

**DISERTASI**

**Analisis Kestabilan dan Strategi Pemanenan pada Model Mangsa  
Pemangsa Fungsi Respon Tipe Crowley-Martin dengan Waktu Tunda**

***Stability Analysis and Harvesting Strategies of Prey-Predator Models  
Crowley-Martin Type Functional Response with Time Delay***

**DIDIHARYONO**



**PROGRAM STUDI DOKTOR MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2022**

**Analisis Kestabilan dan Strategis Pemanenan pada Model Mangsa  
Pemangsa Fungsi Respon Tipe Crowley-Martin dengan Waktu Tunda**  
*Stability Analysis and Harvesting Strategies of Prey-Predator Models  
Crowley-Martin Type Functional Response with Time Delay*

DISERTASI

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar doktor

Program Studi  
MATEMATIKA

Disusun dan diajukan oleh

**DIDIHARYONO**  
**(H023192001)**

Kepada

**PROGRAM STUDI DOKTOR MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**  
**MAKASSAR**  
**2022**

## LEMBAR PENGESAHAN

### ANALISIS KESTABILAN DAN STRATEGI PEMANENAN PADA MODEL MANGSA PEMANGSA FUNGSI RESPON TIPE CROWLEY-MARTIN DENGAN WAKTU TUNDA

Disusun dan diajukan oleh

**DIDIHARYONO**  
**NIM: H023192001**


Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka  
Penyelesaian Program Studi Doktor Marematika  
Fakutas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin  
pada Tanggal 24 Maret 2023  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusa

Menyetujui,  
**Promotor**



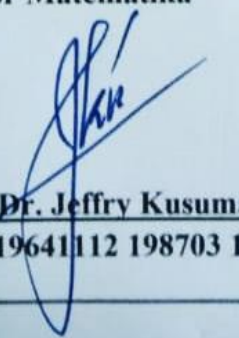
Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.  
NIP. 19680114 199412 1 001

Ko-promotor



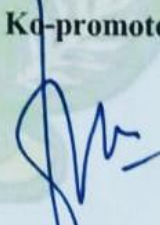
Prof. Dr. Jeffry Kusuma  
NIP. 19641112 198703 1 002

Ketua Program Studi  
Doktor Matematika




Prof. Dr. Jeffry Kusuma  
NIP. 19641112 198703 1 002

Ko-promotor



Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.  
NIP. 19800904 200312 2 001

Dekan Fakultas MIPA  
Universitas Hasanuddin



Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.  
NIP. 19720515 199702 1 002



## PERNYATAAN KEASLIAN DISERTASI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa disertasi berjudul “Analisis Kestabilan dan Strategi Pemanenan pada Model Mangsa Pemangsa Fungsi Respon Tipe Crowley-Martin dengan Waktu Tunda” adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing yaitu Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc., sebagai Promotor dan Prof. Dr. Jeffry Kusuma sebagai ko-promotor-1 serta Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si. sebagai ko-promotor-2. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam daftar pustaka disertasi ini. Sebagian dari isi disertasi ini telah dipublikasikan prosiding dan Jurnal internasional terindeks Scopus yaitu:

1. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, Vol. 921, No. 1, 2021 dengan judul “*Stability Analysis of Two Predators and One Prey Population Model with Harvesting in Fisheries Management*”.
2. *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management Harbin, China, July 9-11, 2022* dengan judul “*Global Stability of Prey-Predator Model with Crowley-Martin type Functional Response and Stage Structure for Predator*”.
3. *Journal Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 23, No. 1, hlm. 14-23, 2023 dengan judul “*Harvesting Strategies in the Migratory Prey-Predator Model with Crowley-Martin Type Response Function and Constant Efforts*”.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa disertasi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, November 2022



  
DIDIHARYONO

NIM: H023192001

## **UCAPAN TERIMA KASIH**

Saya bersyukur kepada Allah SWT bahwa disertasi ini akhirnya dapat terselesaikan dengan baik. Penelitian yang saya lakukan dapat terlaksana dengan sukses dan dapat terampungkan atas bimbingan serta arahan dari Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc., sebagai promotor, Prof. Dr. Jeffry Kusuma sebagai ko-promotor-1 dan Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si., sebagai ko-promotor-2. Terima kasih yang sebesar-besarnya kami ucapkan kepada promotor dan ko-promotor. Saya juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada para penguji diantaranya Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc., Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc., Dr. Firman, S.Si., M.Si., dan Prof. Syafruddin Side, S.Si., M.Si., Ph.D., sebagai penguji eksternal.

Ucapan terima kasih juga saya ucapkan kepada pimpinan Universitas Hasanuddin beserta jajarannya dan para dosen pengajar program doktor Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memfasilitasi dan membimbing kami dalam menempuh studi. Selanjutnya, ucapan terima kasih kepada teman sejawat mahasiswa program doktor matematika Universitas Hasanuddin dan teman-teman diskusi serta teman-teman lainnya yang tidak disebutkan satu persatu.

Akhirnya, kepada kedua orang tua tercinta saya mengucapkan limpah terima kasih dan sembah sujud atas doa, pengorbanan, dan memotivasi mereka selama saya menempuh pendidikan. Penghargaan yang besar juga saya sampaikan kepada isteriku, putra & putriku, serta seluruh keluarga besar atas doa dan dukungan yang tak ternilai.

Makassar, November 2022

DIDIHARYONO  
NIM: H023192001

## ABSTRAK

Didiharyono. **Analisis Kestabilan dan Strategis Pemanenan pada Model Mangsa Pemangsa Fungsi Respon Tipe Crowley-Martin dengan Waktu Tunda.** (Dibimbing oleh Syamsuddin Toaha, Jeffry Kusuma, dan Kasbawati).

Tujuan pemodelan matematika dalam penelitian ini yaitu menjelaskan fenomena alam yang terjadi dalam bentuk matematika sehingga digunakan memprediksi perilaku sistem untuk jangka waktu mendatang. Fenomena yang dikaji dalam penelitian ini yaitu ikan butini sebagai mangsa dan ikan nila sebagai pemangsa yang hidup pada beberapa danau di Kabupaten Luwu Timur. Populasi dibagi menjadi tiga kompartemen yaitu ikan butini, ikan nila yang hidup pada area yang diizinkan dan ikan nila yang hidup pada area yang dilarang untuk kegiatan pemanenan. Model pertumbuhan ketiga kompartemen dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear.

Model matematika yang digunakan dalam menganalisis fenomena tersebut yaitu model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin. Analisis yang dilakukan meliputi analisis kestabilan global model mangsa-pemangsa dengan adanya migrasi populasi pemangsa pada area yang normal dan pada area yang tercemar untuk kegiatan pemanenan. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik kesetimbangan yang nonnegatif stabil asimtotik secara global hal ini memiliki makna bahwa ekosistem dalam keadaan terkendali secara luas dalam waktu yang tidak terbatas.

Untuk analisis kestabilan usaha pemanenan konstan pada populasi mangsa dan populasi pemangsa pada area yang diizinkan untuk kegiatan pemanenan dilakukan terhadap suatu titik kesetimbangan interior. Berdasarkan simulasi titik kesetimbangan dari usaha pemanenan tidak dapat dinyatakan secara eksplisit karena kompleksitas model nonlinear. Maka dievaluasi beberapa pasangan terurut dari usaha pemanenan, sehingga diperoleh titik kesetimbangan yang stabil dan juga memberikan keuntungan maksimum yang berkelanjutan.

Selanjutnya dilakukan analisis pengaruh waktu tunda pada model yang diasumsikan sebagai masa pertumbuhan populasi hingga masa kematangan. Hasil analisis menunjukkan bahwa pengaruh waktu tunda dapat menyebabkan ketidakstabilan suatu titik kesetimbangan dan mengakibatkan munculnya bifurkasi Hopf.

Kata Kunci: Kestabilan, Pemanenan, Tipe Crowley-Martin, Waktu Tunda.

## ABSTRACT

Didiharyono. **Stability Analysis and Harvesting Strategies of Prey-Predator Model Crowley-Martin type Response Function with Time Delay.** (Supervised by Syamsuddin Toaha, Jeffry Kusuma, and Kasbawati).

The purpose of mathematical modeling in this study is explain natural phenomena in mathematical modelling so that it is used to predict system behavior for the future. The phenomena studied in this study are butini fish as prey and nila fish as predators that live in several lakes in East Luwu Regency. The population is divided into three compartments, namely butini fish, tilapia that live in permitted areas and nila fish that live in areas that are prohibited for harvesting effort. The growth model of the three compartments is expressed in the form of a system of nonlinear differential equations.

The mathematical model used in this phenomenon is the prey-predator model of Crowley-Martin type functional response. The analysis carried out included the global stability analysis of the prey-predator model in the presence of migration of predator populations in areas that are permitted and in areas that are prohibited for harvesting activities. The results of the analysis show that the nonnegative equilibrium point is asymptotically stable globally, this means that the ecosystem is in a state of wide control for an unlimited time.

For the stability analysis of constant harvesting efforts on prey populations and predator populations in the area permitted for harvesting activities, it is carried out at an interior equilibrium point. Based on the simulation, the equilibrium point of the harvesting effort cannot be stated explicitly due to the complexity of the nonlinear model. Then evaluate several ordered pairs of harvesting efforts, so that a stable equilibrium point is obtained and also provides maximum sustainable profit.

Furthermore, an analysis of the effect of the time delay on the model is carried out which is assumed to be the population growth period until maturity. The results of the analysis show that the effect of time delay can cause the instability of an equilibrium point and result in the appearance of a Hopf bifurcation.

Keywords: Stability, Harvesting, Crowley-Martin Type, Time Delay.

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN .....	iii
PERNYATAAN KEASLIAN DISERTASI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA ....	iv
UCAPAN TERIMA KASIH.....	v
ABSTRAK.....	vi
DAFTAR ISI.....	viii
I. PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	5
1.3. Tujuan Penelitian .....	7
1.4. Kegunaan Penelitian .....	8
1.5. Ruang Lingkup Penelitian.....	8
1.6. Kebaruan Penelitian .....	9
II. ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL MANGSA-PEMANGSA YANG BERMIGRASI DENGAN FUNGSI RESPONS TIPE CROWLEY-MARTIN .....	11
2.1. Abstrak .....	11
2.2. Pendahuluan .....	11
2.3. Metode .....	14
2.4. Hasil Analisis .....	15
2.5. Kesimpulan.....	29
2.6. Daftar Pustaka.....	29
III. STRATEGI PEMANENAN MODEL MANGSA-PEMANGSA YANG BERMIGRASI DENGAN FUNGSI RESPONS TIPE CROWLEY- MARTIN DAN UPAYA KONSTAN .....	33
3.1. Abstrak .....	33
3.2. Pendahuluan .....	33
3.3. Metode .....	36
3.4. Hasil Analisis .....	37
3.5. Kesimpulan.....	52
3.6. Daftar Pustaka.....	53



IV. ANALISIS WAKTU TUNDA PADA MODEL MANGSA PEMANGSA YANG BERMIGRASI DENGAN FUNGSI RESPONS TIPE CROWLEY-MARTIN .....	56
4.1. Abstrak .....	56
4.2. Pendahuluan .....	56
4.3. Metode .....	59
4.4. Hasil Analisis .....	60
4.5. Kesimpulan.....	77
4.6. Daftar Pustaka.....	78
V. PENUTUP .....	80
5.1. Kesimpulan Umum .....	80
5.2. Masalah Terbuka .....	81
DAFTAR PUSTAKA.....	82
LAMPIRAN-LAMPIRAN .....	942

# I. PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang

Pada umumnya, model matematika digunakan untuk menjelaskan fenomena alam yang terjadi dalam bentuk matematika yang sederhana hingga yang kompleks dan juga digunakan untuk memprediksi perilaku sistem untuk jangka waktu mendatang (Toaha, 2013). Penerapan model matematika dimanfaatkan dalam berbagai aspek kehidupan, diantaranya dalam aspek ekologis dan biologis. Aspek ini sangat menarik untuk dikaji dan dianalisis secara matematis mengingat banyaknya faktor yang mempengaruhi ekosistem populasi makhluk hidup dan keseimbangan makhluk hidup serta interaksi didalamnya (Sivasamy *et al.*, 2019). Dari aspek ekonomis juga memberikan dampak yang positif bagi terpenuhinya kebutuhan manusia dan dapat memberikan tambahan penghasilan (*income*) bagi manusia atas kegiatan pemanfaatan sumberdaya hayati dalam pengelolaan perikanan dan margasatwa (Tiwari *et al.*, 2019).

Pemanfaatan sumberdaya hayati tidak boleh dibiarkan begitu saja tanpa ada pengendalian dan pengontrolan dari pemerintah sebagai pihak yang memiliki tanggung jawab perlindungan sumberdaya tersebut. Dengan demikian, kegiatan pemanfaatan sumberdaya hayati diperlukan persyaratan atau aturan tambahan yang memperhatikan kondisi lingkungan, tidak merusak lingkungan, dan melindungi ekosistem agar populasi tetap lestari serta terjaga keberlanjutannya (*sustainability*). Pemanfaatan sumber daya hayati atau diistilahkan dengan pemanenan (*harvesting*) telah menarik bagi para ahli ekologi, ekonomi, dan matematika untuk melakukan pengkajian tentangnya. Kegiatan pemanenan menyisakan dampak kuat pada dinamika sumber daya hayati yang dengan sengaja bergantung pada sifat strategi usaha pemanenan yang diterapkan. Kondisi tersebut kemudian dimodelkan secara matematis sesuai dengan variabel dan parameter yang ditentukan berdasarkan kondisi fakta yang terjadi.

Salah satu model matematika yang relevan digunakan untuk mengkaji dan menganalisis dinamika populasi adalah model mangsa pemangsa (*predator-prey*). Model ini juga dikenal dengan persamaan Lotka-Volterra yang telah dianalisis dan dikembangkan sejak lama. Persamaan tersebut adalah model matematika yang mewakili hubungan antara interaksi dua atau lebih spesies atau dikenal dengan sistem predasi atau sistem mangsa pemangsa (Yin *et al.*, 2014). Kondisi populasi mangsa terus menerus mereproduksi generasinya untuk mempertahankan eksistensi dan keberlanjutan populasinya. Kondisi tersebut telah tercipta secara alami dan akan terus berlangsung sepanjang sejarah kehidupan makhluk hidup.

Model mangsa pemangsa pada prinsipnya memberikan gambaran bahwa dalam sistem dinamika populasi sangat beragam dengan model matematika yang beragam sesuai dengan variabel dan parameter yang dikembangkan. Kajian tentang pemodelan dalam dinamika populasi terus dilakukan dan selalu mengalami perkembangan serta kemajuan dengan upaya menggeneralisasi, memodifikasi, memperluas, dan mengembangkan model mangsa pemangsa sesuai dengan variabel yang diketahui (Dubey *et al.*, 2018). Akan tetapi, kompleksitas sistem, kondisi lingkungan, dan keadaan dinamika populasi yang begitu rumit sehingga perlu diselidiki dengan hati-hati karena seluruh variabel dalam model matematika memiliki makna dan nilai parameter yang berbeda-beda. Kompleksitas model dinamika populasi tersebut menjadi faktor penentu dalam menyusun persamaan matematika dalam model mangsa pemangsa yang diselesaikan secara analitik berdasarkan asumsi-asumsi yang dibangun sesuai dengan parameter tertentu.

Salah satu tujuan utama pemodelan yaitu membentuk model matematika yang akurat dan memberikan deskripsi matematika yang lebih baik dengan interpretasi biologis atau ekologis yang mengakomodasi situasi biotik yang realistis. Beberapa contohnya situasi realistis adalah tingkat konsumsi mangsa pemangsa dengan berbagai jenis fungsi respon di antaranya fungsi respon tipe Holling yang meliputi tipe Holling I, II, III, IV

(Li & Zhu, 2013), dan juga terdapat fungsi respon tipe Beddington-DeAngelis dan fungsi respon tipe Crowley-Martin (Tiwari *et al.*, 2019). Menurut Toaha (2013) suatu model mangsa pemangsa fungsi respon dengan usaha pemanenan berfungsi sebagai suatu pengendalian (*control*) di mana hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa usaha pemanenan dapat menyebabkan perilaku siklik dari sistem dan terjadi bifurkasi dalam suatu sistem.

Model mangsa pemangsa tipe Crowley Martin fungsi respon merupakan pengembangan dari model mangsa pemangsa tipe Holling yang tidak hanya memperhatikan fungsi kepadatan mangsa, tetapi lebih menekankan pada upaya menstabilkan interaksi pemangsa terhadap mangsa dengan memperhatikan efek gangguan pemangsa (Li *et al.*, 2015; Chen, 2017; Zhang *et al.*, 2018). Fungsi respon tipe Crowley-Martin sangat bergantung kepadatan mangsa, laju konsumsi pemangsa, gangguan diantara pemangsa dan waktu pencarian mangsa (Dubey *et al.*, 2018). Model mangsa pemangsa tipe Crowley Martin merupakan salah satu jenis fungsi respon model mangsa pemangsa yang berkaitan dengan tingkat predasi maksimum pemangsa, waktu penanganan, dan besarnya gangguan di antara pemangsa (Mortoja *et al.*, 2018).

Terdapat beberapa kajian tentang penerapan model mangsa pemangsa tipe Crowley Martin fungsi respon yang digunakan sebagai sumber rujukan dalam penelitian diantaranya, analisis tentang kebijakan pemanenan yang optimal dari model mangsa pemangsa fungsi respons tipe Crowley-Martin dan tahapan struktur pada pemangsa (Dubey *et al.*, 2018). Selanjutnya, melakukan modifikasi model dengan melibatkan faktor-faktor yang terkait dengan eksploitasi sumberdaya hayati yang berlebihan atau pemangsaan berlebihan (*over harvesting*) (Sivasamy, 2019; Tiwari *et al.*, 2019). Tidak hanya itu, ada yang menggunakan model mangsa pemangsa fungsi respons tipe Crowley-Martin dalam menganalisis dinamika virus dan penyakit menular lainnya dengan tingkat infeksi diselidiki (Zhou & Cui, 2011; Xu, 2012; Kang *et al.*, 2017; Kumari & Mohan, 2019).

Terdapat juga kajian yang memodifikasi model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley–Martin untuk melihat dinamika yang tertunda sistem fitoplankton-zooplankton (Liao *et al.*, 2017) dan melakukan analisis stokastik yang tidak otonom (*nonautonomous*) pada model mangsa pemangsa (Zhang *et al.*, 2016; Xu *et al.*, 2019). Selanjutnya, terdapat juga kajian yang memodifikasi model mangsa pemangsa Leslie–Gower dengan fungsi respon tipe Crowley–Martin dan penyebaran mangsa pemangsa (Yin *et al.*, 2014; Li, 2014; Zhou, 2015). Terakhir terdapat penelitian yang menganalisis bifurkasi dan *chaos control* dengan waktu diskrit model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley–Martin (Rana, 2019), dan menambahkan asumsi waktu tunda pada dua populasi yang dianalisis (Liu *et al.*, 2019).

Kajian dalam penelitian ini difokuskan dalam menganalisis kestabilan dan usaha pemanenan model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley–Martin dengan penambahan waktu tunda dan adanya migrasi diantara pemangsa pada area yang diizinkan dan pada area yang dilarang untuk dilakukan pemanenan. Analisis kestabilan yang dimaksud adalah analisis yang digunakan untuk melihat kondisi kestabilan dari titik kesetimbangan interior dengan memperhatikan nilai eigen dari persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks Jacobian. Analisis usaha pemanenan merupakan suatu kajian tentang kegiatan pemanenan terhadap populasi yang diharapkan dapat memberikan keuntungan atau pendapatan (*income*) bagi masyarakat dengan memperhatikan kelestarian lingkungan. Sedangkan, pelibatan waktu tunda dalam model menjadi sangat penting mengingat laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada waktu sekarang ( $t$ ), akan tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya ( $t - \tau$ ) dan berdampak pada kondisi populasi di masa mendatang.

Sebagian besar model matematika yang mempertimbangkan aspek ekonomis dalam bidang perikanan, tidak hanya fokus pada kegiatan penangkapan atau pemanenan ikan saja. Akan tetapi, juga memperhatikan

variabel yang lain meliputi kondisi alam, cuaca, kapal yang digunakan, alat tangkap yang tidak merusak lingkungan, dan peralatan lainnya yang dibutuhkan (Lv *et al.*, 2013). Setelah kegiatan pemanenan yang dilakukan, perlu juga memperhatikan aspek ekonomis lainnya yaitu kesetimbangan antara penawaran dan permintaan dalam menetapkan harga untuk sumber daya perikanan yang mempengaruhi keuntungan atau laba yang diperoleh. Untuk memperoleh keuntungan maksimal ( $\pi$ ) yang didasarkan penerimaan total ( $TR$ ) dan biaya total ( $TC$ ) dari kegiatan pemanenan yang dilakukan pada ketiga populasi mangsa pemangsa (Brauer & Chavez, 2012).

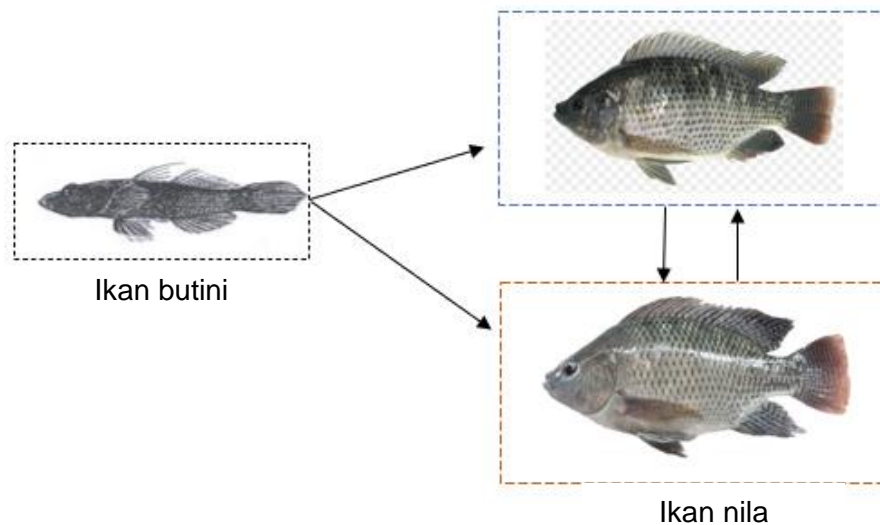
Model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin akan dianalisis dengan menentukan titik kesetimbangan, kemudian dilakukan analisis kestabilan lokal dan global dari titik kesetimbangan yang non-negatif untuk mengetahui perilaku sistem untuk jangka waktu tertentu (Li *et al.*, 2015). Dengan adanya asumsi bahwa ketiga populasi mangsa pemangsa tersebut bernilai ekonomis dan dapat menambah penghasilan (*income*) bagi masyarakat maka terjadi usaha pemanenan pada ketiga populasi mangsa-pemangsa yang diawali dengan penentuan titik kesetimbangan bionomik dan fungsi keuntungan maksimal dari usaha pemanenan (Toaha & Azis, 2018; Sivasamy *et al.*, 2019).

Setelah dilakukan analisis dari perilaku sistem dengan menentukan faktor-faktor yang memberikan dampak positif agar ketiga populasi tersebut tetap eksis (*survive*), stabil, dan tetap terjaga keberlangsungannya meskipun dieksploitasi dengan pemanenan. Selanjutnya, ditentukan perubahan populasi yang dipengaruhi waktu tunda (*time delay*) dengan bergantung pada waktu sebelumnya dan dilakukan simulasi model untuk membantu dalam melakukan analisis data.

## 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan pada latar belakang bahwa fokus kajian dalam penelitian ini yaitu menganalisis kestabilan dan pemanenan model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley-Martin dengan penambahan

waktu tunda. Adapun contoh kasus yang dianalisis dalam penelitian ini yaitu interaksi populasi ikan butini (*Glossogobius Matanansis*) yang merupakan ikan endemik sebagai mangsa (Andini *et al.*, 2019). Ikan butini merupakan ikan asli yang ditemukan pada Danau Mahalona, Danau Matano, dan Danau Towuti di Kabupaten Luwu Timur, Provinsi Sulawesi Selatan Indonesia (Nasution & Dina, 2019). Sedangkan, populasi ikan nila (*oreochromis nilotichus*) sebagai pemangsa pada area diizinkan dan pada area yang dilarang dilakukan penangkapan dan terjadi migrasi pada kedua area tersebut. Interaksi populasi tersebut ditunjukkan dalam Gambar 1.1 berikut.



Gambar 1.1 Interaksi populasi mangsa pemangsa

Ikan endemik pada danau tersebut memiliki cita rasa yang tinggi menyebabkan masyarakat nelayan di sekitar danau sering melakukan penangkapan atau pemanenan ikan yang diduga merusak lingkungan sehingga dikhawatirkan terjadi kepunahan di masa mendatang (Lv *et al.*, 2013). Beberapa penyebab yang membuat populasi ikan termasuk ikan endemik tersebut mengalami kepunahan yaitu intensitas penangkapan ikan yang menyebabkan *over fishing* dan over eksploitasi serta adanya ikan introduksi yang dilepaskan oleh masyarakat dalam hal ini ikan nila (Von-Rintelen *et al.*, 2012). Ikan introduksi tersebut menjadi ikan yang dominan

menguasai habitat danau sehingga ikan endemik mulai mengalami keterancaman dan dikhawatirkan menuju kepunahan.

Berdasarkan kajian tersebut maka disusun model matematika yang menjelaskan hubungan interaksi antara populasi mangsa pemangsa pada populasi ikan tersebut. Model matematika yang diformulasikan bertujuan untuk memahami dinamika populasi yang dihasilkan dari kegiatan penangkapan (pemanenan) ikan dan memperoleh pendapatan maksimal (*income*) dengan memperhatikan keberlanjutan spesies populasi tersebut hingga masa mendatang. Selain itu, ditentukan juga pengaruh waktu tunda dan analisis bifurkasi dari model matematika yang diformulasikan. Berdasarkan uraian tersebut yang menjadi rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- a. Bagaimana analisis kestabilan global suatu titik kesetimbangan yang non-negatif pada model dinamika populasi mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin?
- b. Bagaimana analisis kesetimbangan bionomik dan berapa besar keuntungan maksimum yang diperoleh usaha pemanenan pada populasi mangsa pemangsa?
- c. Bagaimana pengaruh waktu tunda pada model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin agar populasi mangsa pemangsa tetap lestari?

### **1.3. Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan penelitian ini yaitu:

- a. Untuk menganalisis kestabilan suatu titik kesetimbangan yang nonnegatif pada model dinamika populasi mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin.
- b. Untuk menganalisis kesetimbangan bionomik dan mengetahui besar keuntungan maksimum yang diperoleh usaha pemanenan pada populasi mangsa pemangsa.



- c. Untuk mengetahui pengaruh waktu tunda pada model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin agar populasi mangsa pemangsa tetap lestari meskipun populasi mangsa pemangsa dieksploitasi.

#### **1.4. Kegunaan Penelitian**

Penelitian ini berguna untuk pengembangan pemodelan matematika yang diterapkan pada bidang ekologi dan biologi. Harapannya hasil penelitian ini dapat memberikan manfaat dalam mengetahui dinamika populasi mangsa pemangsa yang melibatkan interaksi mangsa pemangsa, fungsi respon tipe Crowley-Martin, faktor migrasi, usaha pemananen konstan, dan pelibatan waktu tunda. Selain itu, dapat menjadi rujukan bagi penelitian pada pemodelan matematika dinamika populasi yang melibatkan interaksi antara ikan butini sebagai mangsa dan ikan nila sebagai pemangsa pada dua area yang berbeda. Parameter yang digunakan didasarkan pada beberapa sumber rujukan dan beberapa parameter lainnya diasumsi berdasarkan data primer.

#### **1.5. Ruang Lingkup Penelitian**

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan maka perlu diberikan batasan masalah dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Model mangsa pemangsa merupakan model yang berkaitan dengan interaksi mangsa pemangsa dengan asumsi bahwa kedua pemangsa berkompetisi untuk mendapatkan mangsa.
2. Fungsi respon tipe Crowley–Martin merupakan pengembangan model dari fungsi respon tipe Holling I, tipe Holling II, tipe Holling III, tipe Holling IV, dan fungsi respon tipe Beddington-DeAngelis. Fungsi respon tipe Crowley-Martin tersebut diklasifikasikan sebagai salah satu fungsi respons yang dipengaruhi laju konsumsi pemangsa, kepadatan pemangsa yang tinggi, gangguan pemangsa, dan waktu pencarian mangsa.

3. Pemanenan merupakan banyaknya tangkapan pada masing-masing ukuran populasi pemangsa dengan tujuan bahwa kegiatan tangkapan (eksploitasi) pada populasi mangsa pemangsa merupakan populasi yang sangat bermanfaat bagi kehidupan manusia.
4. Adanya pelibatan waktu tunda dalam model yang mempengaruhi laju pertumbuhan populasi yang tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada waktu sekarang, akan tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya.

### **1.6. Kebaruan Penelitian**

Kebaruan penelitian ini yaitu konstruksi model mangsa-pemangsa yang disusun dari interaksi antara ikan butini sebagai mangsa dan ikan nila sebagai pemangsa pada dua area yang berbeda yaitu pada area yang diizinkan untuk pemanenan dan area terlarang berdasarkan fenomena ekologis. Model populasi mangsa disusun berdasarkan model pertumbuhan logistik, interaksi antara mangsa dan pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin pada area terlarang dan menggunakan tipe Holling I pada area yang diizinkan serta adanya faktor migrasi pada populasi pemangsa pada area diizinkan menuju area terlarang dan sebaliknya. Fungsi respon tipe Crowley-Martin dipengaruhi oleh kepadatan pemangsa, laju tangkapan, waktu penanganan, dan besarnya gangguan diantara pemangsa. Sedangkan, fungsi respon tipe Holling I diasumsikan bahwa pemangsa cenderung memiliki karakteristik pasif atau memiliki perilaku menunggu mangsa.

Pengembangan model mangsa pemangsa tersebut selanjutnya akan dianalisis kestabilan global dari titik kesetimbangan yang memenuhi kestabilan lokal dengan menggunakan metode Lyapunov melalui pendekatan metode Krasovski. Kemudian melakukan analisis pemanenan pada populasi mangsa dan pemangsa pada area diizinkan secara terus-menerus. Keberadaan titik kesetimbangan interior dianalisis kestabilannya yang ditentukan berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Titik

kesetimbangan interior yang stabil kemudian dihubungkan dengan keuntungan maksimum dan pendapatan masyarakat.

Kajian selanjutnya yaitu menganalisis pengaruh waktu tunda pada interaksi mangsa dengan pemangsa pada area bebas yang diasumsikan sebagai masa pertumbuhan hingga kematangan mangsa. Analisis yang dilakukan dengan menggunakan metode pelinearan dengan pendekatan transformasi bentuk sehingga diperoleh persamaan karakteristik melalui matriks Jacobian. Perubahan parameter waktu tunda dari kecil menjadi besar dari batas waktu tunda menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan stabil menjadi tidak stabil dan terjadi bifurkasi.

## II. ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL MANGSA- PEMANGSA YANG BERMIGRASI DENGAN FUNGSI RESPONS TIPE CROWLEY-MARTIN

### 2.1. Abstrak

Fokus kajian yang dibahas dalam bagian ini yaitu tentang kestabilan global model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin dan adanya migrasi populasi pemangsa pada area terlarang dan area bebas. Metode analisis dalam bagian ini yaitu dimulai dengan konstruksi model mangsa-pemangsa, penentuan titik kesetimbangan (*equilibrium*) dengan melinearisasi suatu model, menganalisis kestabilan global dari titik kesetimbangan memenuhi kestabilan dengan metode Lyapunov dan metode Krasovski, melakukan simulasi numerik, dan menginterpretasikan secara ekologis dari kestabilan global. Hasil kajian menunjukkan bahwa model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin dan adanya migrasi populasi pemangsa memiliki titik kesetimbangan interior yang nonnegatif. Titik kesetimbangan interior menjadi stabil asimtotik global dalam kondisi tertentu. Hal ini bermakna bahwa meskipun terjadi interaksi atau pemangsaan yang ketat terhadap mangsa dalam rentang waktu yang cukup lama, populasi mangsa pemangsa tetap akan lestari dan juga tetap stabil. Kestabilan global tersebut memberikan interpretasi bahwa kehidupan ekosistem dalam keadaan terkendali secara luas dalam waktu yang tidak terbatas.

Kata Kunci: Stability, Model Mangsa-pemangsa, Tipe Crowley-Martin, Migrasi

### 2.2. Pendahuluan

Model matematika secara umum digunakan untuk menjelaskan fenomena alam yang terjadi dengan bentuk matematika yang sederhana dan juga digunakan untuk memprediksi perilaku sistem untuk jangka waktu

mendatang (Toaha & Azis, 2018). Penerapan model matematika dalam berbagai aspek khususnya aspek ekologis sangat menarik untuk dikaji dan dianalisis secara matematis mengingat banyaknya faktor yang mempengaruhi ekosistem populasi makhluk hidup dan kesetimbangan makhluk hidup serta interaksi didalamnya (Sivasamy *et al.*, 2019). Selanjutnya, dapat juga mempertimbangkan aspek ekonomis yang memberikan dampak yang positif bagi terpenuhinya kebutuhan manusia dan dapat menambah penghasilan (*income*) bagi masyarakat (Dubey *et al.*, 2018). Tentunya, tetap menjaga kondisi lingkungan dan tidak merusak ekosistem agar populasi tetap lestari.

Kondisi tersebut telah tercipta secara alami dan akan terus berlangsung sepanjang sejarah kehidupan makhluk hidup. Model mangsa pemangsa pada prinsipnya memberikan gambaran bahwa dalam sistem dinamika populasi sangat beragam dengan model matematika yang beragam sesuai dengan variabel dan parameter yang dikembangkan. Kajian tentang pemodelan dalam dinamika populasi terus dilakukan dan selalu mengalami perkembangan serta kemajuan dengan upaya memodifikasi, memperluas, dan mengembangkan model mangsa pemangsa sesuai dengan variabel yang diketahui (Sivasamy *et al.*, 2019). Selain itu, perlu diselidiki dengan hati-hati seluruh variabel dalam model matematika dengan pertimbangan sifat kompleks spesies biologis, kondisi lingkungan, dan keadaan dinamika populasi yang begitu lengkap. Kompleksitas model dinamika populasi tersebut menjadi faktor penentu dalam menyusun model mangsa pemangsa yang diselesaikan secara analitik berdasarkan kondisi real yang dibangun berdasarkan parameter tertentu.

Kajian dan analisis tentang pemodelan mangsa pemangsa telah menjadi perhatian banyak ahli ekologi teoritis dan ahli matematika untuk ditelaah lebih mendalam. Salah satu tujuan utama pemodelan ekologi adalah membentuk model matematika yang akurat dan memberikan deskripsi matematika yang lebih baik dengan interpretasi biologis atau

ekologis dengan memperhatikan situasi biotik yang realistis. Beberapa situasi realistis tersebut diantaranya, laju pertumbuhan populasi, mortalitas populasi, laju pemanenan, dan interaksi mangsa pemangsa dengan berbagai jenis fungsi respon meliputi tipe Holling I, tipe Holling II, tipe Holling III, dan tipe Holling IV (Mortoja *et al.*, 2018). Terdapat juga fungsi respon Beddington-DeAngelis dan fungsi respon tipe Crowley-Martin yang tidak bergantung pada kepadatan mangsa, waktu penanganan, dan gangguan diantara pemangsa (Dubey *et al.*, 2018).

Model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley Martin dengan paramater  $\alpha > 0$ ,  $\eta > 0$ , dan  $\mu > 0$ , sebagaimana ditunjukkan dengan persamaan yaitu  $F(B, N) = \frac{\alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)} = \frac{\alpha NB}{1+\eta B+\mu N+\eta B\mu N}$  dimana  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\mu$  merupakan parameter positif yang menyatakan tingkat predasi maksimum pemangsa, waktu penanganan, dan besarnya gangguan di antara pemangsa dengan variabel  $B$  dan  $N$  merupakan kepadatan populasi mangsa pemangsa (Dubey *et al.*, 2018; Mortoja *et al.*, 2018). Model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley Martin merupakan pengembangan dari model mangsa pemangsa dari berbagai fungsi respon tipe Holling II yang fokus pada upaya menstabilkan sistem dari interaksi mangsa pemangsa (Li *et al.*, 2015; Chen, 2017; Zhang *et al.*, 2018).

Terdapat juga beberapa kajian yang menggunakan model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley Martin yang relevan dengan kajian ini. Diantaranya, penelitian tentang model dinamika penyakit menular lainnya dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin dari tingkat infeksi diselidiki (Zhou & Cui, 2011; Xu, 2012; Kang *et al.*, 2017; Kumari & Mohan, 2019). Selain itu, terdapat juga penelitian yang mengembangkan model mangsa pemangsa Leslie–Gower dengan fungsi respon tipe Crowley–Martin dan penyebaran mangsa pemangsa (Yin *et al.*, 2014; Zhou, 2015) dan terjadi pemanenan pada populasi mangsa (Sivasamy *et al.*, 2019). Kemudian, penggunaan fungsi respon tipe Crowley–Martin untuk melihat dinamika sistem (Liao *et al.*, 2017) dan melakukan analisis stokastik yang

tidak otonom pada model mangsa pemangsa (Zhang *et al.*, 2016; Xu *et al.*, 2019). Selanjutnya, ada yang menganalisis bifurkasi dan chaos control dengan waktu diskrit model mangsa pemangsa fungsi respon tipe Crowley–Martin (Rana, 2019) dengan dua waktu tunda (Liu *et al.*, 2019).

Model mangsa pemangsa yang dianalisis akan ditentukan titik kesetimbangan, kemudian dilakukan analisis kestabilan dari titik kesetimbangan yang non-negatif untuk mengetahui perilaku sistem untuk jangka waktu tertentu (Li *et al.*, 2015), serta adanya asumsi bahwa populasi mangsa pemangsa tersebut bernilai ekonomis serta dapat menambah penghasilan (*income*) bagi masyarakat maka terjadi usaha pemanenan yang konstan pada populasi mangsa-pemangsa (Toaha & Azis, 2018; Sivasamy *et al.*, 2019).

Setelah dilakukan analisis dari perilaku sistem maka dapat ditentukan faktor-faktor yang memberikan dampak positif agar ketiga populasi tersebut tetap eksis, stabil, dan tetap terjaga keberlangsungannya meskipun dieksploitasi oleh manusia. Kemudian dilakukan simulasi terhadap model yang dianalisis dalam kajian ini (Zhou & Cui, 2011; Xu, 2012).

### **2.3. Metode**

Metode penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif dalam pemodelan matematika yang dianalisis secara analitik dan numerik. Analisis dilakukan dengan mempelajari beberapa literatur yang telah dihimpun dari pengamatan dan hasil studi berdasarkan data parameter yang diperoleh dari berbagai sumber rujukan serta diestimasi berdasarkan perhitungan dalam pemodelan dinamika populasi. Hasil penelitian akan dijabarkan secara terperinci kemudian disajikan dalam bentuk analisis secara analitik dan melakukan simulasi. Kegiatan penelitian dimulai dengan konstruksi model mangsa-pemangsa, penentuan titik kesetimbangan (equilibrium) dengan melinearisasi suatu model, menganalisis kestabilan global dengan metode Lyapunov yang mengkonstruksi fungsi Lyapunov dengan menggunakan metode Krasovski, selanjutnya melakukan simulasi

serta menginterpretasikan secara ekologis dari analisis kestabilan yang telah diperoleh.

## 2.4. Hasil Analisis

### 2.4.1. Model Populasi Mangsa Pemangsa

Hasil kajian menunjukkan bahwa model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin dan adanya tahapan struktur pada pemangsa. Model tersebut adalah pengembangan dari model mangsa pemangsa dengan pemanenan pada kedua populasi mangsa pemangsa pada penelitian terdahulu (Shi *et al*, 2011). Model tersebut ditunjukkan dalam persamaan (2.1) berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= rB \left(1 - \frac{B}{K}\right) - \frac{\alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)}, \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{\delta \alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)} - (b + \sigma)N, \\ \frac{dM}{dt} &= -cM + \sigma N,\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan  $B(0) \geq 0$ ,  $N(0) \geq 0$ ,  $M(0) \geq 0$ .

Dimana  $B$  menyatakan kepadatan mangsa,  $N$  dan  $M$  masing-masing menunjukkan kepadatan pemangsa pada area normal dan area tercemar,  $r$  menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik mangsa dengan daya dukung lingkungan dengan koefisien  $K$ ,  $\alpha$  menyatakan tingkat interaksi (predasi) maksimum pemangsa terhadap mangsa,  $\eta$  menyatakan waktu penanganan mangsa (*handling time*),  $\mu$  menyatakan besarnya gangguan dari pemangsa,  $\delta$  menyatakan tingkat konversi pemangsa,  $b$  menyatakan kematian alami pemangsa pada area normal,  $\sigma$  menyatakan tingkat emigrasi,  $\theta$  menyatakan tingkat imigrasi, dan  $c$  menyatakan kematian alami pemangsa pada area yang tercemar.

Dengan menambahkan asumsi adanya tingkat interaksi antara pemangsa di area bebas penangkapan dengan mangsa dengan parameter  $\beta$ , maka persamaan dapat ditulis menjadi,



$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dt} &= rB \left(1 - \frac{B}{K}\right) - \frac{\alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)} - \beta MB, \\
\frac{dN}{dt} &= \frac{\delta \alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)} - (b + \sigma)N + \theta M, \\
\frac{dM}{dt} &= \vartheta MB - cM + \sigma N - \theta M,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan  $B(0) \geq 0$ ,  $N(0) \geq 0$ ,  $M(0) \geq 0$ .

Untuk persamaan (2.2) akan ditentukan titik kesetimbangan interior dimana nilai titik kesetimbangan tersebut semuanya bernilai positif dan terjadi pada oktan pertama. Titik kesetimbangan diperoleh dengan melinearisasi persamaan (2.2) dalam bentuk matriks Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial B} & \frac{\partial f_1}{\partial N} & \frac{\partial f_1}{\partial M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial B} & \frac{\partial f_2}{\partial N} & \frac{\partial f_2}{\partial M} \\ \frac{\partial f_3}{\partial B} & \frac{\partial f_3}{\partial N} & \frac{\partial f_3}{\partial M} \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobian tersebut ditentukan oleh persamaan  $\det(\lambda I - J) = 0$  sehingga berbentuk,

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz titik kesetimbangan dengan tiga variabel yang stabil asimtotik jika dan hanya jika  $a_0 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , dan  $a_2 a_1 - a_0 > 0$  (Brauer & Castillo-Chavez, 2012). Selanjutnya akan ditentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan untuk melihat keberlanjutan populasi mangsa pemangsa serta melakukan simulasi.

#### 2.4.2. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan  $TE(B, N, M)$  persamaan (2.2) diperoleh dengan menganalisis  $\frac{dB}{dt} = 0$ ,  $\frac{dN}{dt} = 0$ , dan  $\frac{dM}{dt} = 0$ , sehingga persamaan (2.2) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
rB - \frac{rB^2}{K} - \frac{\alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)} - \beta MB &= 0, \\
\frac{\delta \alpha NB}{(1+\eta B)(1+\mu N)} - (b + \sigma)N + \theta M &= 0, \\
\vartheta MB - cM + \sigma N - \theta M &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Berdasarkan analisis yang dilakukan terhadap persamaan (2.3) maka diperoleh tiga titik kesetimbangan yang nonnegatif. Titik kesetimbangan tersebut yaitu

$$TE_1(B, N, M) = (0, 0, 0),$$

$$TE_2(B, N, M) = (K, 0, 0),$$

$$TE_3(B, N, M) = \left( \omega, \frac{\omega\alpha_1 + \alpha_2}{\mu\beta_1\alpha_2}, \frac{\sigma\omega\alpha_1 - \alpha_2}{\mu\beta_1\beta_2\alpha_2} \right),$$

dengan  $\omega$  merupakan akar-akar persamaan dari  $(b\beta^2\delta\eta\mu r + \beta^2\delta\eta\mu r\sigma)Z^5 + (-Kb\beta^2\delta\eta\mu r - K\beta^2\delta\eta\mu r\sigma - 2b\beta c\delta\eta\mu r - 2b\beta\delta\eta\mu r\theta - 2\beta c\delta\eta\mu r\sigma - \beta\delta\eta\mu r\sigma\theta + b\beta^2\delta\mu r + \beta^2\delta\mu r\sigma)Z^4 + (2Kb\beta c\delta\eta\mu r + 2Kb\beta\delta\eta\mu r\theta + 2K\beta c\delta\eta\mu r\sigma + K\beta\delta\eta\mu r\sigma\theta - K\alpha\beta^2\delta^2\sigma + Kb\beta^2\delta\eta\sigma - Kb\beta^2\delta\mu r + K\beta^2\delta\eta\sigma^2 - K\beta^2\delta\mu r\sigma + bc^2\delta\eta\mu r + 2bc\delta\eta\mu r\theta - 2b\beta c\delta\mu r - 2b\beta\delta\mu r\theta + 2\beta c\delta\mu r\sigma - \beta\delta\mu r\sigma\theta)Z^3 + (-Kbc^2\delta\eta\mu r - 2Kbc\delta\eta\mu r\theta - Kb\delta\eta\mu r\theta^2 - Kc^2\delta\eta\mu r\sigma - Kc\delta\eta\mu r\sigma\theta + K\alpha\beta c\delta^2\sigma + K\alpha\beta\delta^2\sigma\theta - Kb\beta c\delta\eta\sigma + 2Kb\beta c\delta\mu r - Kb\beta\delta\eta\sigma\theta + 2Kb\beta\delta\mu r\theta - K\beta c\delta\eta\sigma^2 + 2K\beta c\delta\mu r\sigma + c\delta\mu r\sigma\theta - Kb^2\beta^2 - 2Kb\beta^2\sigma - K\beta^2\sigma^2)Z^2 + (-Kbc^2\delta\mu r - 2Kbc\delta\mu r\theta - Kb\delta\mu r\theta^2 - Kc^2\delta\mu r\sigma - K\beta\sigma^2\delta\theta + Kc\delta\mu r\sigma\theta + K\alpha bc^2\delta + 2K\alpha bc\sigma\theta + K\alpha b\delta\theta^2 - K\alpha c^2\delta\sigma - 2Kb\beta\sigma\theta + 2K\beta c\sigma^2)Z - Kb^2c^2 - 2Kb^2c\theta - Kb^2\theta^2 - 2Kbc^2\sigma - 2Kbc\sigma\theta - Kc^2\sigma^2,$ 

$$\alpha_1 = \omega b\beta\eta - \omega\alpha\beta\delta + \omega\eta\beta\sigma + \alpha c\delta + \alpha\delta\theta - bc\eta - b\eta\theta - c\eta\sigma,$$

$$\alpha_2 = \omega b\beta + \omega\beta\sigma - bc - b\theta - c\sigma,$$

$$\beta_1 = \eta\omega + 1, \text{ dan}$$

$$\beta_2 = \omega\beta - c - \theta.$$

Titik kesetimbangan  $TE_1(B, N, M)$ , dan  $TE_2(B, N, M)$  merupakan titik kesetimbangan yang salah satu nilai kompartemennya adalah nol, sehingga tidak digunakan untuk menganalisis kestabilan populasi mangsa pemangsa. Jika populasi memiliki nilai kompartemen sama dengan nol maka tidak ada pertumbuhan dan perkembangan suatu populasi organisme. Sehingga yang akan dianalisis adalah titik kesetimbangan  $TE_3(B, N, M)$  dimana ketiga komponen titik tersebut bernilai positif. Titik kesetimbangan  $TE_3(B, N, M)$  merupakan suatu titik kesetimbangan interior

yang bernilai positif ketika  $\omega > 0$ ,  $a_1 + \omega^2 > 0$  dan  $a_2 + \omega^2 > 0$ . Titik kesetimbangan  $TE_3(B, N, M)$  inilah yang digunakan dalam melakukan analisis kestabilan.

### 2.4.3. Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan dilakukan dengan metode pelinearan dan penentuan kestabilan dengan memperhatikan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik kesetimbangan. Pada Persamaan (2.2) hanya titik kesetimbangan  $TE_3(B, N, M)$  yang akan dianalisis kestabilannya. Dengan memperhatikan persamaan (2.2) maka dapat diuraikan dalam bentuk,

$$\begin{aligned} f_1(B, N, M) &= rB - \frac{rB^2}{K} - \frac{\alpha NB}{1+\eta B+\mu N+\eta\mu BN} - \beta MB, \\ f_2(B, N, M) &= \frac{\delta\alpha NB}{1+\eta B+\mu N+\eta\mu BN} - bN - \sigma N + \theta M, \\ f_3(B, N, M) &= \vartheta MB - cM + \sigma N - \theta M. \end{aligned}$$

Bentuk matriks Jacobian dari persamaan (2.2) diberikan

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial B} & \frac{\partial f_1}{\partial N} & \frac{\partial f_1}{\partial M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial B} & \frac{\partial f_2}{\partial N} & \frac{\partial f_2}{\partial M} \\ \frac{\partial f_3}{\partial B} & \frac{\partial f_3}{\partial N} & \frac{\partial f_3}{\partial M} \end{pmatrix},$$

dengan

$$\frac{\partial f_1}{\partial B} = r - \frac{2rB}{K} - \frac{\alpha N}{\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1} + \frac{\alpha BN(\eta N\mu + \eta)}{(\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1)^2} - \beta M,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial N} = -\frac{\alpha B}{\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1} + \frac{\alpha BN(\eta B\mu + \mu)}{(\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1)^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial M} = -\beta B,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial B} = \frac{\delta\alpha N}{\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1} - \frac{\delta\alpha BN(\eta N\mu + \eta)}{(\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1)^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N} = -b - \sigma + \frac{\delta\alpha B}{\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1} - \frac{\delta\alpha BN(\eta B\mu + \mu)}{(\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1)^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial M} = \theta,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial B} = \vartheta M,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial N} = \sigma,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial M} = \vartheta B - c - \theta.$$

Jika dimisalkan  $s = \frac{r}{K}$ ,  $t = \frac{\alpha N}{\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1}$ ,  $u = \frac{\alpha BN(\eta B\mu + \eta)}{(\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1)^2}$ ,  $v_1 = \frac{\alpha B}{\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1}$ , dan  $v_2 = \frac{\alpha BN(\eta B\mu + \mu)}{(\eta\mu BN + \eta B + \mu N + 1)^2}$  maka matriks  $J$  dapat ditulis

$$J = \begin{pmatrix} r - 2sB - t + u - \beta M & -v_1 + v_2 & -\beta B \\ \delta t - \delta u & -b - \sigma + \delta v_1 - \delta v_2 & \theta \\ \vartheta M & \sigma & \vartheta B - c - \theta \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, akan ditentukan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menghitung  $\det(\lambda I - J) = 0$ , sehingga determinan matriks  $J$  yang diberikan

$$\begin{vmatrix} \lambda - (r - 2sB - t + u - \beta M) & v_1 - v_2 & \beta B \\ -\delta t + \delta u & \lambda + (b + \sigma - \delta v_1 + \delta v_2) & -\theta \\ -\vartheta M & -\sigma & \lambda - (\vartheta B - c - \theta) \end{vmatrix} = 0$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

dengan

$$a_2 = \beta M + 2Bs - B\vartheta + \delta v_2 - \delta v_1 + b + c + \sigma - r + t + \theta - u,$$

$$a_1 = 2Bbs - 2s\vartheta B^2 - 2B\delta s v_1 + 2B\delta s v_2 + B\delta v_1\vartheta - B\delta v_2\vartheta - M\beta\delta v_1 + M\beta\delta v_2 + Bb\vartheta + 2Bcs + 2B\sigma s - B\sigma\vartheta + Br\vartheta + 2Bs\theta - Bt\vartheta + Bu\vartheta + Mb\beta + M\beta c + M\beta d + M\beta\theta - c\delta v_1 + c\delta v_2 + \delta r v_1 - \delta r v_2 - \delta\theta v_2 + \delta\theta v_2 + bc - br + bt + b\theta - bu + c\sigma - cr + ct - cu - \sigma r + \sigma t - \sigma u - r\theta + t\theta - \theta u,$$

$$a_0 = 2B^2\delta s v_1\vartheta - 2B^2\delta s v_2\vartheta - 2B^2bs\vartheta - 2B^2\sigma s\vartheta + B\beta\sigma\delta t - B\beta\sigma\delta u - 2Bc\delta s v_1 + 2Bc\delta s v_2 - B\delta r\vartheta v_1 + B\delta r\vartheta v_2 - 2B\delta s\theta v_1 + 2B\delta s\theta v_2 - M\beta c\delta v_1 + M\beta c\delta v_2 - M\beta\delta\theta v_1 + M\beta\delta\theta v_2 + 2Bbcs + Bbr\vartheta + 2Bbs\theta - Bbt\vartheta + Bbu\vartheta + 2Bcs + Br\sigma\vartheta - B\sigma t\vartheta + B\sigma u\vartheta + Mb\beta c + Mb\beta\theta +$$

$$M\beta cd + M\theta\vartheta v_1 - M\theta\vartheta v_2 + c\delta r v_1 - c\delta r v_2 + \delta r\theta v_1 - \delta r\theta v_2 - bcr + bct - bcu - br\theta + bt\theta - b\theta u - cdr + cdt - cdu.$$

Berdasarkan analisis yang dilakukan bahwa titik kesetimbangan  $TE_3(B, N, M)$  stabil asimtotik, karena memenuhi kriteria kestabilan Routh-Hurwitz jika dan hanya jika  $a_0 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , dan  $a_2 a_1 - a_0 > 0$ . Hal ini bermakna bahwa jika diberikan nilai awal maka solusi sistem akan tetap stabil disekitar titik kesetimbangan.

#### 2.4.4. Kestabilan Global

Menganalisa kestabilan global dari titik-titik kesetimbangan pada persamaan (2.3) digunakan metode Lyapunov dengan mengkonstruksi fungsi Lyapunov yang menggunakan metode Krasovski.

##### Definisi (Luenberger, 1979).

Misalkan suatu fungsi  $V$  didefinisikan pada suatu daerah  $D$  dan  $\bar{x}$  merupakan titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial nonlinier. Fungsi  $V(x)$  disebut fungsi Lyapunov jika memenuhi,

- Fungsi  $V(x)$  kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada  $D$ .
- Fungsi  $V(x) > 0$  untuk  $x \in D$ ,
- Fungsi  $\dot{V}(x) \leq 0$  untuk setiap  $x \in D$ .

Berdasarkan definisi tersebut jika  $\dot{V}(x) \leq 0$  maka titik kesetimbangan dari sistem (2.2) stabil dan jika  $\dot{V}(x) < 0$  maka titik kesetimbangan dari sistem (2.2) stabil asimtotik. Jika  $\dot{V}(x) < 0$  dan  $V(x)$  tak terbatas secara radial, yaitu

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \tag{2.4}$$

maka titik kesetimbangan dari sistem (2.2) stabil asimtotik global. Namun apabila fungsi  $V(x)$  tidak memenuhi persamaan (2.4) maka titik kesetimbangan dari sistem (2.2) stabil asimtotik lokal.

Metode Krasovski digunakan untuk mengkonstruksi fungsi Lyapunov. Metode ini merupakan suatu metode yang ditemukan oleh matematikawan asal Rusia bernama Nikolay Krasovsky membuat suatu metode yang dapat digunakan dalam mengkonstruksi fungsi Lyapunov melalui keberadaan matriks Hermitian yang definit positif. Selanjutnya, dalam menentukan analisis kestabilan global mula-mula dibentuk transpos dari matriks  $J$ , sehingga diperoleh matriks transposnya yaitu

$$J^T = \begin{pmatrix} r - 2sB - t + u - \beta M & \delta t - \delta u & \vartheta M \\ -v_1 + v_2 & -b - \sigma + \delta v_1 - \delta v_2 & \sigma \\ -\beta B & \theta & \vartheta B - c - \theta \end{pmatrix}.$$

Menurut metode Krasovski bahwa fungsi Lyapunov  $V(x)$  dikonstruksi dengan bentuk  $V(x) = f^T(x)Pf(x)$  dengan  $x = (B, N, M)$  dan  $P$  merupakan matriks Hermitian yang definit positif (simetri nyata) dan  $f(x)$  adalah fungsi dari pada persamaan (2.3), yaitu

$$f(x) = \begin{pmatrix} rB - \frac{rB^2}{K} - \frac{\alpha NB}{1+\eta B + \mu N + \eta \mu N} - \beta MB \\ \frac{\delta \alpha NB}{1+\eta B + \mu N + \eta \mu N} - bN - \sigma N + \theta M \\ \vartheta MB - cM + \sigma N - \theta M \end{pmatrix}$$

Misalkan, diambil sebarang matriks Hermitian ( $P$ ) yaitu

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut merupakan salah satu bentuk dari matriks Hermitian real, karena elemen-elemennya  $p_{11}, \dots, p_{33} \in \mathbb{R}$  dan  $p_{ij} = p_{ji}$  dimana  $i, j = 1, 2, 3$  dan  $i \neq j$ .

Selanjutnya, perhatikan fungsi  $V(x)$  yang diturunkan terhadap  $t$ , sehingga

$$V(x) = f^T(x)Pf(x).$$

$$\dot{V}(x) = \dot{f}^T(x)Pf(x) + f^T(x)P\dot{f}(x).$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^T P f(\mathbf{x}) + f^T(\mathbf{x}) P \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right).$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^T \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)^T P f + f^T P \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right) \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right).$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = f^T(\mathbf{x}) J^T P f(\mathbf{x}) + f^T(\mathbf{x}) P J f(\mathbf{x}).$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = f^T(\mathbf{x}) (J^T P + P J) f(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

dengan  $J = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  adalah matriks Jacobian.

Jika matriks  $J^T P + P J$  semidefinit negatif maka  $\dot{V}(\mathbf{x})$  pada persamaan (2.6) semidefinit negatif juga. Pernyataan implikasi tersebut digunakan untuk memenuhi syarat  $\dot{V}(\mathbf{x})$  semidefinit negatif. Agar memenuhi  $\dot{V}(\mathbf{x})$  semidefinit negatif dan  $V(\mathbf{x})$  definit positif dibentuk matriks  $P$  dengan menggunakan persamaan,

$$(J^T P + P J) = -Q \quad (2.7)$$

dengan matriks  $Q$  adalah matriks Hermitian definit positif. Untuk memudahkan pembentukan matriks Hermitian  $P$ , Krasovsky menggunakan matriks identitas  $I$  yang berukuran sama dengan matriks  $P$  yang juga definit positif. Berdasarkan persamaan (2.7) maka dapat ditulis,

$$\begin{pmatrix} r - 2sB - t + u - \beta M & \delta t - \delta u & \vartheta M \\ -v_1 + v_2 & -b - \sigma + \delta v_1 - \delta v_2 & \sigma \\ -\beta B & \theta & \vartheta B - c - \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r - 2sB - t + u - \beta M & -v_1 + v_2 & -\beta B \\ \delta t - \delta u & -b - \sigma + \delta v_1 - \delta v_2 & \theta \\ \vartheta M & \sigma & \vartheta B - c - \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, diperoleh matriks  $P^*$  berikut,

$$P^* = \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, ditentukan apakah matriks  $P^*$  definit positif atau tidak. Jika matriks  $P^*$  definit positif maka fungsi Lyapunov diperoleh dengan mensubstitusi matriks  $P^*$  ke dalam persamaan  $V(x) = f^T(x)P^*f(x)$ . Selain itu, jika tidak terdapat definit positif maka periksa kembali nilai matriks  $P^*$  hingga memperoleh matriks  $P^*$  yang definit positif. Jika matriks  $P^*$  telah definit positif maka periksa apakah titik kesetimbangan persamaan  $V(B)$  memenuhi persamaan (2.4) yaitu titik kesimbangannya stabil asimtotik secara global.

#### 2.4.5. Simulasi

Diberikan parameter untuk model (2.2) dengan nilai  $K = 100$ ,  $r = 0.7$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\eta = 0.01$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\vartheta = 0.01$ ,  $\delta = 0.03$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $\theta = 0.25$ ,  $b = 0.2$ , dan  $c = 0.1$ . Dengan nilai parameter tersebut diperoleh tiga titik kesetimbangan yang nonnegatif yaitu  $TE_1 = (0, 0, 0)$ ,  $TE_2 = (100, 0, 0)$ , dan  $TE_3 = (15.948, 1.523, 1.999)$ . Untuk menentukan nilai eigen matriks dengan melinearisasi persamaan (2.2) dalam bentuk berikut

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = 0.7 - 0.007B - \frac{0.3N}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} + \frac{0.03BN(0.0001N+0.01)}{(0.0001BN+0.01B+0.01N+1)^2} - 0.25M,$$

$$a_{12} = -\frac{0.3N}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} + \frac{0.3BN(0.001B+0.01)}{(0.001BN+0.01B+0.01N+1)^2},$$

$$a_{13} = -0.1B,$$

$$a_{21} = \frac{0.009N}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} - \frac{0.009BN(0.0001N+0.01)}{(0.001BN+0.01B+0.01N+1)^2},$$

$$a_{22} = -0.45 + \frac{0.009N}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} - \frac{0.009BN(0.0001N+0.01)}{(0.0001BN+0.01B+0.01N+1)^2},$$

$$a_{23} = 0.25,$$

$$a_{31} = 0.01M, a_{32} = 0.25, a_{33} = -0.35 + 0.01B.$$



Selanjutnya, mensubstitusi nilai titik kesetimbangan  $TE_3 = (15.948, 1.523, 1.999)$  ke dalam matriks Jacobian ( $J$ ) maka didapatkan matriks

$$J = \begin{pmatrix} -0.056 & -4.001 & -1.594 \\ 0.010 & -0.329 & 0.250 \\ 0.019 & 0.250 & -0.191 \end{pmatrix}.$$

Kemudian diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian dengan menggunakan persamaan  $\det(\lambda I - J) = 0$  yaitu

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 0.576\lambda^2 + 0.101\lambda + 0.042.$$

Dengan tiga nilai eigen yang negatif yaitu  $\lambda_1 = -0.021 + 0.279 I$ ,  $\lambda_2 = -0.021 - 0.279 I$ , dan  $\lambda_3 = -0.534$ . Berdasarkan ketiga nilai eigen tersebut disimpulkan bahwa titik kesetimbangan  $TE_3 = (15.948, 1.523, 1.999)$  stabil asimtotik lokal dan memenuhi kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dengan syarat  $a_0 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , dan  $a_2 a_1 - a_0 > 0$ .

Analisis berikutnya, dengan menggunakan metode Lyapunov yaitu mengkonstruksi fungsi Lyapunov dengan menggunakan metode Krasovski yang bertujuan menganalisis titik kesetimbangan interior agar stabil asimtotik secara global. Konstruksi fungsi Lyapunov yang dihasilkan berbentuk

$$V(x) = f^T(x)P^*f(x),$$

dengan

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0.7B - 0.007B^2 - \frac{0.3BN}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} - 0.1BM \\ -0.45N + 0.25M + \frac{0.009N}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} \\ -0.35M + 0.01MB + 0.25N \end{pmatrix},$$

dan

$$f^T(x) = \left( \left( 0.7B - 0.007B^2 - \frac{0.3BN}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} - 0.1BM \right) \left( -0.45N + 0.25M + \frac{0.009N}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} \right) \left( -0.35M + 0.01MB + 0.25N \right) \right).$$

Agar memenuhi  $\dot{V}(x)$  semidefinit negatif dan  $V(x)$  definit positif dibentuk matriks  $P^*$  dengan menggunakan persamaan (2.7). Adapun bentuk transpos dari matriks Jacobian yaitu,

$$J^T = \begin{pmatrix} -0.056 & 0.010 & 0.019 \\ -4.001 & -0.329 & 0.250 \\ -1.594 & 0.250 & -0.191 \end{pmatrix}.$$

Karena  $J$  dan  $J^T$  telah diperoleh, maka persamaan (2.7) dapat diselesaikan untuk mendapatkan keseluruhan elemen dari matriks  $P^*$  yaitu sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} -0.056 & -4.001 & -1.594 \\ 0.010 & -0.329 & 0.250 \\ 0.019 & 0.250 & -0.191 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.056 & 0.010 & 0.019 \\ -4.001 & -0.329 & 0.250 \\ -1.594 & 0.250 & -0.191 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dengan

$$q_{11} = -0.112 p_{11} + 0.010 p_{21} + 0.019 p_{31} + 0.010 p_{12} + 0.019 p_{13},$$

$$q_{12} = -0.386 p_{12} + 0.010 p_{22} + 0.019 p_{32} - 4.001 p_{11} + 0.25 p_{13},$$

$$q_{13} = -0.246 p_{13} + 0.010 p_{23} + 0.019 p_{33} - 1.594 p_{11} + 0.25 p_{12},$$

$$q_{21} = -4.001 p_{11} - 0.386 p_{21} + 0.25 p_{31} + 0.010 p_{22} + 0.019 p_{23},$$

$$q_{22} = -4.001 p_{12} - 0.659 p_{22} + 0.25 p_{32} - 4.001 p_{21} + 0.25 p_{23},$$

$$q_{23} = -4.001 p_{13} - 0.520 p_{23} + 0.25 p_{33} - 1.594 p_{21} + 0.25 p_{22}$$

$$q_{31} = -1.594 p_{11} + 0.25 p_{21} - 0.246 p_{31} + 0.010 p_{32} + 0.019 p_{33},$$

$$q_{32} = -1.594 p_{12} + 0.25 p_{22} - 0.5205 p_{32} - 4.001 p_{31} + 0.25 p_{33},$$

$$q_{33} = -1.594 p_{13} + 0.25 p_{23} - 0.381 p_{33} - 1.594 p_{31} + 0.25 p_{32}.$$

Untuk menentukan elemen-elemen dari matriks  $P^*$  digunakan metode Cramer dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dengan mengubahnya ke dalam bentuk matriks. Metode Cramer tersebut menggunakan determinan suatu matriks dan matriks lain yang diperoleh dengan mengganti salah satu kolom dengan vektor yang terdiri dari angka di sebelah kanan persamaannya yaitu elemen-elemen dari matriks Hermitian. Sehingga diperoleh bentuk matriks berordo  $9 \times 9$  berikut

$$\begin{pmatrix} -0.112 & 0.010 & 0.019 & \dots & 0 \\ -4.001 & -0.386 & 0.250 & \dots & 0 \\ -1.594 & 0.25 & -0.246 & \dots & 0.019 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1.594 & \dots & -0.381 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ \vdots \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian diperoleh matriks  $P^*$  yaitu

$$P^* = \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2098.763 & -26.117 & -8.261 \\ -26.117 & 5.008 & 5.657 \\ -8.261 & 5.657 & 9.181 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, diperoleh nilai eigen dari matriks  $P^*$  yaitu,

$$\lambda_1 = 2099.122,$$

$$\lambda_2 = 12.901,$$

$$\lambda_3 = 0.929.$$

Karena semua nilai eigennya positif maka matriks  $P^*$  tersebut definit positif sehingga diperoleh fungsi Lyapunov berikut

$$V(x) = f^T(x)P^*f(x).$$

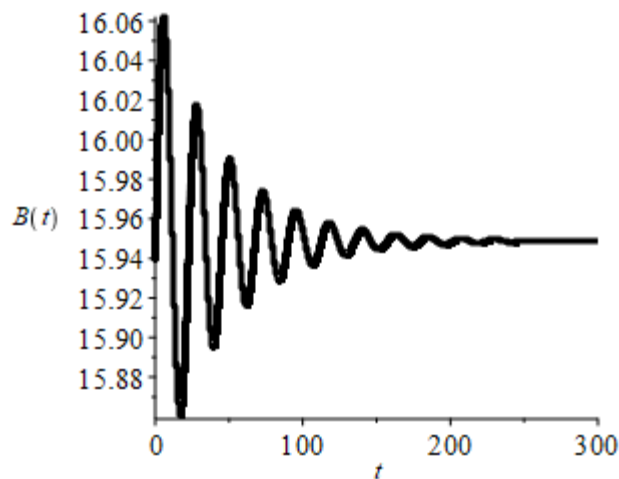
Atau dapat ditulis,

$$\begin{aligned} V(x) = & \left( 1069.134B - 14.691B^2 - \frac{629.846NB}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} - 209.958MB - \right. \\ & \left. 9.687N + 7.768M \right) \left( 0.7B - 0.007B^2 - \frac{0.3NB}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} - \right. \\ & \left. 0.1MB \right) + \left( -18.282 + 0.182B^2 - \frac{7.880NB}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} - 2.668MB - \right. \\ & \left. 0.839N - 2.101M + (-0.45N + 0.25N + \frac{0.009NB}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1}) \right) + \end{aligned}$$

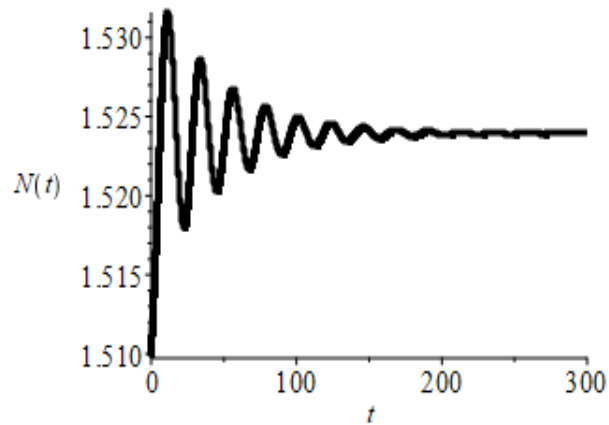
$$(-5.782B + 0.057B^2 - \frac{2.529NB}{0.0001BN+0.01B+0.01N+1} + 0.917MB - 0.250N + 2.791M)(0.01BM + 0.15M + 0.25N).$$

Dengan melakukan substitusi titik kesetimbangan  $TE_3 = (15.948, 1.523, 1.999)$  maka diperoleh nilai  $V(x) = 10.702$  dan  $\dot{V}(x) = -6.170$ . Dengan demikian, jika nilai dari persamaan  $V(x) > 0$  maka dapat disimpulkan bahwa titik kesimbangan  $TE_3(B, N, M)$  stabil asimtotik secara global. Jika jumlah populasi mangsa pemangsa berada di sekitar titik kesetimbangan maka ketiga populasi tersebut akan stabil menuju ke titik kesetimbangan  $TE_3(B, N, M)$ . Hal ini berarti populasi mangsa pemangsa akan tetap lestari.

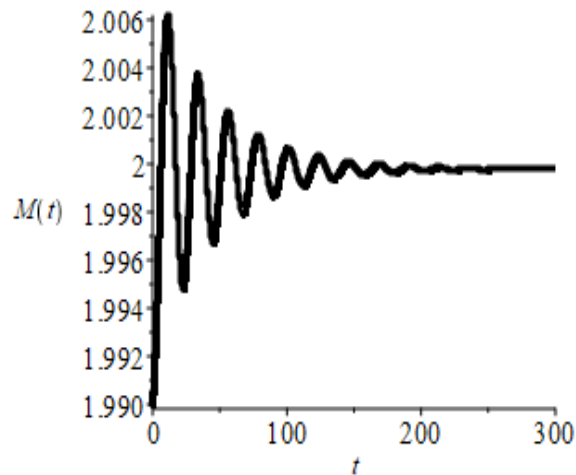
Berikut gambar dinamika kurva solusi mangsa pemangsa dengan nilai awal disekitar titik keseimbangan  $B(0) = 15.94, N(0) = 1.51, M(0) = 1.99$  dengan  $t = 0 - 300$  hari.



Gambar 2.1 Kurva Solusi Populasi Mangsa ( $B$ ).



Gambar 2.2 Kurva Solusi Populasi Pemangsa ( $N$ ).



Gambar 2.3 Kurva Solusi Populasi Pemangsa ( $M$ ).

Gambar 2.1, 2.2, dan 2.3 tersebut menunjukkan kondisi sistem yang stabil asimptotik dan dengan bertambahnya waktu sistem akan konvergen pada titik kesetimbangan  $TE_3(B, N, M) = (15.948, 1.523, 1.999)$ . Meskipun terjadi gerakan osilasi pada awal trayektori, semakin lama nilai simpangannya semakin kecil dan menyebabkan populasi mangsa tersebut menjadi stabil. Pada bidang solusi populasi pemangsa ( $N$  dan  $M$ ), populasi pemangsa mengalami hal yang sama dengan populasi mangsa yang semakin lama bersifat stabil dan selalu akan konvergen pada titik kesetimbangan.

## 2.5. Kesimpulan

Model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon tipe Crowley-Martin dengan adanya migrasi populasi pemangsa pada dua area yang berbeda memiliki tiga titik kesetimbangan yang non negatif yaitu  $TE_1(B, N, M)$ ,  $TE_2(B, N, M)$ , dan  $TE_3(B, N, M)$ . Titik kesetimbangan  $TE_1(B, N, M)$ , dan  $TE_2(B, N, M)$  merupakan titik kesetimbangan yang salah satu nilai kompartemennya adalah nol, yang berarti tidak ada pertumbuhan dalam suatu populasi. Dengan demikian titik keseimbangan  $TE_3(B, N, M)$  yang dianalisis dan diperoleh kondisi stabil asimptotik secara global. Hasil simulasi juga menunjukkan bahwa kondisi sistem stabil pada waktu yang panjang dan selalu konvergen pada titik kesetimbangan  $TE_3(B, N, M)$  sebagaimana ditunjukkan dalam kurva solusi mangsa pemangsa. Meskipun terjadi gerakan osilasi pada awal trayektori kurva solusi mangsa pemangsa, namun dengan bertambahnya waktu kondisi system akan tetap stabil secara global. Hal ini bermakna bahwa walaupun terjadi interaksi atau pemangsaan yang ketat terhadap mangsa dalam kurung waktu yang panjang, maka populasi mangsa dan pemangsa tetap akan lestari, stabil, dan terus terjaga keberlanjutannya. Kestabilan global tersebut memberikan interpretasi bahwa kehidupan ekosistem baik populasi mangsa maupun populasi pemangsa dalam keadaan terkendali secara luas dan tetap stabil dalam waktu yang tidak terbatas.

## 2.6. Daftar Pustaka

- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York, Springer.
- Chen, S. (2017). Stationary Patterns of a Diffusive Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *National Natural Science Foundation of China, Harbin Institute of Technology, China*, 1(1), 1–36.
- Dubey, B., Agarwal, S., & Kumar, A. (2018). Optimal Harvesting Policy of a Prey–Predator Model with Crowley–Martin Type Functional Response

- and Stage Structure in the Predator. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 23(4), 493–514.
- Kang, C., Miao, H., Chen, X., Xu, J., & Huang, D. (2017). Global Stability of a Diffusive and Delayed Virus Dynamics Model with Crowley-Martin Incidence Function and CTL Immune Response. *Advances in Difference Equations*, 2017(324), 1–16.
- Kumari, N., & Mohan, N. (2019). Cross Diffusion Induced Turing Patterns in a Tritrophic Food Chain Model with Crowley-Martin Functional Response. *Mathematics*, 7(229), 1–25.
- Li, H. (2014). Asymptotic Behavior and Multiplicity for a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey System with Crowley-Martin Functional Response. *Computers and Mathematics with Applications*, 68(7), 693–705.
- Li, S., Li, Y., Dong, Y., & Zhang, S. (2015). Qualitative Analysis of a Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(9), 1550110. <https://doi.org/10.1142/S0218127415501102>
- Liao, T., Yu, H., & Zhao, M. (2017). Dynamics of a Delayed Phytoplankton-Zooplankton System with Crowley-Martin Functional Response. *Advances in Difference Equations*, 2017(5), 1–30. <https://doi.org/10.1186/s13662-016-1055-4>
- Liu, C., Li, S., & Yan, Y. (2019). Hopf Bifurcation Analysis Of A Density Predator-Prey Model With Crowley-Martin Functional Response And Two Time Delays. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 9(4), 1589–1605.
- Luenberger, D. G. (1979). *Introduction to Dynamical System, Theory, Models, and Applications*. New York, John Wiley & Sons.
- Marquez, H. J. (2003). *Nonlinier Control Systems Analysis and Design*. New York, Wiley & Sons.

- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of a Predator-Prey Model with Nonlinear Incidence Rate, Crowley-Martin type Functional Response and Disease in Prey Population. *Ecological Genetics and Genomics*, 1(12), 100035.
- Rana, S. M. S. (2019). Bifurcation Analysis and Chaos Control in a Discrete-Time Predator-Prey System with Crowley-Martin Functional Response. *Computational Ecology and Software*, 9(2), 37–57.
- Sivasamy, R., Sathiyathan, K., & Balachandran, K. (2019). Dynamics of a Modified Leslie-Gower Model with Crowley-Martin Functional Response and Prey Harvesting. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 8(4), 621–636.
- Shi, X., Zhou, X., and Song, X. 2011 Analysis of A Stage-Structured Predator-Prey Model with Crowley-Martin Function. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 36(1) 459–472
- Toaha, S. (2013). *Pemodelan Matematika dalam Dinamika Populasi*. Makassar, Satu Dua Press.
- Toaha, S., & Azis, M. I. (2018). Stability and Optimal Harvesting of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model. In *IOP Conf. Series: Journal of Physics*, 979(1), 012069.
- Xu, C., Ren, G., & Yu, Y. (2019). Extinction Analysis of Stochastic Predator–Prey System with Stage Structure and Crowley–Martin Functional Response. *Entropy*, 21(252), 1–13.
- Xu, S. (2012). Global Stability of the Virus Dynamics Model with Crowley-Martin Functional Response. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 12(9), 1–10.
- Yin, H., Xiao, X., Wen, X., & Liu, K. (2014). Pattern Analysis of a Modified Leslie – Gower Predator – Prey Model with Crowley – Martin Functional Response and Diffusion. *Computers and Mathematics with Applications*, 67(8), 1607–1621.



- Zhang, H., Ma, S., Huang, T., Cong, X., Gao, Z., & Zhang, F. (2018). Complex Dynamics on the Routes to Chaos in a Discrete Predator-Prey System with Crowley-Martin Type Functional Response. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2018(2386954), 1–18.
- Zhang, Y., Chen, S., & Gao, S. (2016). Analysis of a Nonautonomous Stochastic Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response. *Advances in Difference Equations*, 2016(264), 1–28.
- Zhou, J. (2014). Positive Solutions for a Modified Leslie-Gower Prey-Predator Model with Crowley-Martin Functional Responses. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 21(1), 621–661.
- Zhou, J. (2015). Qualitative Analysis of a Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Responses. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 14(3), 1127–1145.
- Zhou, X., & Cui, J. (2011). Global Stability of the Viral Dynamics with Crowley-Martin Functional Response. *Bull. Korean Math. Soc.*, 48(3), 555–574.