 \lambda - \Delta_0}{q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0} \right)} + \frac{2q_2 \lambda + q_1}{\lambda (q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0)} - \frac{\tau}{\lambda}.$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right)^{-1} = \frac{3\lambda^2 + 2\Delta_2\lambda + \Delta_1}{-\lambda(\lambda^3 + \Delta_2\lambda^2 + \Delta_1\lambda + \Delta_0)} + \frac{2q_2\lambda + q_1}{\lambda(q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0)} - \frac{\tau}{\lambda}. \quad (4.16)$$

Selanjutnya, persamaan (4.16) disubstitusikan dalam bentuk sign berikut

$$\begin{aligned} \text{sign} \left\{ \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda=iw} &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right)^{-1} \right\}. \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{3\lambda^2 + 2\Delta_2\lambda + \Delta_1}{-\lambda(\lambda^3 + \Delta_2\lambda^2 + \Delta_1\lambda + \Delta_0)} \right) + \text{Re} \left(\frac{2q_2\lambda + q_1}{\lambda(q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0)} \right) + \right. \\ &\quad \left. \text{Re} \left(\frac{-\tau}{\lambda} \right) \right\}_{\lambda=iw}. \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{-3w^2 + 2\Delta_2iw + \Delta_1}{-iw(-iw^3 - \Delta_2w^2 + \Delta_1iw + \Delta_0)} \right) + \right. \\ &\quad \left. \text{Re} \left(\frac{2q_2iw + q_1}{iw(-q_2w^2 + q_1iw + q_0)} \right) + \text{Re} \left(\frac{-\tau}{iw} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Pada masing-masing suku akan dilakukan manipulasi aljabar agar mendapatkan bagian real saja.

Tinjau bagian

$$\begin{aligned} \frac{-3w^2 + 2\Delta_2iw + \Delta_1}{-iw(-iw^3 - \Delta_2w^2 + \Delta_1iw + \Delta_0)} &= \frac{-3w^2 + 2\Delta_2iw + \Delta_1}{-iw(-iw^3 - \Delta_2w^2 + \Delta_1iw + \Delta_0)}. \\ &= \frac{-3w^2 + 2\Delta_2iw + \Delta_1}{-w^4 + \Delta_2iw^3 + \Delta_1w^2 - \Delta_0iw}. \\ &= \frac{(-3w^2 + \Delta_1) + 2\Delta_2iw}{(-w^4 + \Delta_1w^2) + (\Delta_2w^3 - \Delta_0w)i}. \\ &= \frac{(-3w^2 + \Delta_1) + 2\Delta_2iw}{(-w^4 + \Delta_1w^2) + (\Delta_2w^3 - \Delta_0w)i} \times \frac{(-w^4 + \Delta_1w^2) - (\Delta_2w^3 - \Delta_0w)i}{(-w^4 + \Delta_1w^2) - (\Delta_2w^3 - \Delta_0w)i}. \\ &= \frac{(-3w^2 + \Delta_1) + 2\Delta_2iw \times (-w^4 + \Delta_1w^2) - (\Delta_2w^3 - \Delta_0w)i}{(-w^4 + \Delta_1w^2)^2 + (\Delta_2w^3 - \Delta_0w)^2}. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bagian real yaitu

$$\begin{aligned} &= \frac{3w^6 - 3\Delta_1w^4 - \Delta_1w^4 + \Delta_1^2w^2 + 2\Delta_2^2w^4 - 2\Delta_2\Delta_0w^2}{w^2(-w^3 + \Delta_1w)^2 + w^2(\Delta_2w^2 - \Delta_0)^2}. \\ &= \frac{w^2(3w^4 - 3\Delta_1w^2 - \Delta_1w^2 + \Delta_1^2 + 2\Delta_2^2w^2 - 2\Delta_2\Delta_0)}{w^2[(-w^3 + \Delta_1w)^2 + (\Delta_2w^2 - \Delta_0)^2]}. \\ &= \frac{3w^4 + (2\Delta_2^2 - 4\Delta_1)w^2 + \Delta_1^2 - 2\Delta_2\Delta_0}{(-w^3 + \Delta_1w)^2 + (\Delta_2w^2 - \Delta_0)^2}. \end{aligned}$$

Dan juga,

$$\begin{aligned}
\frac{2q_2iw+q_1}{iw(-q_2w^2+q_1iw+q_0)} &= \frac{2q_2iw+q_1}{iw(-q_2w^2+q_1iw+q_0)} \cdot \\
&= \frac{2q_2iw+q_1}{-q_2iw^3-q_1w^2+q_0iw} \cdot \\
&= \frac{2q_2iw+q_1}{-q_1w^2-(q_2w^3-q_0w)i} \times \frac{-q_1w^2+(q_2w^3-q_0w)i}{-q_1w^2+(q_2w^3-q_0w)i} \cdot \\
&= \frac{-2q_2^2w^4+2q_2q_0w^2-q_1^2w^2}{q_1^2w^4+(q_2w^3-q_0w)^2} \cdot \\
&= \frac{w^2(-2q_2^2w^2+2q_2q_0-q_1^2)}{w^2(q_1^2w^2+q_2^2w^4+q_0^2-2q_0q_2w^2)} \cdot \\
&= \frac{-2q_2^2w^2+2q_2q_0-q_1^2}{q_2^2w^4+q_0^2+q_1^2w^2-2q_0q_2w^2} \cdot
\end{aligned}$$

Dengan demikian bentuk sign dapat ditulis,

$$\text{sign} \left\{ \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau} \right\} = \text{sign} \left\{ \frac{3w^4+(2\Delta_2^2-4\Delta_1)w^2+\Delta_1^2-2\Delta_2\Delta_0}{(-w^3+\Delta_1w)^2+(\Delta_2w^2-\Delta_0)^2} + \frac{-2q_2^2w^2+2q_2q_0-q_1^2}{q_2^2w^4+q_0^2+q_1^2w^2-2q_0q_2w^2} \right\}.$$

Selanjutnya, dengan memperhatikan persamaan (4.11) berikut

$$w^6 - (2\Delta_1 - \Delta_2^2 + q_2^2)w^4 + (\Delta_1^2 - 2\Delta_2\Delta_0 - q_1^2 + 2q_0q_2)w^2 + \Delta_0^2 - q_0^2 = 0.$$

$$q_2^2w^4 + q_1^2w^2 + q_0^2 - 2q_0q_2w^2 = w^6 - 2\Delta_1w^4 + \Delta_2^2w^4 + \Delta_1^2w^2 - 2\Delta_2\Delta_0w^2 + \Delta_0^2.$$

$$q_2^2w^4 + q_1^2w^2 + q_0^2 - 2q_0q_2w^2 = (-w^3 + \Delta_1w)^2 + (\Delta_2w^2 - \Delta_0)^2.$$

Maka dapat ditulis dalam bentuk,

$$\begin{aligned}
\text{sign} \left\{ \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda=iw} &= \text{sign} \left\{ \frac{3w^4+(2\Delta_2^2-4\Delta_1)w^2+\Delta_1^2-2\Delta_2\Delta_0}{(-w^3+\Delta_1w)^2+(\Delta_2w^2-\Delta_0)^2} + \frac{-2q_2^2w^2+2q_2q_0-q_1^2}{q_2^2w^4+q_0^2+q_1^2w^2-2q_0q_2w^2} \right\} \cdot \\
&= \text{sign} \left\{ \frac{3w^4+(2\Delta_2^2-4\Delta_1-2q_2^2)w^2+(\Delta_1^2-2\Delta_2\Delta_0-q_1^2+2q_2q_0)}{(-w^3+\Delta_1w)^2+(\Delta_2w^2-\Delta_0)^2} \right\}. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Selanjutnya pada pecahan persamaan (4.17) hanya akan dikaji pembilangnya saja karena penyebutnya selalu bernilai positif maka pembilangnya adalah

$$= \text{Sign}\{3w^4 + (2\Delta_2^2 - 4\Delta_1 - 2q_2^2)w^2 + (\Delta_1^2 - 2\Delta_2\Delta_0 - q_1^2 + 2q_2q_0)\}.$$

Jika $2\Delta_2^2 - 4\Delta_1 - 2q_2^2 > 0$ dan $(\Delta_1^2 - 2\Delta_2\Delta_0 - q_1^2 + 2q_2q_0) > 0$ maka dapat ditulis

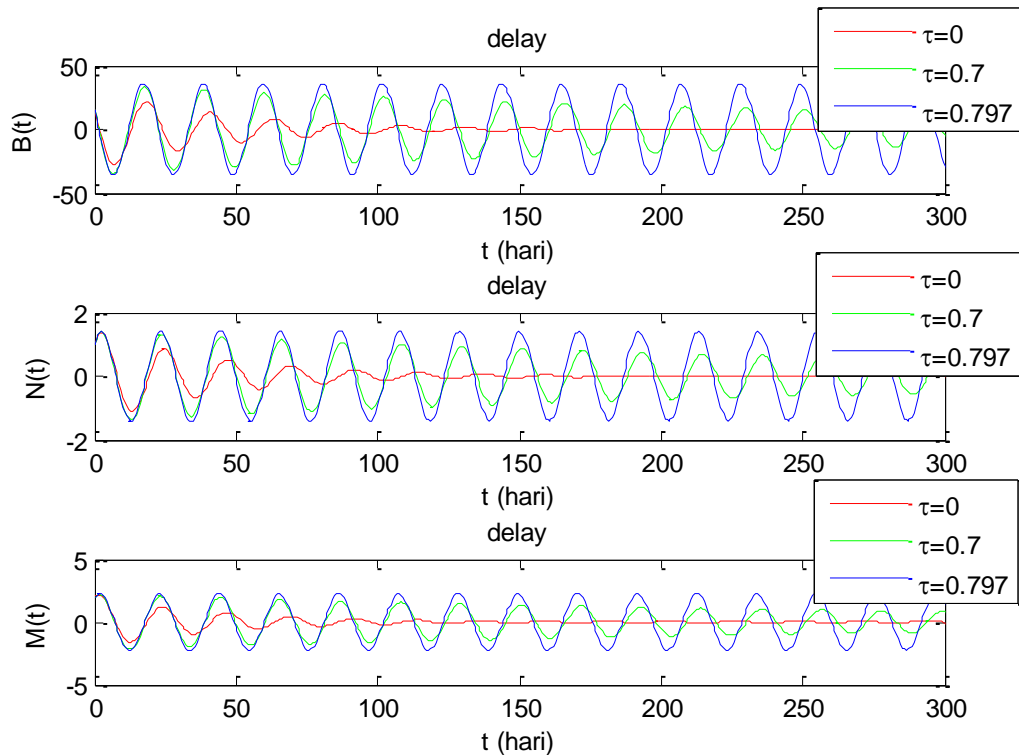
$$\left\{ \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda=w, \tau=\tau_k} > 0.$$

Dengan demikian, diperoleh minimal satu nilai τ yang positif dan terpenuhi kondisi transversaliti sehingga terjadi bifurkasi pada $\tau = \tau_0$.

4.4.6. Simulasi

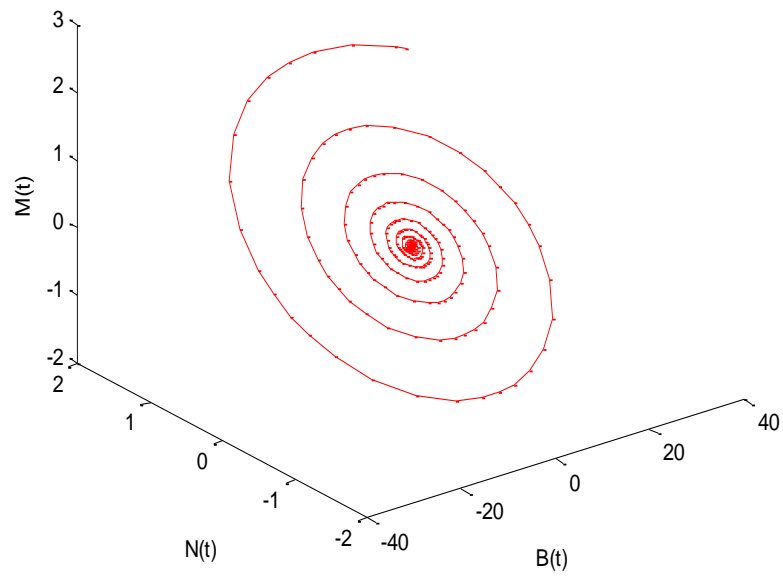
Diberikan parameter dengan nilai $K = 100$, $r = 0.7$, $\alpha = 0.3$, $\eta = 0.01$, $\mu = 0.01$, $\beta = 0.1$, $\vartheta = 0.01$, $\delta = 0.03$, $\sigma = 0.25$, $\theta = 0.25$, $b = 0.2$, dan $c = 0.1$ yang digunakan untuk melihat pengaruh waktu tunda pada model (4.2). Untuk $\tau = 0$ diperoleh kondisi sistem yang stabil pada titik kesetimbangan yaitu $TE_1 = (15.94, 1.52, 1.99)$ dengan nilai eigen $(-0.02 \pm 0.28, -0.53)$. Sedangkan, untuk $\tau \neq 0$ secara analitik dapat diperoleh satu nilai Z yang positif berdasarkan Persamaan (4.12) yaitu $(0.088, -0.041, -0.216)$ dan digunakan untuk menentukan nilai kritis waktu tunda. Berdasarkan analisis yang dilakukan diperoleh satu nilai kritis tundaan $\tau_0 = 0.797$. Ketika $\tau < 0.797$ titik keseimbangan TE_1 berada dalam kondisi stabil asimptotik. Ketika $\tau = 0.797$ titik keseimbangan TE_1 menyebabkan kondisi kestabilan menjadi tidak ada dan terjadi bifurkasi. Dan ketika $\tau > 0.797$ titik keseimbangan TE_1 menjadi tidak stabil.

Berikut ini akan diperlihatkan simulasi dengan $\tau = 0$, $\tau = 0.7$, dan $\tau = 0.797$ dengan panjang t yang berbeda-beda dengan menggunakan nilai awal yang diperoleh di sekitar titik kesetimbangan yang stabil yaitu $B(0) = 15$, $N(0) = 1$, dan $M(0) = 2$.

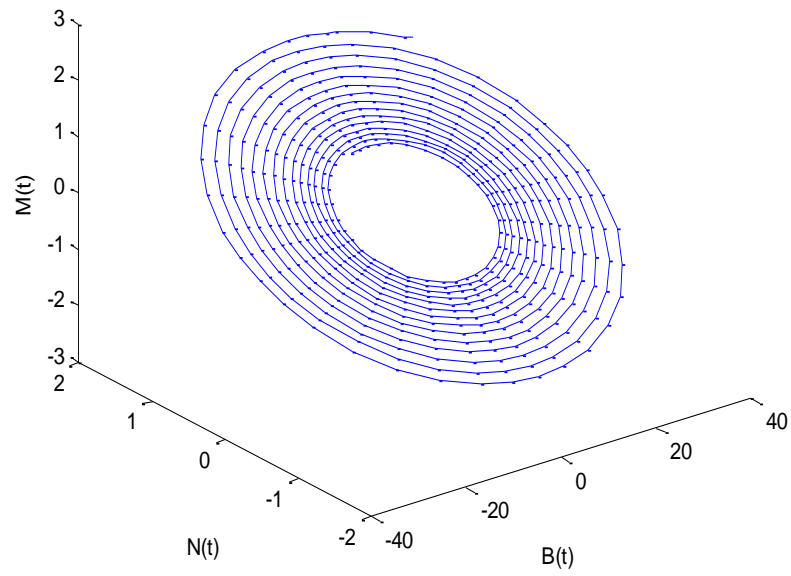


Gambar 4.1 Perilaku Solusi Kurva pada $t = 0 - 300$ hari

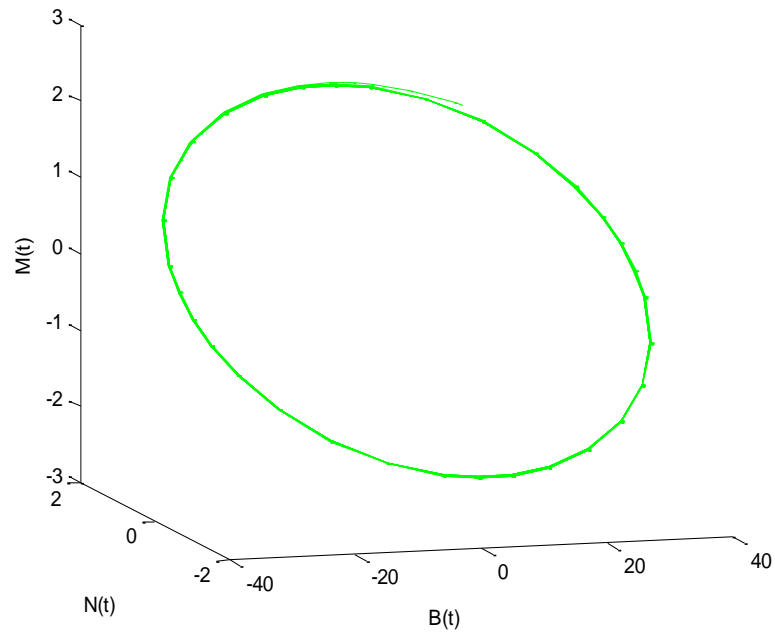
Gambar 4.1 menunjukkan bahwa tingkat populasi mangsa dan pemangsa terlihat stabil dan konvergen pada titik kesetimbangan interior $TE = (15.94, 1.52, 1.99)$ pada $t = 0 - 300$ hari. Dengan demikian, jumlah populasi pemangsa dalam waktu yang panjang akan tetap eksis dan stabil. Pemberian waktu tunda dapat mempengaruhi perubahan kestabilan dari titik kesetimbangan $TE = (15.94, 1.52, 1.99)$ dari kondisi stabil menjadi tidak stabil.



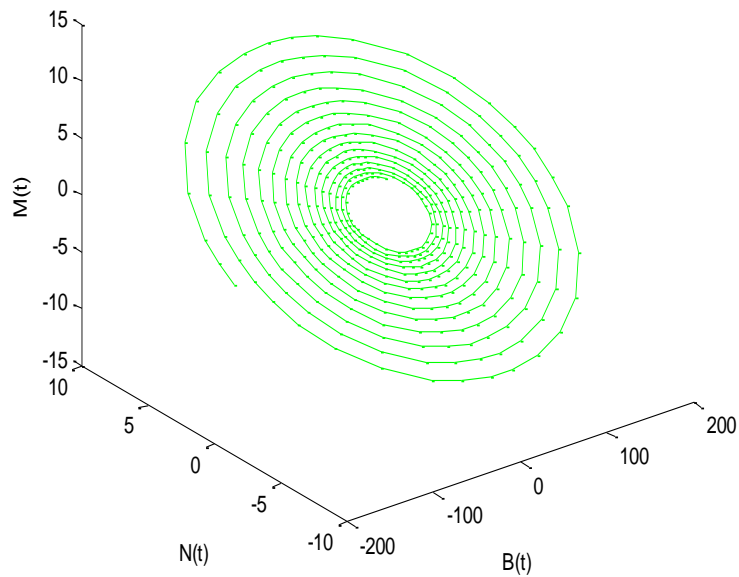
(a) untuk $\tau = 0$



(B) Untuk $\tau = 0.7$



(c) untuk $\tau = 0.797$

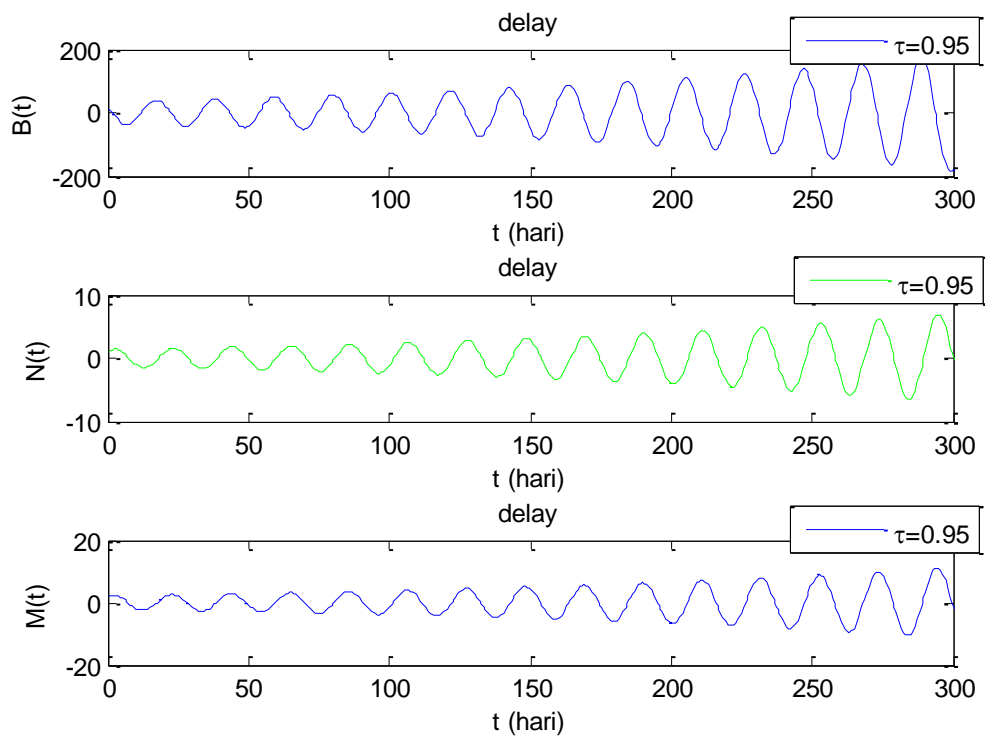


(d) Untuk $\tau = 0.95$

Gambar 4.2. Kurva Trayektori dengan perubahan nilai τ

Gambar 4.2(a) menunjukkan kondisi awal (*starting point*) kurva trayektori bergerak spiral mendekati titik kesetimbangan dan tetap dalam kondisi stabil. Gambar 4.2(b) yang menunjukkan kondisi awal kurva trayektori bergerak menjauhi titik kesetimbangan dan masih dalam kategori

stabil. Sedangkan, Gambar 4.2(c) memperlihatkan orbit periode yang tertutup dan menunjukkan kondisi awal kurva mulai bergerak secara spiral dan terjadi bifurkasi pada $\tau = 0.797$. Pada Gambar 4.2(d) memperlihatkan menunjukkan kondisi awal kurva trayektori bergerak secara spiral menjauhi titik kesetimbangan sehingga kondisi sistem menjadi tidak stabil. Dengan demikian, nilai waktu tunda $\tau > 0.797$ dalam pertumbuhan populasi terjadi perubahan kestabilan dari keadaan stabil menjadi tidak stabil sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.3 berikut.



Gambar 4.3. Perilaku Solusi Kurva untuk $\tau = 0.95$ pada $t = 0 - 300$ hari.

Gambar 4.3 menunjukkan terjadi gerakan osilasi yang semakin membesar dan menjauhi titik kesetimbangan. Semakin besar nilai waktu tunda dalam pertumbuhan populasi mangsa pemangsa menyebabkan ketidakstabilan yang mengakibatkan penurunan populasi mangsa pemangsa yang berdampak pada kepunahan.

4.5. Kesimpulan

Berdasarkan analisis terhadap efek keterlambatan kematangan mangsa (τ) pada dinamika sistem mangsa pemangsa yang menghasilkan titik kesetimbangan interior yang stabil asimtotik. Perkiraan lama penundaan kematangan mangsa yang tidak akan mempengaruhi eksistensi kestabilan mangsa pemangsa pada nilai keseimbangannya, justru yang terjadi adalah perubahan suatu sistem dari kondisi yang stabil menjadi tidak stabil. Nilai waktu tunda yang lebih besar dari nol ($\tau > 0$) menyebabkan fluktuasi kepadatan populasi mangsa pemangsa dan karenanya sistem menjadi tidak stabil. Perkiraan lama waktu tunda kritis (τ_0) yang menyebabkan terjadi bifurkasi Hopf bergantung pada parameter yang digunakan dalam sistem dan dimungkinkan dapat mencegah terjadinya osilasi kepadatan populasi. Perubahan parameter waktu tunda yang lebih besar dari nilai batas waktu tunda kritis ($\tau > \tau_0$) menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan dari kondisi stabil menjadi tidak stabil dan terjadi bifurkasi.

Model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin dan adanya waktu tunda, menunjukkan jika laju kematian pemangsa lebih besar daripada laju konversi pemangsa, populasi pemangsa menjadi punah karena adanya pengaruh waktu tunda. Namun, model tersebut masih perlu dikembangkan lagi dengan melibat pertumbuhan logistik pada setiap kompartemen agar bisa menentukan parameter pertumbuhan populasi sesuai dengan data real yang telah diestimasi dalam lampiran. Akan menarik untuk dianalisis lebih lanjut jika diperoleh nilai waktu tunda kritis positif yang lebih dari satu dalam analisis suatu sistem. Kondisi demikian menyebabkan perubahan kestabilan suatu system dari stabil menjadi tidak stabil beberapa kali sesuai dengan banyaknya waktu tunda kritis positif yang diperoleh dan terjadinya bifurkasi.

4.6. Daftar Pustaka

- Chakraborty, K., Das, S., & Kar, T. K. (2011). Optimal Control of Effort of a Stage Structured Prey–Predator Fishery Model with Harvesting. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(6), 3452-3467.
- Djilali, S. (2019). Effect of Herd Shape in a Diffusive Predator-Prey Model with Time Delay. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 9(2), 638-654.
- Dubey, B., Agarwal, S., & Kumar, A. (2018). Optimal Harvesting Policy of a Prey–Predator Model with Crowley–Martin Type Functional Response and Stage Structure in the Predator. *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*, 23(4), 493–514.
- Hu, G.P., & Li, X.L. (2012). Stability and Hopf Bifurcation for a Delayed Predator-Prey Model with Disease in the Prey. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(3), 229-237.
- Huang, C., & Cao, J. (2019). Comparative Study on Bifurcation Control Methods in a Fractional-Order Delayed Predator-Prey System. *Science China Technological Sciences*, 62(2), 298-307.
- Huang, C., Li, H., & Cao, J. (2019). A Novel Strategy of Bifurcation Control for a Delayed Fractional Predator–Prey Model. *Applied Mathematics and Computation*, 347(1), 808-838.
- Kar, T.K. (2003). Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(1), 449-458.
- Li, S., Li, Y., Dong, Y., & Zhang, S. (2015). Qualitative Analysis of a Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(9), 1550110.
- Mondal, S., & Samanta, G. (2021). Time-Delayed Predator–Prey Interaction with the Benefit of Antipredation Response in Presence of Refuge. *Zeitschrift für Naturforschung A.*, 76(1), 23-42.

- Santra, P. K., Mahapatra, G. S., & Phaijoo, G. R. (2020). Bifurcation and Chaos of a Discrete Predator-Prey Model with Crowley–Martin Functional Response Incorporating Proportional Prey Refuge. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020(1), 1-18.
- Toaha, S., & Azis, M. I. (2018). Stability and Optimal Harvesting of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model. *IOP Conf. Series: Journal of Physics*, 979(1), 012069.
- Xu, R., & Zhang, S. (2013). Modelling and Analysis of a Delayed Predator–Prey Model with Disease in the Predator. *Applied Mathematics and Computation*, 224(1), 372-386.
- Yang, R., & Zhang, C. (2017). Dynamics in a Diffusive Modified Leslie–Gower Predator–Prey Model with Time Delay and Prey Harvesting. *Nonlinear Dynamics*, 87(2), 863-878.
- Yuan, R., Jiang, W., & Wang, Y. (2015). Saddle-Node-Hopf Bifurcation in a Modified Leslie–Gower Predator-Prey Model with Time-Delay and Prey Harvesting. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 422(2), 1072-1090.
- Zhou, X., Shi, X., & Song, X. (2009). Analysis of a Delay Prey-Predator Model with Disease in the Prey Species Only. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 46(4), 713-731.

V. PENUTUP

5.1. Kesimpulan Umum

Berdasarkan hasil analisis yang dilakukan maka disusun kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin dengan adanya migrasi diantara populasi pemangsa diperoleh titik kesetimbangan interior $TE_3(B, N, M)$ yang stabil asimptotik secara global. Hal ini bermakna bahwa meskipun terjadi pemangsaan yang ketat terhadap mangsa maka populasi mangsa akan tetap lestari, stabil, dan terus terjaga keberlanjutannya dalam waktu yang panjang. Kestabilan global tersebut memberikan interpretasi bahwa kehidupan populasi ikan butini sebagai mangsa dalam keadaan terkendali dan eksis secara luas dalam waktu yang tidak terbatas.
2. Hasil analisis pada pengaruh usaha pemanenan memberikan keuntungan (*income*) bagi masyarakat yang didasarkan pada total pendapatan (*TR*) dan total biaya (*TC*) yang dikeluarkan. Besarnya keuntungan maksimal (π) yang diperoleh bergantung pada peningkatan kualitas dan kuantitas usaha pemanenan yang dilakukan. Berdasarkan hasil simulasi menunjukkan bahwa keberadaan pasangan terurut setiap usaha pemanenan menyebabkan peningkatan keuntungan maksimum. Hasil temuan juga menunjukkan bahwa jumlah usaha pemanenan pada populasi mangsa yang lebih kecil dari populasi pemangsa ($E_1 < E_2$) memberikan keuntungan yang lebih tinggi, jika dibandingkan dengan jumlah usaha pemanenan pada populasi mangsa yang lebih besar dari populasi pemangsa ($E_1 > E_2$). Hal ini bermakna bahwa jika tingkat usaha pemanenan populasi mangsa meningkat maka keadaan kesetimbangan populasi mangsa pemangsa akan menurun. Kondisi demikian disebabkan oleh semakin banyak populasi mangsa yang dipanen, semakin sedikit jumlah populasi mangsa yang ada. Sehingga menyebabkan pemangsa mengalami kesulitan untuk mendapatkan

makanan dan mengakibatkan jumlah pemangsa juga semakin berkurang. Sebaliknya, jika tingkat upaya pemanenan pada populasi pemangsa meningkat, maka mengakibatkan penurunan jumlah populasi pemangsa dan menyebabkan populasi mangsa tetap eksis dan terjadi peningkatan.

3. Dinamika populasi mangsa pemangsa yang dipengaruhi oleh waktu tunda ($\tau \neq 0$) menyebabkan perubahan titik kesetimbangan menjadi tidak stabil dan terjadi bifurkasi. Keberadaan waktu tunda kritis (τ_0) dalam analisis sebagai nilai batas yang menyebabkan perubahan kestabilan dan diperoleh satu nilai kritis tundaan yang positif $\tau_0 = 0.797$. Ketika $\tau < 0.797$ titik keseimbangan TE_1 berada dalam kondisi stabil asimptotik, sedangkan ketika $\tau > 0.797$ titik keseimbangan TE_1 menjadi tidak stabil, dan ketika $\tau = 0.797$ titik keseimbangan TE_1 menyebabkan kondisi kestabilan menjadi tidak ada dan terjadi bifurkasi. Perubahan parameter waktu tunda dari kecil menjadi besar dari nilai batas waktu tunda mempengaruhi perubahan kestabilan titik kesetimbangan stabil menjadi tidak stabil.

5.2. Masalah Terbuka

Beberapa masalah yang masih terbuka untuk pengembangan penelitian selanjutnya yaitu:

1. Mengembangkan model dengan mempertimbangkan faktor-faktor ekologis yang mendekati fenomena realitas dengan melibatkan berbagai macam fungsi respon yang tidak hanya bergantung pada kepadatan populasi mangsa tetapi bergantung juga pada kepadatan populasi pemangsa.
2. Menambahkan pengaruh pemangsa super (ikan sapu-sapu/ *hypostomus plecostomus*) pada model dan menganalisis kebijakan pemanenan optimal dalam mengontrol keberlanjutan populasi mangsa sebagai populasi endemik yang dijaga kelestariannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, M., & Pathak, R. (2012). Persistence and Optimal Harvesting of Prey-Predator Model with Holling Type III Functional Response. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 4(3), 78-96.
- Ali, N., and M. Jazar. (2013). Global Dynamics of a Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Responses. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 43(1-2), 271-293.
- Banerjee, S. (2021). *Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications* (Second). Leiden, Taylor & Francis.
- Belkhodja, K., Moussaoui, A., & Alaoui, M. A. (2018). Optimal Harvesting and Stability for a Prey–Predator Model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 39(1), 321–336.
- Bian, F., Zhao, W., Song, Y., & Yue, R. (2017). Dynamical Analysis of a Class of Prey-Predator Model with Beddington-Deangelis Functional Response, Stochastic Perturbation, and Impulsive Toxicant Input. *Complexity*, 2017(1), 1-19.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. London, Springer
- Chakraborty, K., Das, S., & Kar, T. K. (2011). Optimal Control of Effort of a Stage Structured Prey–Predator Fishery Model with Harvesting. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(6), 3452-3467.
- Chen, S. (2017). Stationary Patterns of a Diffusive Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *National Natural Science Foundation of China, Harbin Institute of Technology, China*, 1(1), 1–36.

- Daud, A. A. M. (2020). Some Issues on the Mathematical Modeling of Population Dynamics using Differential Equations. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 15(2), 501–513.
- Dawes, J. H. P., & Souza, M. O. (2013). A Derivation of Holling's Type I, II and III Functional Responses in Predator–Prey Systems. *Journal of Theoretical Biology*, 327(1), 11-22.
- Djilali, S. (2019). Effect of Herd Shape in a Diffusive Predator-Prey Model with Time Delay. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 9(2), 638-654.
- Dubey, B., Agarwal, S., & Kumar, A. (2018). Optimal Harvesting Policy of a Prey–Predator Model with Crowley–Martin-type Functional Response and Stage Structure in the Predator. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 23(4), 493–514.
- Firman, Toaha, S., & Kasbawati. (2014). Modification of the Trajectory Following Method for Asymptotic Stability in a System Nonlinear Control. *Nonlinear Dynamics and System Theory*, 159(1), 7923-7934.
- Frisman, E. Y., Zhdanova, O. L., Kulakov, M. P., Neverova, G. P., & Revutskaya, O. L. (2021). Mathematical Modeling of Population Dynamics Based on Recurrent Equations: Results and Prospects. *Biology Bulletin*, 48(1), 1–15.
- Hossain, S., Haque, M. M., Kabir, M. H., Gani, M. O., & Sarwardi, S. (2021). Complex Spatiotemporal Dynamics of a Harvested Prey–Predator Model with Crowley–Martin Response Function. *Results in Control and Optimization*, 5(1), 1-7
- Huang, C., Li, H., & Cao, J. (2019). A Novel Strategy of Bifurcation Control for a Delayed Fractional Predator–Prey Model. *Applied Mathematics and Computation*, 347(1), 808-838.

- Huang, C., & Cao, J. (2019). Comparative Study on Bifurcation Control Methods in a Fractional-Order Delayed Predator-Prey System. *Science China Technological Sciences*, 62(2), 298-307.
- Hu, G.P., & Li, X.L. (2012). Stability and Hopf Bifurcation for a Delayed Predator-Prey Model with Disease in the Prey. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(3), 229-237
- Jana, D., & Tripathi, J.P. (2017). Impact of Generalist Type Sexually Reproductive Top Predator Interference on the Dynamics of a Food Chain Model. *International Journal of Dynamics and Control*, 5(1), 999–1009
- Kang, C., Miao, H., Chen, X., Xu, J., & Huang, D. (2017). Global Stability of a Diffusive and Delayed Virus Dynamics Model with Crowley-Martin Incidence Function and CTL Immune Response. *Advances in Difference Equations*, 17(324), 1–16.
- Kar, TK. (2003). Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(1), 449-458.
- Kudsiyah, H., Suwarni, Rahim, S. W., Hidayani, A. A., & Moka, W. (2021). Population Dynamic of Bungo Fish (*Glossogobius Giuris*) in Three Integrated Lakes (Danau Tempe, Danau Sidenreng, and Danau Lampokka) South Sulawesi during Rainy Season. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 777(1), 012010.
- Kumari, N., & Mohan, N. (2019). Cross Diffusion Induced Turing Patterns in a Tritrophic Food Chain Model with Crowley-Martin Functional Response. *Mathematics*, 7(229), 1–25.
- Lapidus, L. & Seinfeld, J. (1971). *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. New York, Academic Press.
- Li, C., & Zhu, H. (2013). Canard Cycles for Predator–Prey Systems with Holling Types of Functional Response. *Journal of Differential Equations*, 254(2), 879-910.

- Li, H. (2014). Asymptotic Behavior and Multiplicity for a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey System with Crowley-Martin Functional Response. *Computers and Mathematics with Applications*, 68(7), 693–705.
- Li, S., Li, Y., Dong, Y., & Zhang, S. (2015). Qualitative Analysis of a Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(9), 1550110.
- Liao, T., Yu, H., & Zhao, M. (2017). Dynamics of a Delayed Phytoplankton-Zooplankton System with Crowley-Martin Functional Response. *Advances in Difference Equations*, 2017(5), 1–30.
- Liu, Q., Zu, L., & Jiang, D. (2016). Dynamics of Stochastic Predator–Prey Models with Holling II Functional Response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37(1), 62-76.
- Liu, C., Li, S., & Yan, Y. (2019). Hopf Bifurcation Analysis of a Density Predator-Prey Model With Crowley-Martin Functional Response And Two Time Delays. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 9(4), 1589–1605.
- Luenberger, D.G. (1979). *Introduction to Dynamical System Theory, Models, and Applications*. Canada, Wiley & Sons.
- Lv, Y., Yuan, R., & Pei, Y. (2013). A Prey-Predator Model with Harvesting for Fishery Resource with Reserve Area. *Applied Mathematical Modelling*, 37(5), 3048-3062.
- Maiti, A. P., Dubey, B., & Chakraborty, A. (2019). Global Analysis of a Delayed Stage Structure Prey–Predator Model with Crowley–Martin Type Functional Response. *Mathematics and Computers in Simulation*, 162(1), 58-84.
- Marquez, H. J. (2003). *Nonlinear Control Systems Analysis and Design*. New York, Wiley & Sons.

- Mondal, S., & Samanta, G. (2021). Time-Delayed Predator–Prey Interaction with the Benefit of Anti Predation Response in Presence of refuge. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 76(1), 23-42
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of a Predator-Prey Model with Nonlinear Incidence Rate, Crowley-Martin Type Functional Response and Disease in Prey Population. *Ecological Genetics and Genomics*, 1(12), 100035. <https://doi.org/10.1016/j.egg.2018.100035>
- Nasution, S. H., & Dina, R. (2019). Population Structure and Gonadal Maturity Stage of Endemic and Alien Fish Dominant Species in Lake Matano, South Sulawesi. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 380(1), 1-8.
- Ndii, M.Z. & Supriatna, A.K. (2020). Stochastic Dengue Mathematical Model in the Presence of Wolbachia: Exploring the Disease Extinction. *Nonlinear Dynamics and System Theory*, 20(2), 214-227.
- Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York, Springer.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskij, V. G., Gamkrelidze, R. V., & Mishchenko, E. F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, Wiley & Sons.
- Pratama, R. A., Ruslau, M. F. V., Suryani, D. R., & Meirista, E. (2020). Optimal Harvesting and Stability of Predator-Prey Model with Holling Type II Predation Respon Function and Stage-Structure for Predator. *Journal of Physics: Conference Series*, 1569(4), 042067.
- Qu, Y., & Wei, J. (2010). Bifurcation Analysis in a Predator–Prey System with Stage-Structure and Harvesting. *Journal of the Franklin Institute*, 347(7), 1097-1113.
- Rana, S. M. S. (2019). Bifurcation Analysis and Chaos Control in a Discrete-Time Predator-Prey System with Crowley-Martin Functional Response. *Computational Ecology and Software*, 9(2), 37–57.

- Rihan, F. A., Lakshmanan, S., Hashish, A. H., Rakkiyappan, R., & Ahmed, E. (2015). Fractional-Order Delayed Predator–Prey Systems with Holling Type-II Functional Response. *Nonlinear Dynamics*, 80(2), 777-789.
- Santra, P. K., Mahapatra, G. S., & Phaijoo, G. R. (2020). Bifurcation and Chaos of a Discrete Predator-Prey Model with Crowley–Martin Functional Response Incorporating Proportional Prey Refuge. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020(1), 5309814.
- Sivasamy, R., Sathiyathan, K., & Balachandran, K. (2019). Dynamics of a Modified Leslie-Gower Model with Crowley-Martin Functional Response and Prey Harvesting. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 8(4), 621–636.
- Shi, X., Zhou, X., & Song, X. (2011). Analysis of a Stage-Structured Predator-Prey Model with Crowley-Martin Function. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 36(1-2), 459-472.
- Strogatz, S.H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Massachusetts (US): Addison-Wesley Publishing Company.
- Tasari. (2013). Sifat-Sifat Matriks Uniter, Matriks Normal, dan Matriks Hermitian. *Magistra*, 83(1), 32-49.
- Tiwari, V., Tripathi, J. P., Abbas, S., Wang, J. S., Sun, G. Q., & Jin, Z. (2019). Qualitative Analysis of a Diffusive Crowley–Martin Predator–Prey Model: The Role of Nonlinear Predator Harvesting. *Nonlinear Dynamics*, 98(2), 1169-1189.
- Toaha, S., & Azis, M. I. (2018). Stability and Optimal Harvesting of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model. In IOP Conf. Series: *Journal of Physics: Conf. Series*, 979(1), 012069.
- Toaha, S. (2013). *Pemodelan Matematika dalam Dinamika Populasi*. Makassar, Dua Satu Press.

- Toaha, S., Firman, & Ribal, A. (2022). Global Stability and Optimal Harvesting of Predator-Prey Model with Holling Response Function of Type II and Harvesting in Free Area of Capture. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 22(1), 105–116.
- Toaha, S., Kusuma, J., Khaeruddin, & Bahri, M. (2014). Stability Analysis and Optimal Harvesting Policy of Prey-Predator Model with Stage Structure for Predator. *Applied Mathematical Sciences*, 8(159), 7923–7934.
- Tripathi, J. P., Tyagi, S., & Abbas, S. (2016). Global Analysis of a Delayed Density Dependent Predator–Prey Model with Crowley–Martin Functional Response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 30(3), 45-69.
- Upadhyay, R. K., & Raw, S. N. (2011). Complex Dynamics of a Three Species Food-Chain Model with Holling type IV Functional Response. *Nonlinear Analysis Modeling Control*, 16(3), 353-374.
- Von-Rintelen, T., Von-Rintelen, K., Glaubrecht, M., Schubart, C. D., & Herder, F. (2012). Aquatic biodiversity hotspots in Wallacea: the species flocks in the ancient lakes of Sulawesi, Indonesia. *Biotic Evolution and Environmental Change in Southeast Asia*. Cambridge University Press, Cambridge, 11(1) 290-315.
- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York, Springer.
- Willems, J.L. (1970). *Stability Theory of Dynamical Systems*. London, Thomas Nelson & Sons.
- Xu, C., Ren, G., & Yu, Y. (2019). Extinction Analysis of Stochastic Predator–Prey System with Stage Structure and Crowley–Martin Functional Response. *Entropy*, 21(252), 1–13.

- Xu, R., & Zhang, S. (2013). Modelling and Analysis of a Delayed Predator–Prey Model with Disease in the Predator. *Applied Mathematics and Computation*, 224(1), 372-386.
- Xu, S. (2012). Global Stability of the Virus Dynamics Model with Crowley–Martin Functional Response. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 12(9), 1–10.
- Yin, H., Xiao, X., Wen, X., & Liu, K. (2014). Pattern Analysis of a Modified Leslie–Gower Predator–Prey Model with Crowley–Martin Functional Response and Diffusion. *Computers and Mathematics with Applications*, 67(8), 1607–1621.
- Yang, R., & Zhang, C. (2017). Dynamics in a Diffusive Modified Leslie–Gower Predator–Prey Model with Time Delay and Prey Harvesting. *Nonlinear Dynamics*, 87(2), 863-878.
- Yoshioka, H., Yaegashi, Y., Yoshioka, Y., & Tsugihashi, K. (2019). Optimal Harvesting Policy of an Inland Fishery Resource under Incomplete Information. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 35(4), 939–962.
- Yuan, R., Jiang, W., & Wang, Y. (2015). Saddle-Node-Hopf Bifurcation in a Modified Leslie–Gower Predator–Prey Model with Time-Delay and Prey Harvesting. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 422(2), 1072-1090.
- Yu, S. (2014). Global Stability of a Modified Leslie–Gower Model with Beddington–DeAngelis Functional Response. *Advances in Difference Equations*, 2014(1), 84.
- Zaghdani, A. (2021). Mathematical Study of a Modified SEIR Model for the Novel SARS-Cov-2 Coronavirus. *Nonlinear Dynamics and System Theory*, 21(3), 326-336.
- Zhang, H., Ma, S., Huang, T., Cong, X., Gao, Z., & Zhang, F. (2018). Complex Dynamics on the Routes to Chaos in a Discrete Predator–

- Prey System with Crowley-Martin Type Functional Response. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2018(2), 1–18.
- Zhang, X. C., Sun, G. Q., & Jin, Z. (2012). Spatial Dynamics in a Predator-Prey Model with Beddington-DeAngelis Functional Response. *Physical Review*, 85(2), 021924.
- Zhang, Y., Chen, S., & Gao, S. (2016). Analysis of a Nonautonomous Stochastic Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *Advances in Difference Equations*, 2016(264), 1–28.
- Zhou, J. (2014). Positive Solutions for a Modified Leslie-Gower Prey-Predator Model with Crowley-Martin Functional Responses. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 21(1), 621–661.
- Zhou, J. (2015). Qualitative Analysis of a Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Responses. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 14(3), 1127–1145.
- Zhou, X., Shi, X., & Song, X. (2009). Analysis of a Delay Prey-Predator Model with Disease in the Prey Species Only. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 46(4), 713-731.
- Zhou, X., & Cui, J. (2011). Global Stability of the Viral Dynamics with Crowley-Martin Functional Response. *Bull. Korean Math. Soc.*, 48(3), 555–574.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Data Panjang Total Ikan Butini sebanyak 567 ekor dalam satuan centimeter (cm).

Data ini diperoleh dari hasil pengukuran panjang ikan butini yang tertangkap harian pada tahun 2019 di Danau Towuti Kabupaten Luwu Timur. Alat yang digunakan untuk mengukur panjang ikan yaitu mistar 30 cm dan 50 cm.

23	21	37	25	31	30	33	45	21.5	26	45	30	21	27.5	20	46	23	29.5	35
25	37	23	42	25	43	26	41	40	22	33	24	24	34	29	36	20	30	21
39	28	31	34	28	46	25	25.5	36	32	27	25	27.5	27	23	24	21	28.5	44
27	28	31	24	33	44	44.5	32	21	35	44	33	27	22	20.5	42	41	37	26
27	25.5	40	26.5	25	36	24	27	22.5	22	25	30	23	27	45	23	41	28.5	34
35	24	23	36	25	36	25	42	20.5	30	24	41	32	26	41	21	20	44	21
41	45	25	37	25	35	21	28	42	35	24	43	30	26	21	25	32	23	45
26	22	25.5	25	35	35	36	40	26	26	41	25	25	22	29	27	25	32	26
28	36	44	24	36	26	22	21	28	44	36	30	28	43	44	28	35	32	34
25	37	35	28.5	28	34	21	28	22	32	31	36	24	33	30	29	41	26	33
24	22	31	26	27	23	26	43	32	24	27	26	26	22	27	42	34	31	25
26	27	30	45	32	34	24	25	27	36	34	40	43	28	21	22	35	27	26
28	35	23	34	45	30	27	41	34	24	43	36	30	32	42	42	34	33	31
35	44	22	20.5	35	33	26	40	24	34	27	41	23	35	22	30	22	26	30
44	37	26	34	42	25	34	21	25	25	35	25	36	34	26	26	25	27	24
24	21	28	32	33	44	27	20	24	27	31	23	28	36	22	25	28	34	27
26	28.5	34	28.5	23	38	44	25	24	28	35	40	43	33	42	24	24	31	28

24	38.5	24	42	42	33	27.5	20	28	27	45	22	31	30	35	34	36	41	24
23	37	30	43	43	27	31	35	27	48	24	44	36	32	21	36	44	26	30
22	34	20.5	25	34	21	28	43	25	33	25	22	25	27	20	23	35	42	34
23	28	44	24	33	30	44	21	42	26	34	21	27	27	32	29.5	34	26	21
28	29	22	27	30	28	34	30	33	21	32	23	35	30	26	27	25	28	42
26	28	40	24	34	25	24	40	25	34	32	26	45	31	34	34	30	33	23
26	35	27	25	25	30	26	24	27	33.5	45	26	40.5	23	22	45	34	34	43
36	33	24	41	35	35	26	22	25	33	21	27	25	30	36	35	35	35	22
44	28	25	29	35	21	25	42	20	23.5	22	30	35	27	25	22	25	34	36
32	28.5	48	28	32	36	28	40	44	21	25	25	22	30	34	34	30	27	40
30.5	27.5	22	45	34	26	27	21.5	40	21	22	24	28	23	35	36	35	44	
37	44	40	36	26	35	21	27	36	24	42	25	44	32	27	34	36	30	
33.5	36	36	28.5	21	34	43	27.5	22	24	24	22	45	24	23	27	21	33	

Data Panjang Total Ikan Nila sebanyak 279 ekor dalam satuan centimeter (cm)

Data ini diperoleh dari hasil pengukuran panjang ikan nila yang tertangkap harian pada tahun 2019 di Danau Towuti Kabupaten Luwu Timur. Alat yang digunakan untuk mengukur panjang ikan yaitu mistar 30 cm dan 50 cm.

12	21	20.1	14.3	25	21	12	28	23	22	12	17.2	13.2
14.5	20	14	14.2	26	12.5	20	15	13	24	25.8	12.4	20.3
14.5	22	15	15.1	27.4	31	21.5	16	22	29	13.2	15.3	23
13	22.7	14.3	13.5	14.3	12.1	24	17.2	21	13	14	12.5	13.2
12	22.6	14.2	13.2	14.2	13.5	23	12.4	20.2	23	13	16.6	12

19	13	15.1	22.2	15.1	28.9	20.1	15.3	18.3	16	13	24	22.8
22	14.3	13.5	23	13.5	27	14	13	14.8	17.2	25	21.5	17.8
12	13.5	13.2	22.9	13.2	18.3	21	28.2	14.5	12.4	31	16.6	13.5
23	15	13	28	17	25	12.5	29	22	15.3	14.2	13.2	28
13	17	23	14.2	18.3	26	22	14	28	13	28.5	22	29
23	18.3	27	15.1	16	27	13.2	21	15	20	13	26	18
13	25	28.5	13.5	15.8	25	16	17	21	24	14	21	21
14	26	29	13.2	15.5	13	14.3	23	17.2	21	22.8	22.8	15
23.1	13	14.5	18.3	14.3	15	20	25	12.4	13	22	21	22.8
16	25	14	25	15.7	16.7	17	24	15.3	28.5	21	12.5	22.8
15	13	13.8	26	16.8	17	18.5	14.3	13	27.3	12.4	16.5	
13	15	21	27	22.3	17.8	21	14.2	12	13	13.5	13	
26	16.7	22.4	25	21.5	16.6	16.2	15.1	24.2	28	22.4	12	
16.7	17	21.5	13	22	21	23.2	13.5	25.1	28.1	13.7	21	
13.1	17.8	22.8	15	14.3	22	24.1	13.2	14.3	21	22.8	23.1	
15.4	16.6	22	16.7	14.2	24	13	17	22.8	20.3	22	16	
14.8	21	21	17	15.1	22	28	12.7	22	21	21	27	

ESTIMASI PARAMETER DINAMIKA POPULASI

Kelompok Umur

Kelompok umur (cohor) ditentukan dengan menggunakan metode Bhattacharya dengan membagi ikan layang dengan beberapa kisaran panjang (L), kemudian di cari frekuensi teoritis (fc) dari frekuensi masing-masing kelompok tersebut. Nilai fc dihitung dengan menggunakan persamaan (Sparre *et al.*, 1989) yaitu:

$$fc = \frac{ni}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(TK - \bar{X})^2}{2S^2}\right)$$

Keterangan

fc = Frekuensi terhitung, n = Jumlah ikan, i = Interval kelas, S = Standar deviasi, S^2 = variansi, \bar{X} = Panjang rata-rata, TK = Tengah kelas panjang total, $\pi = 3.14$.

Selanjutnya dicari logaritma natural dari frekuensi teoritis ($\log fc$) di antara kelompok kelas panjang yang ada, dilanjutkan dengan mencari selisih logaritmanya ($\Delta \log fc$). Kemudian dilakukan pemetaan nilai tengah kelas sebagai sumbu x dan selisih logaritma natural frekuensi kumulatif ($\Delta \log fc$) sebagai sumbu y . Jumlah garis yang terbentuk menunjukkan jumlah kelompok umur. Perpotongan garis lurus regresi dengan sumbu x memberikan nilai panjang rata-rata setiap kelompok umur. Jumlah rata-rata setiap kelompok umur, nilainya adalah $-a/b$, dimana a dan b merupakan koefisien regresi.

Pertumbuhan

Pendugaan parameter pertumbuhan menggunakan persamaan pertumbuhan Von Bertalanffy (Suwarni *et al.*, 2015) sebagai berikut:

$$L_t = L_\infty(1 - e^{-r(t-t_0)})$$

Keterangan

L_t = Panjang ikan pada umur t (cm)

L_∞ = Panjang Asimptot ikan (cm)

r = Koefisien laju pertumbuhan

t_0 = Umur teoritis ikan pada saat panjang sama dengan nol (tahun)

t = umur (tahun)

Untuk menentukan panjang asimptot ikan (L_∞) dan koefisien laju pertumbuhan (r) digunakan metode Ford dan Walford (Sparre *et al.*, (1999) yaitu dengan memplotkan $L(t)$

dan $L(t + \Delta t)$ dengan persamaan $L(t + \Delta t) = a + bL(t)$. Setelah mendapatkan persamaan regresi dari kedua hubungan kemudian dimasukkan ke dalam persamaan linier $Y = a + bX$. jika $L(t)$ sebagai absis (x) diplotkan terhadap $L(t + \Delta t)$ sebagai ordinat (y) sehingga terbentuk kemiringan (*slope*) sama dengan e^{-r} dan titik potong dengan absis sama dengan $L_{\infty}[1-e^{-r}]$ sehingga, nilai r dan L_{∞} diperoleh dengan $r = -\ln b$ dan $L_{\infty} = \frac{a}{1-b}$ (Rauf *et al.*, 2019). Selanjutnya, untuk menentukan t_0 akan digunakan rumus Pauly (Kurniawan, 2014), yaitu :

$$\text{Log}(-t_0) = -0.3922 - 0.2752(\text{Log } L_{\infty}) - 1.038 (\text{Log } r)$$

Mortalitas

Mortalitas (kematian) alami diestimasi dengan menggunakan persamaan Empiris Pauly (Kurniawan, 2014) yaitu:

$$\text{Ln } B = 0.8 \exp(-0.152 - 0.279 \ln L_{\infty} + 0.6534 \ln r + 0.4634 \ln T)$$

Dimana, T = Suhu rata-rata permukaan perairan ($^{\circ}\text{C}$).

Mortalitas total (Z) diestimasi dengan persamaan yang dikemukakan oleh Beverton dan Holt (Suwarni *et al.*, 2015) yaitu

$$Z = r \frac{L_{\infty} - \bar{L}}{\bar{L} - L'}$$

Dimana,

Z = Laju mortalitas total (tahun)

\bar{L} = Panjang rata-rata ikan yang tertangkap penuh (cm)

L' = Batas terkecil ukuran kelas panjang ikan yang tertangkap penuh

Mortalitas penangkapan (F) diduga dengan persamaan $Z = F + B$ Sehingga di peroleh $F = Z - B$. Sedangkan, laju eksploitasi (E) diperoleh dengan menggunakan rumus Beverton dan Holt yaitu $E = \frac{F}{Z}$ (Suwarni *et al.*, 2015).

Yield Per Recruitment

Pendugaan yield per recruitment (Y/R) merupakan salah satu model yang biasa dipergunakan sebagai dasar bagi strategi pengelolaan perikanan (Mamangkey, 2014). *Yield Per Recruitment* (Y/R), diketahui dari persamaan Beverton dan Holt (Sparre *et al.*, 1999), yaitu:

$$\frac{Y}{R} = EU^m \left(1 - \frac{3U}{1+m} + \frac{3U^2}{1+2m} - \frac{U^3}{1+3m} \right)$$

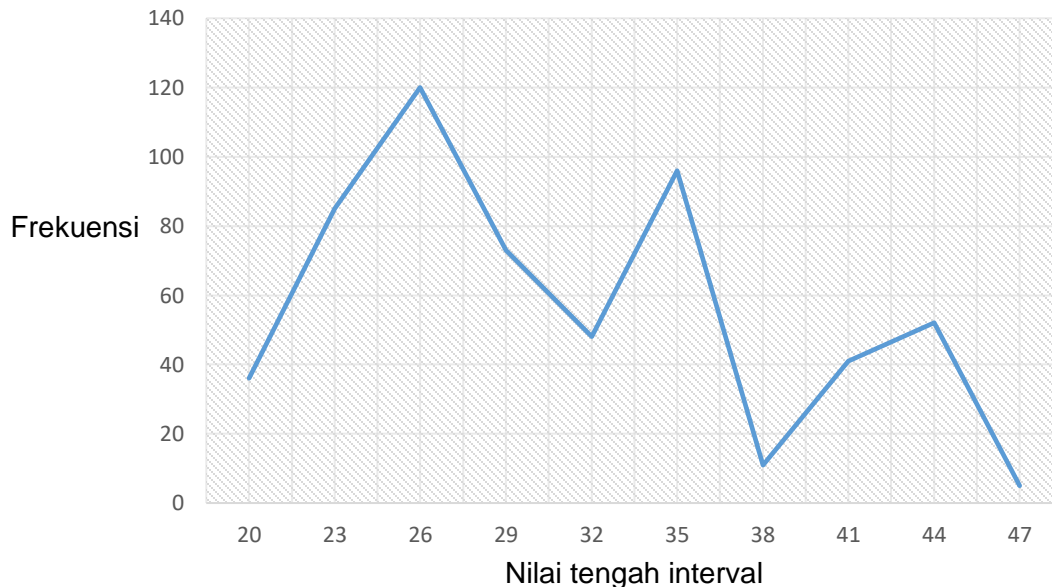
Dimana,

$$U = 1 - \frac{L'}{L_{\infty}} \text{ dan } m = \frac{1-E}{B/r}.$$

Selanjutnya, akan digambarkan kurva hubungan laju eksploitasi dan Y/R dapat digunakan sebagai indikator untuk menilai apakah laju eksploitasi (E) sudah optimal, belum optimal atau terjadi kelebihan eksploitasi dibandingkan dengan kemampuan populasi melakukan recruitment atau nilai Y/R (Rauf *et al.*, 2019).

ESTIMASI PARAMETER DIPOL IKAN BUTINI

Data Ikan Butini yang diperoleh selama 12 bulan penelitian berjumlah 567 ekor dengan kisaran panjang total 20-48 cm dan rata-rata panjang ikan 30.22 cm. Hasil perhitungan antara frekuensi dan tengah kelas didapatkan 3 kelompok umur. Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar berikut.



Gambar. Kelompok umur ikan butini

Penentuan distribusi frekuensi data, dimulai dengan menentukan banyak kelas (k) = $1 + 3.33 \log (n)$ dan panjang kelas (i) = $(data maks - data min) / k$. Sehingga diperoleh,

$$k = 1 + 3.33 \log (567) = 10.08.$$

$$c = \frac{48-20}{10.08} = \frac{28}{10.08} = 2.7 \text{ atau } 3.$$

Kelompok umur 1

No	IK			TK	F	F*TK	TK- \bar{X}	F*(TK- \bar{X}) ²	FC	Ln FC	d Ln FC
1	19	-	21	20	38	760	-5.14	1007.672	26.3910	3.273	1.346
2	22	-	24	23	89	2047	-2.14	411.223	101.401	4.619	0.2395
3	25	-	27	26	120	3120	0.850	86.795	128.850	4.858	-0.866
4	28	-	30	29	74	2146	3.850	1097.131	54.148	3.991	-3.991
					321	8073		2602.822			

$$\bar{X} = 25.1 \quad a = 13.16$$

$$S^2 = 8.1 \quad b = -0.57$$

$$S = 2.85 \quad L_1 = 23.07$$

Kelompok Umur 2

No	IK			TK	F	F*TK	TK- \bar{X}	F*(TK- \bar{X}) ²	FC	Ln FC	d Ln FC
5	31	-	33	32	48	1536	-3.3	522.72	23.628	3.162	1.359
6	34	-	36	35	96	3360	-0.3	8.64	92.043	4.522	-0.906
7	37	-	39	38	11	418	2.7	80.19	37.177	3.615	-3.615
					155	5314		611.55			

$$\bar{X} = 34.3 \quad a = 27.97$$

$$S^2 = 3.97 \quad b = -0.83$$

$$S = 1.99 \quad L_2 = 33.73$$

Kelompok Umur 3

No	IK			TK	F	F*TK	TK- \bar{X}	F*(TK- \bar{X}) ²	FC	Ln FC	d Ln FC
8	40	-	42	41	41	1681	-1.780	129.936	37.077	3.613	0.281
9	43	-	45	44	46	2024	1.219	68.441	49.088	3.893	-2.723
10	46	-	48	47	4	188	4.219	71.226	3.221	1.169	-1.169
					91	3893		269.604			

$$\bar{X} = 42.8 \quad a = 9.43$$

$$S^2 = 3.01 \quad b = -0.24$$

$$S = 1.73 \quad L_3 = 39.02$$

Memplotkan $L(t)$ dan $L(t + \Delta t)$ sebagaimana dalam tabel berikut.

No	$L(t)$	$L(t + \Delta t)$
1	23.066	33.729
2	33.729	39.018
Σ	58.795	72.747

Sehingga diperoleh persamaan regresi $Y = 22.286 + 0.496 X$.

$$a = 22.286 \quad L_{\infty} = 44.225$$

$$b = 0.496 \quad r = 0.701$$

Adapun nilai t_0 diperoleh dari

$$\text{Log}(-t_0) = -0.3922 - 0.2752(\text{Log } 44.225) - 1.038(\text{Log } 0.701)$$

$$t_0 = -0.164$$

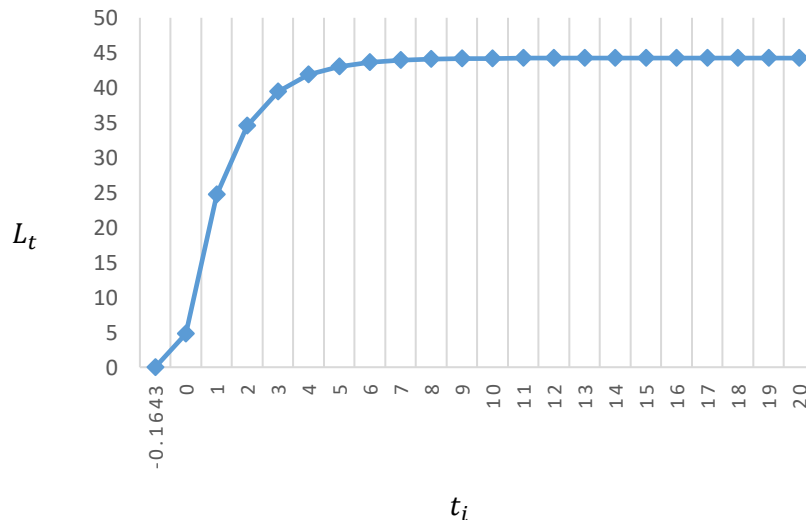
Grafik Pertumbuhan

Pendugaan parameter pertumbuhan menggunakan persamaan pertumbuhan Von Bertalanffy yang diperoleh yaitu:

$$L_t = 44.225(1 - e^{-0.701(t+0.164)})$$

t_i	-0.25	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_t	0.009	4.812	24.68	34.53	39.42	41.84	43.05	43.64	43.94	44.09	44.16
t_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
L_t	44.19	44.21	44.22	44.23	44.23	44.23	44.23	44.23	44.23	44.23	44.23

Maka grafik pertumbuhannya,



Gambar. Grafik pertumbuhan ikan butini

Mortalitas

Mortalitas alami diestimasi dengan persamaan $\ln B = 0.8 \exp(-0.152 - 0.279 \ln L_\infty + 0.6534 \ln r + 0.4634 \ln T)$ dengan suhu rata-rata permukaan danau 28 °C, sehingga diperoleh

$$\ln B = 0.8 \exp(-0.152 - 0.279 \ln 44.225 + 0.6534 \ln 0.701 + 0.4634 \ln 28)$$

$$B = 0.12.$$

$$\text{Mortalitas total (Z) diperoleh } Z = 0.701 \left(\frac{44.23 - 30.5}{30.5 - 20.5} \right) = 0.96$$

$$\text{Mortalitas Penangkapan (F) } = 0.96 - 0.12 = 0.84$$

$$\text{Laju Eksploitasi (E) } = 0.84 / 0.96 = 0.87$$

Tabel. Nilai dugaan mortalitas dan laju eksploitasi

No	Parameter populasi	Nilai Dugaan (per tahun)
1	Laju Pertumbuhan (r)	0.70
2	Mortalitas alami (B)	0.12
3	Mortalitas Penangkapan (F)	0.84
4	Mortalitas total (Z)	0.96
5	Laju Eksploitasi (E)	0.87

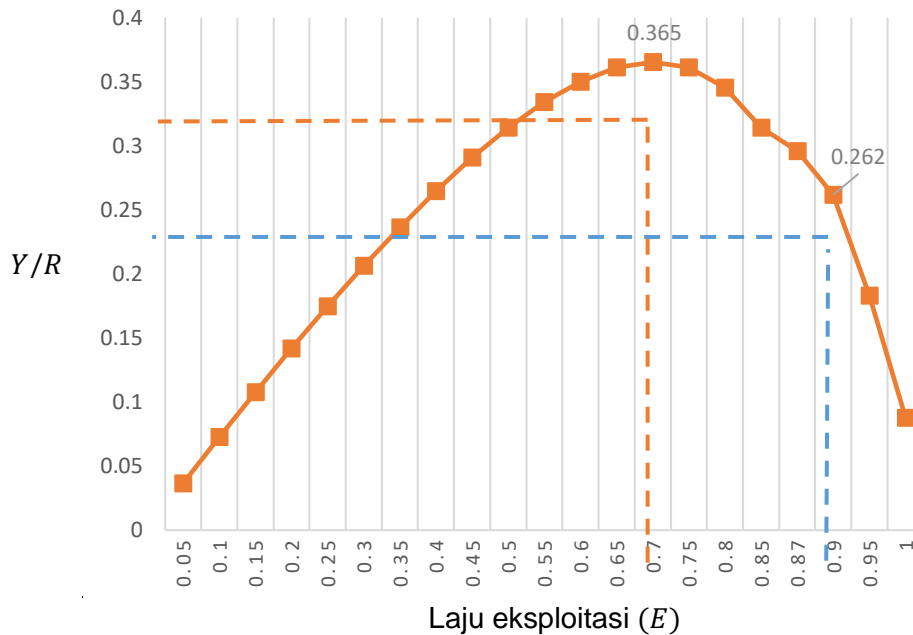
Yield Per Recruitment

Yield Per Recruitment (Y/R) diketahui dari persamaan Beverton dan Holt yaitu $Y/R = EU^m \left(1 - \frac{3U}{1+m} + \frac{3U^2}{1+2m} - \frac{U^3}{1+3m} \right)$. Dengan memperhatikan kembali nilai $B = 0.12$, $r = 0.70$, $L_\infty = 44.22$, $L' = 20.5$ dan $U = 1 - \frac{L'}{L_\infty} = 1 - \left(\frac{20.5}{44.22} \right) = 0.53$, maka nilai Y/R ditunjukkan pada tabel berikut,

E	m	Y/R
0.05	5.54	0.037
0.10	5.25	0.073
0.15	4.96	0.108
0.20	4.67	0.142
0.25	4.38	0.175
0.30	4.08	0.206
0.35	3.79	0.237
0.40	3.50	0.265
0.45	3.21	0.291

0.50	2.92	0.314
0.55	2.63	0.334
0.60	2.33	0.350
0.65	2.04	0.361
0.70	1.75	0.365
0.75	1.46	0.361
0.80	1.17	0.345
0.85	0.88	0.314
0.87	0.76	0.296
0.90	0.58	0.262
0.95	0.29	0.183
1.00	0.00	0.088

Adapun kurva hubungan laju eksploitasi dan yield per recruitment (Y/R) ditentukan pada gambar berikut,



Gambar. hubungan laju eksploitasi dan *yield per recruitment* (Y/R) ikan butini

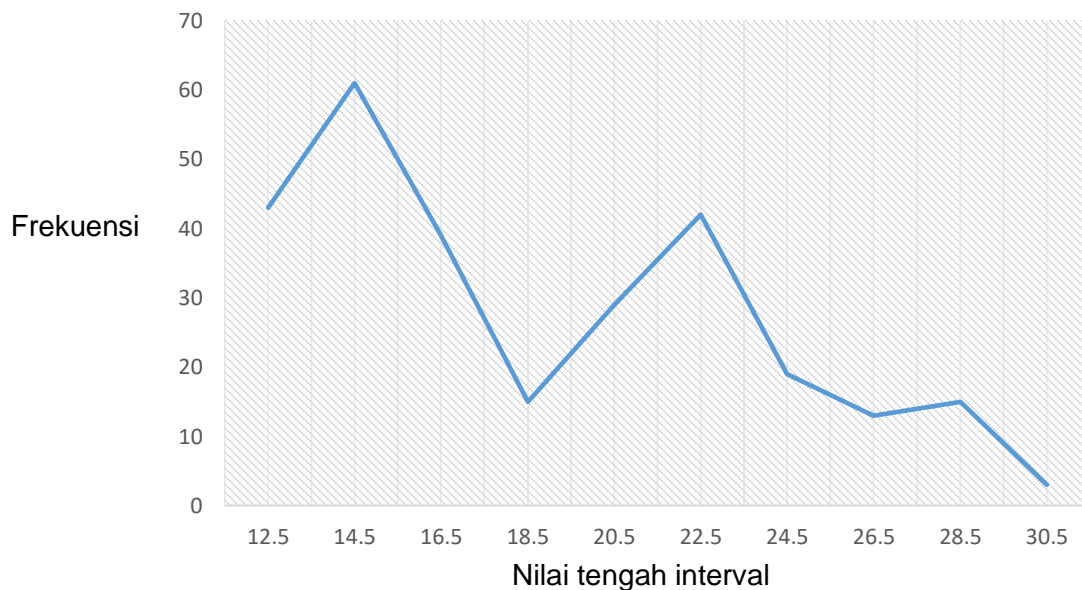
Berdasarkan hasil perhitungan dan gambar di atas dapat diketahui hubungan antara laju eksploitasi (E) dan yield per recruitment (Y/R) yaitu laju eksploitasi (E) sekarang ikan Butini yang diperoleh saat ini sebesar 0.87 dengan nilai Y/R sebesar 0.262 gram per rekrutmen¹, sedangkan laju eksploitasi (E) optimum yaitu 0.70 dengan nilai Y/R sebesar 0.365 gram per rekrutmen. Nilai ini menunjukkan bahwa di Danau Towoti dapat

¹ Artinya setiap rekrutmen yang terjadi terdapat 0.262 gram yang diambil sebagai hasil tangkapan (E).

dikategorikan sebagai perairan yang telah mengalami *over eksploitasi* karena telah melampaui nilai optimumnya. Dengan kata lain bahwa penangkapan ikan Butini telah melewati batas lestari dan apabila dilakukan penangkapan secara terus menerus maka stok populasi tersebut akan semakin berkurang bahkan akan mengalami kepunahan.

ESTIMASI PARAMETER DIPOL IKAN NILA

Data Ikan Nila yang diperoleh selama 6 bulan penelitian berjumlah 279 ekor dengan kisaran panjang total 12-31 cm dan rata-rata panjang ikan 18.49 cm. Hasil perhitungan antara frekuensi dan tengah kelas didapatkan 3 kelompok umur. Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar berikut.



Gambar. Kelompok umur ikan nila

Penentuan distribusi frekuensi data, dimulai dengan menentukan banyak kelas (k) = $1 + 3.33 \log (n)$ dan *panjang kelas* (i) = $(data maks - data min) / k$. Sehingga diperoleh,

$$k = 1 + 3.33 \log (279) = 8.9.$$

$$c = \frac{31-12}{8.9} = \frac{19}{8.98} = 2.12 \text{ atau } 2.$$

Kelompok umur 1

No	IK			TK	F	F*TK	TK- \bar{X}	F*(TK- \bar{X}) ²	FC	Ln FC	d Ln FC
1	12	-	13	12.5	41	512.5	-2.361	228.603	46.729	3.800	0,776
2	14	-	15	14.5	60	870	-0.361	7.831	99.261	4.577	-0.364
3	16	-	17	16.5	39	643.5	1.638	104.729	67.555	4.212	-1.505
4	18	-	19	18.5	15	277.5	3.638	198.603	14.988	2.707	-2.707
					155	2343		539.768			

$$\bar{X} = 14.86 \quad a = 8.034$$

$$S^2 = 3.505 \quad b = -0.58$$

$$S = 1.872 \quad L_1 = 13.86$$

Kelompok Umur 2

No	IK			TK	F	F*TK	TK- \bar{X}	F*(TK- \bar{X}) ²	FC	Ln FC	d Ln FC
5	20	-	21	20.5	29	594.5	-14.8	6352.16	4.396	1.480	0.160
6	22	-	23	22.5	42	945	-12.8	6881.28	5.157	1.640	0.136
7	24	-	25	24.5	20	490	-10.8	2332.8	5.911	1.776	-1.777
					91	2030		15566.24			

$$\bar{X} = 22.3 \quad a = 10.39$$

$$S^2 = 173 \quad b = -0.484$$

$$S = 13.15 \quad L_2 = 21.48$$

Kelompok Umur 3

No	IK			TK	F	F*TK	TK- \bar{X}	F*(TK- \bar{X}) ²	FC	Ln FC	d Ln FC
8	26	-	27	26.5	13	344.5	-1.333	23.111	17.718	2.874	0.471
9	28	-	29	28.5	18	513	0.667	8	28.366	3.345	-2.353
10	30	-	31	30.5	2	61	2.667	14.222	2.697	0.992	-0.992
					33	918.5		45.333			

$$\bar{X} = 27.85 \quad a = 9.46$$

$$S^2 = 1.417 \quad b = -0.36$$

$$S = 1.19 \quad L_3 = 25.88$$

Memplotkan $L(t)$ dan $L(t + \Delta t)$ sebagaimana dalam tabel berikut.

No	$L(t)$	$L(t + \Delta t)$
1	13.86	21.48
2	21.48	25.88
Σ	35.34	47.36

Sehingga diperoleh persamaan regresi $Y = 13.477 + 0.577 X$.

$$a = 13.477 \quad L_{\infty} = 31.89$$

$$b = 0.577 \quad r = 0.54$$

Adapun nilai t_0 diperoleh dari

$$\text{Log}(-t_0) = -0.3922 - 0.2752(\text{Log } 31.89) - 1.038(\text{Log } 0.54)$$

$$t_0 = -0.27$$

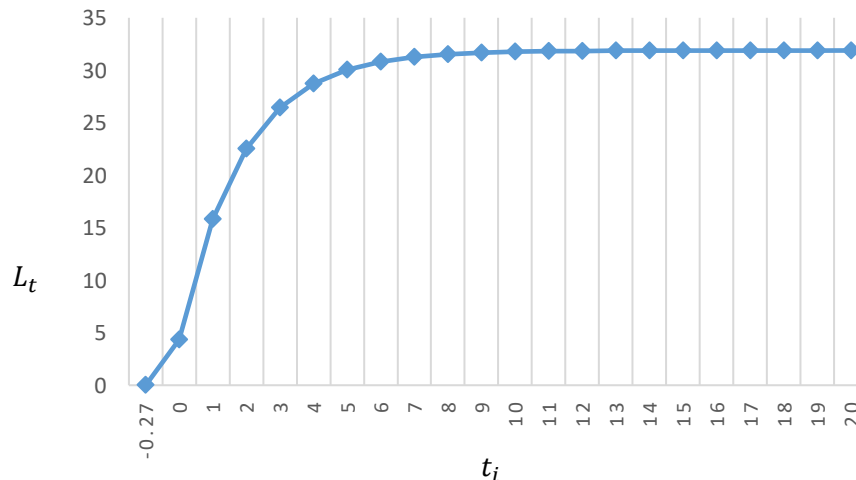
Grafik Pertumbuhan

Pendugaan parameter pertumbuhan menggunakan persamaan pertumbuhan Von Bertalanffy yang diperoleh yaitu:

$$L_t = 31.89(1 - e^{-0.54(t+0.27)})$$

t_i	-0.25	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_t	0	4.326	15.83	22.53	26.44	28.71	30.04	30.81	31.26	31.52	31.68
t_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
L_t	31.77	31.82	31.85	31.87	31.88	31.88	31.89	31.89	31.89	31.89	31.89

Maka grafik pertumbuhannya,



Gambar. Grafik pertumbuhan ikan nila

Mortalitas

Mortalitas alami diestimasi dengan persamaan $\ln B = 0.8 \exp(-0.152 - 0.279 \ln L_\infty + 0.6534 \ln r + 0.4634 \ln T)$ dengan suhu rata-rata permukaan danau 28 °C, sehingga diperoleh

$$\ln B = 0.8 \exp(-0.152 - 0.279 \ln 31.89 + 0.6534 \ln 0.54 + 0.4634 \ln 28)$$

$$B = 0.2.$$

$$\text{Mortalitas total (Z) diperoleh } Z = 0.54 \left(\frac{31.89 - 18.82}{18.82 - 12.25} \right) = 1.07$$

$$\text{Mortalitas Penangkapan (F) } = 1.07 - 0.2 = 0.87$$

$$\text{Laju Eksploitasi (E) } = 0.87 / 1.07 = 0.81$$

Tabel. Nilai dugaan mortalitas dan laju eksploitasi

No	Parameter populasi	Nilai Dugaan (per tahun)
1	Laju Pertumbuhan (r)	0.54
2	Mortalitas alami (B)	0.20
3	Mortalitas Penangkapan (F)	0.87
4	Mortalitas total (Z)	1.07
5	Laju Eksploitasi (E)	0.81

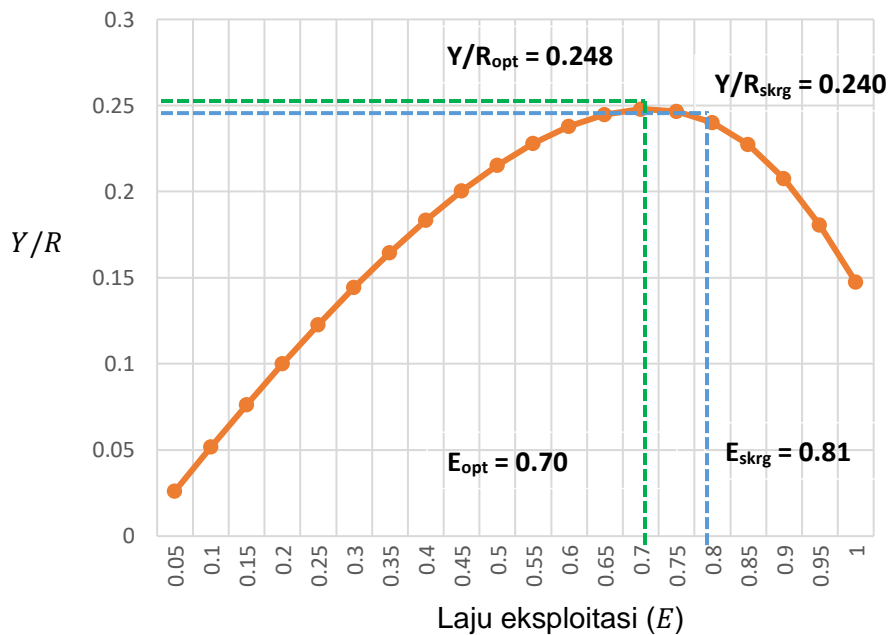
Yield Per Recruitment

Yield Per Recruitment (Y/R), diketahui dari persamaan Beverton dan Holt yaitu $Y/R = EU^m \left(1 - \frac{3U}{1+m} + \frac{3U^2}{1+2m} - \frac{U^3}{1+3m} \right)$. Dengan memperhatikan kembali nilai $B = 0.32$, $r = 0.54$, $L_\infty = 31.89$, $L' = 18.84$ dan $U = 1 - \frac{L'}{L_\infty} = 1 - \left(\frac{18.84}{31.89} \right) = 0.41$, maka nilai Y/R ditunjukkan pada tabel berikut.

E	m	Y/R
0.05	1.411	0.026
0.10	1.337	0.052
0.15	1.262	0.076
0.20	1.188	0.100
0.25	1.114	0.123
0.30	1.040	0.144
0.35	0.965	0.165
0.40	0.891	0.183
0.45	0.817	0.200

0.50	0.742	0.2154
0.55	0.668	0.2281
0.60	0.594	0.238
0.65	0.520	0.245
0.70	0.445	0.248
0.75	0.371	0.247
0.80	0.297	0.240
0.85	0.222	0.227
0.90	0.148	0.208
0.95	0.074	0.180
1.00	0	0.148

Adapun kurva hubungan laju eksploitasi dan yield per recruitment (Y/R) ditentukan pada gambar berikut,



Gambar. Hubungan laju eksploitasi dan yield per recruitment (Y/R) ikan nila

Berdasarkan hasil perhitungan dan gambar di atas dapat diketahui hubungan antara laju eksploitasi (E) dan yield per recruitment (Y/R) yaitu laju eksploitasi (E) sekarang ikan Nila yang diperoleh saat ini sebesar 0.81 dengan nilai Y/R sebesar 0.240 gram per rekrutmen², sedangkan laju eksploitasi (E) optimum yaitu 0.70 dengan nilai Y/R sebesar 0.248 gram per rekrutmen. Nilai ini menunjukkan bahwa di Danau Towoti dapat

² Artinya setiap rekrutmen yang terjadi terdapat 0.240 gram yang diambil sebagai hasil tangkapan (E).

dikategorikan sebagai perairan yang telah mengalami over eksploitasi karena sedikit telah melampaui nilai optimumnya dengan selisih yaitu 0.008 gram per rekrutmen.

DAFTAR PUSTAKA

- Bakhtiar, N. M., Saputra, S. W., & Solichin, A. (2013). Pertumbuhan dan laju mortalitas lobster batu hijau (*Panulirus homarus*) di perairan Cilacap Jawa Tengah. *Management of Aquatic Resources Journal (MAQUARES)*, 2(4), 1-10.
- Kurniawan, A. (2014). *Pendugaan Beberapa Parameter Dinamika Populasi Cumi-Cumi (Sephioteuthis lessoniana Lesson, 1830) Yang Tertangkap Di Perairan Kota Makassar Sulawesi Selatan*. Universitas Hasanuddin
- Mamangkey, J. J. (2014). Pertumbuhan dan Mortalitas Ikan Endemik Butini (*Glossogobius matanensis* Weber, 1913) di Danau Towuti, Sulawesi Selatan. *Berita Biologi*, 13(1), 31-38.
- Pauly D. (1984). *Fish population dynamics in tropical waters: A Manual for Use with Programmable Calculators*. Manila: ICLARM. 325 p
- Rauf, F. H., Tangke, U., & Namsa, D. (2019). Dinamika populasi ikan teri (*Stolephorus* sp) yang di daratkan di pasar higienis Kota Ternate. *Jurnal Biosainstek*, 1(01), 1-9.
- Sparre, P. E, Ursin dan S. C. Venema. (1999). *Introduksi Pengkajian Stock Ikan Tropis*. Buku Manual 1. FAO.
- Suwarni, S., Triesnati, J., Umar, M. T., Nur, M., & Hikmasari, H. (2015). Pendugaan Beberapa Parameter Dinamika Populasi Ikan Layang (*Decapterus Macrosoma*, Bleeker 1841) Di Perairan Teluk Bone, Sulawesi Selatan. *TORANI: Journal of Fisheries and Marine Science*, 25(1).