

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PADA  
PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI**

*OPTIMAL CONTROL OF MATHEMATICAL MODEL OF  
DIPHTHERIA SPREADING*

**PUTRI AMALIA**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA TERAPAN  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2022**

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PADA  
PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI**

Tesis

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Magister Matematika Terapan

Disusun dan diajukan oleh

**PUTRI AMALIA  
H022191011**

Kepada

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA TERAPAN  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2022**

**LEMBAR PENGESAHAN**

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN  
PENYAKIT DIFTERI**

**Disusun dan diajukan oleh**

**PUTRI AMALIA  
H022191011**

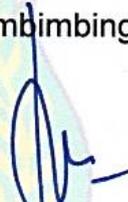
Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 4 Oktober 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pendamping,

  
**Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.**  
NIP. 19680114 199412 1 001

  
**Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si**  
NIP. 19800904 200312 2 001

  
Ketua Program Studi  
Magister Matematika,

Dekan Fakultas MIPA  
Universitas Hasanuddin,

**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**  
NIP. 19640207 199103 1 013

  
**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**  
NIP. 19720515 199702 1 002

## PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis yang berjudul “Kontrol Optimal Model Matematika pada Penyebaran Difteri” adalah benar karya saya dengan arahan komisi pembimbing (Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Kasbawati, M. Si. sebagai Pembimbing Pendamping). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah diterbitkan di Jurnal (Daya Matematis, Vol.10 No.2(2022), 138-147, 10.26858/jdm.v10i2.35776) sebagai artikel dengan judul “*Optimal Control of Mathematical Model of Diphtheriae Spreading*”.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 8 Oktober 2022



Putri Amalia  
NIM. H022191011

## PRAKATA

*Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh.*

*Alhamdulillahirobbil 'alamin*, segala puji syukur kehadiran Allah SWT, atas berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul “**Kontrol Optimal Model Matematika pada Penyebaran Penyakit Diteri**”, sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika Terapan, Departemen Matematika, Program Pascasarjana, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin Makassar. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan dunia akhirat.

Penyelesaian tesis ini diperlukan proses yang panjang dengan banyak tantangan dan hambatan mulai dari awal penyusunan hingga akhirnya tesis ini dapat dirampungkan. Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada kedua orang tua tercinta dan tersayang: **Ibunda Hj. Bunayya**, dan **Ayahanda Muhammad** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang mengalir tiada henti dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Ucapan terima kasih juga kepada kakak tercinta Makmur dan Hasbullah, adik tercinta Rahmat dan Rahmah serta seluruh keluarga besar yang selalu senantiasa memberikan doa dan dukungan bagi penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. selaku pembimbing utama yang telah meluangkan waktunya untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat, dan arahnya dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing pendamping yang telah meluangkan waktunya untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat, dan arahnya dalam menyelesaikan tesis ini.

3. Prof. Dr. Hasmawati, M.Si, Prof. Dr. Budi Nurwahyu, M.Si, dan Dr. Hendra, S.Si, M.Kom. selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan tesis ini.
4. Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku Ketua Program Studi Magister Matematika yang senantiasa memberi bimbingan dan semangat dalam menyelesaikan tesis ini.
5. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta seluruh staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
6. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya, seluruh dosen dan staf administrasi pada Program Studi S2 Matematika Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan.
7. Sahabat *Haengbokhaja* Rahmah, Wati, Disa, Titi, Dillah, Edy, Raid, dan Qadri, yang juga senantiasa memberikan bantuan, motivasi, saran, semangat, dan juga menjadi pendengar setia segala keluh-kesah penulis dalam menyelesaikan tesis ini.
8. Teman-teman angkatan 2019 yaitu Kak Amira, Ica, Nola, Noni, Utari, Fitri, Kak Syamsir, Ade dan Astri yang selalu membantu, menyemangati, dan juga tempat bertukar curahan isi hati dalam menyelesaikan tesis ini.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dan tidak dapat dituliskan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa penulisan tesis ini memiliki banyak kekurangan sehingga penulis senantiasa menerima kritik dan saran untuk menyempurnakan penulisan tesis ini. Semoga hasil tesis ini memberikan kontribusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Wassalamualaikum Warohmatullahi Wabarokatuh.

Penulis,

Putri Amalia

## ABSTRAK

**PUTRI AMALIA.** Kontrol Optimal Model Matematika pada Penyebaran Penyakit Difteri (Dibimbing oleh Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc. dan Dr. Kasbawati, M. Si.).

Penelitian ini mengkaji kontrol optimal model penyebaran penyakit difteri. Difteri merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium diphtheriae*. Model ini merupakan penggabungan dari dua model yang dikembangkan oleh Sorbundit, et all (2017) dan Islam, et all (2022) sehingga kompartemen dalam model ini terbagi menjadi enam yaitu populasi rentan atau *susceptibles* ( $S$ ), populasi *latent* ( $L$ ), populasi terinfeksi dengan gejala atau *infected with symptoms* ( $I_s$ ), populasi terinfeksi tanpa gejala atau *infected without symptoms* ( $I_a$ ), populasi sembuh sementara dengan kekebalan penuh atau *recovered with full immunity* ( $R_f$ ), dan populasi sembuh sementara dengan kekebalan sebagian atau *recovered with partial immunity* ( $R_p$ ). Adapun kontrol optimal yang diterapkan dalam model ada dua yaitu vaksinasi dan pengobatan. Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin yaitu menyelesaikan serangkaian syarat perlu yang harus dipenuhi oleh kontrol yang optimal dan *state* yang terkait. Metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah metode *forward-backward sweep*. Berdasarkan hasil simulasi numerik pemberian kedua kontrol harus diberikan dalam jumlah yang besar sejak awal pengamatan dan diberikan secara terus-menerus agar jumlah populasi yang terinfeksi penyakit berkurang dan penyebaran penyakit difteri dapat dikendalikan.

**Kata kunci:** *Model matematika penyebaran penyakit difteri, masalah kontrol optimal, state, forward-backward sweep.*

## ABSTRACT

**PUTRI AMALIA.** Optimal Control of Mathematical Model of Diphtheria Spreading (supervised by Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc. and Dr. Kasbawati, M. Si.).

This research examines optimal control model for the spread of diphtheria disease. Diphtheria is an infectious disease caused by the bacterium *Corynebacterium diphtheriae*. This model is a combination of two models developed by Sornbundit et al (2017) and Islam et al (2022) so that the compartments in this model are divided into six namely population of susceptibles ( $S$ ), population of latent ( $L$ ), population of infected with symptoms ( $I_s$ ), population of infected without symptoms ( $I_a$ ), population of recovered with full immunity ( $R_f$ ) and population of recovered with partial immunity ( $R_p$ ). Two optimal controls are applied in the model, namely vaccination and treatment. The problem of optimal control is solved by using Pontryagin's minimal principle, which consists in solving a set of necessary conditions that must be satisfied by the optimal control and its associated state. The numerical method used to solve the optimal control problem is the forward-backward sweep method. Based on the results of numerical simulations, both controls should be administered in large numbers and continuously since the beginning of observation in order to reduce the number of diphtheria infected population and to control the spread of diphtheria.

**Keywords:** *Mathematical model of diphtheria spread, optimal control problem, state, forward-backward sweep.*

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
PERNYATAAN PENGAJUAN .....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS .....	iv
PRAKATA.....	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT .....	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL .....	xi
DAFTAR GAMBAR .....	xii
DAFTAR LAMPIRAN .....	xiii
DAFTAR SIMBOL .....	xiv
BAB I. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penulisan .....	4
1.4 Manfaat Penulisan .....	4
1.5 Batasan Masalah .....	4
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA .....	5
2.1 Studi <i>Review</i> Perkembangan Pemodelan Difteri .....	5
2.2 Difteri dan Gejalanya.....	6
2.3 Vaksinasi .....	7
2.4 Pengobatan Difteri.....	8
2.5 Sistem Persamaan Differensial .....	8
2.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan .....	9
2.7 Kriteria Routh-Hurwitz .....	10
2.8 Masalah Kontrol Optimal dan Prinsip Minimum Pontryagin .....	11
2.9 Metode <i>Forward-Backward Sweep</i> .....	15
2.10 Model SLIR pada Penyebaran Penyakit Difteri Pengungsi Rohingya di Banglades.....	16
BAB III. METODOLOGI PENELITIAN .....	18
3.1 Jenis Penelitian .....	18

3.2	Waktu dan Lokasi Penelitian .....	18
3.3	Prosedur Penelitian .....	18
BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN .....		21
4.1	Formulasi Model Titik Keseimbangan.....	21
4.2	Titik Keseimbangan.....	27
4.2.1	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit .....	28
4.2.2	Titik Keseimbangan Tidak Bebas Penyakit (Endemik) .....	29
4.3	Kestabilan Titik Keseimbangan .....	33
4.3.1	Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit .....	33
4.3.2	Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik Penyakit .....	36
4.4	Model Kontrol Optimal.....	40
4.5	Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal.....	41
4.6	Simulasi Numerik .....	51
4.6.1	Perbandingan Solusi Model Dengan Kontrol dan Tanpa Kontrol .....	53
4.6.2	Perbandingan Solusi Model dengan Kontrol Optimal dan Kontrol Konstan .....	60
4.6.3	Perbandingan Fungsi Kontrol Optimal.....	63
BAB V. PENUTUP .....		64
5.1	Kesimpulan.....	64
5.2	Saran .....	65
DAFTAR PUSTAKA.....		66
LAMPIRAN .....		68

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel</b>		<b>Halaman</b>
Tabel 1	Deskripsi variabel dan parameter pada model penyebaran penyakit difteri	25
Tabel 2	Nilai-nilai parameter dalam simulasi numerik model penyebaran difteri	52

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar</b>		<b>Halaman</b>
Gambar 1	Skema penyebaran penyakit difteri menggunakan model SLIR	17
Gambar 2	Skema penyebaran penyakit difteri dengan kontrol vaksinasi dan pengobatan	22
Gambar 3	Grafik perubahan populasi <i>Susceptible</i> terhadap waktu ( $t = 150$ hari )	53
Gambar 4	Grafik perubahan populasi <i>Latent</i> terhadap waktu ( $t = 150$ hari )	54
Gambar 5	Grafik perubahan populasi <i>Infected with symptoms</i> terhadap waktu ( $t = 150$ hari )	54
Gambar 6	Grafik perubahan populasi <i>Infected without symptoms</i> terhadap waktu ( $t = 150$ hari )	55
Gambar 7	Grafik perubahan populasi <i>Recovered with full immunity</i> terhadap (a) waktu ( $t = 150$ hari ), (b) waktu ( $t = 10000$ hari )	56
Gambar 8	Grafik perubahan populasi <i>Recovered with partial immunity</i> terhadap (a) waktu $t = 150$ hari dan (b) waktu $t = 10000$ hari	57
Gambar 9	Grafik perubahan populasi (a) <i>Latent</i> , (b) <i>Infected with symptoms</i> , (c) <i>Infected without symptoms</i> terhadap waktu ( $t = 30$ hari ) dengan parameter $\beta$ berbeda dan diberikan kontrol dan tanpa kontrol	59
Gambar 10	Grafik perubahan populasi (a) <i>Susceptibles</i> , (b) <i>Recovered with full immunity</i> , (c) <i>Recovered with partial immunity</i> terhadap waktu ( $t = 150$ hari ) dengan kontrol yang berbeda-beda	60
Gambar 11	Grafik perubahan populasi (a) <i>Latent</i> , (b) <i>Infected with symptoms</i> , (c) <i>Infected without symptoms</i> terhadap waktu ( $t = 150$ hari ) dengan kontrol yang berbeda-beda	61
Gambar 12	Grafik perbandingan perubahan kontrol vaksinasi $u_1(t)$ dan pengobatan $u_2(t)$	62

## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran</b>		<b>Halaman</b>
Lampiran 1	Titik Kesetimbangan Model Penyebaran Difteri Menggunakan Maple	68
Lampiran 2	Syntax Simulasi Numerik Model Kontrol Optimal	79

## DAFTAR SIMBOL

<b>Simbol</b>	<b>Makna</b>
$\mu$	Mu
$\beta$	Beta
$\delta$	Delta
$\theta$	Theta
$\alpha$	Alpha
$\gamma$	Gamma
$\rho$	Rho
$\eta$	Eta
$\omega$	Omega
$\tau$	Tau
$\Psi$	Psi
$\varepsilon$	Epsilon
$\partial$	Do/diferensial parsial

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Sebagian besar penyakit menular disebabkan oleh infeksi virus dan bakteri, seperti HIV, covid-19, tuberkulosis (TBC), difteri, kolera, tetanus, dan lain sebagainya. Dalam beberapa kasus laju penyebaran penyakit menular sangatlah cepat, sehingga diperlukan upaya untuk menekan laju penyebaran penyakit menular ini, seperti melakukan vaksinasi dan imunisasi bagi bayi yang baru lahir. Salah satu penyakit menular yang vaksinnya telah ditemukan yaitu penyakit difteri.

Difteri merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium diphtheriae*, terutama menginfeksi tenggorokan dan saluran udara bagian atas serta menghasilkan racun atau toksin yang memengaruhi organ lain. Gejala utama penyakit ini adalah sakit tenggorokan, demam rendah, dan kelenjar bengkak di leher. Racun difteri menyebabkan selaput jaringan mati menumpuk di atas tenggorokan dan amandel, sehingga menyebabkan kesulitan bernapas dan menelan. Dalam kasus yang parah, toksin dapat menyebabkan miokarditis atau neuropati perifer. Penyakit ini ditularkan melalui kontak fisik langsung atau melalui penghirupan sekresi aerosol dari batuk atau bersin orang yang terinfeksi.(WHO,2020)

Penyebaran penyakit difteri tersebar di seluruh dunia dan pada masa pra vaksinasi, difteri merupakan vonis mati bagi anak-anak karena tingkat kematian dari penyakit ini yang tinggi (Zakikhany and Efstratiou, 2012). Kemudian pada tahun 1923 vaksin toksoid difteri ditemukan dan digunakan secara luas di Amerika Serikat dan negara maju lainnya pada 1940-an dan 1950-an, kejadian di negara-negara tersebut menurun dengan cepat.

Pada tahun 2014, tercatat sebanyak 7347 kasus dan 7217 kasus di antaranya (98%) berasal dari negara-negara anggota WHO *South East Asian Region* (SEAR). Jumlah kasus difteri di Indonesia dilaporkan sebanyak 775 kasus pada tahun 2013 (19% dari total kasus SEAR), selanjutnya jumlah kasus menurun menjadi 430 pada tahun 2014 (6% dari total kasus SEAR). Jumlah kasus difteri di

Indonesia sedikit meningkat pada tahun 2016 jika dibandingkan dengan tahun 2015 (529 kasus pada tahun 2015 dan 591 pada tahun 2016). (Kemenkes, 2017)

Kemudian pada tahun 2017 jumlah kasus difteri di Indonesia yang dilaporkan sebanyak 954 kasus, dengan kematian sebanyak 44 kasus yang tersebar di 170 kabupaten/kota dan di 30 provinsi (Kemenkes, 2018). Dengan peningkatan jumlah kasus difteri ini, Kementerian Kesehatan (Kemenkes) menetapkan mewabahnya penyakit difteri ini sebagai Kejadian Luar Biasa (KLB). Pada tahun 2019 jumlah kasus difteri yang tercatat sebanyak 944 yang tersebar di 25 provinsi sedangkan sampai Mei 2020 tercatat kasus difteri sebanyak 129, paling banyak dilaporkan di Jawa Timur, Jawa Barat, DKI Jakarta, Kalimantan Timur dan Aceh. (Kemenkes, 2020)

Adanya KLB difteri yang terjadi pada tahun 2017 dan penyebaran penyakit difteri di Indonesia yang tergolong tinggi sampai saat ini, hal ini membuktikan bahwa difteri merupakan suatu ancaman yang nyata bagi masyarakat, sehingga diperlukan upaya pencegahan berupa vaksinasi dan imunisasi untuk mencegah terjadinya KLB difteri di masa yang akan datang. Dari data Kemenkes, penderita KLB difteri yang terjadi sepanjang tahun 2017 sebagian besar tidak pernah mendapatkan imunisasi ataupun vaksin dan jangkauan umur penderitanya cukup beragam. Ini menunjukkan bahwa kesadaran masyarakat mengenai imunisasi dan vaksinasi masih kurang, terlebih dengan terjadinya pandemi covid-19 saat ini kegiatan imunisasi dan vaksinasi banyak yang tertunda.

Seiring dengan perkembangan teknologi yang semakin canggih, dalam bidang matematika juga berkembang dengan pesat. Contohnya dalam pemodelan matematika, tidak hanya berorientasi pada masalah-masalah kecil dalam kehidupan sehari-hari, juga dapat digunakan untuk mengetahui bagaimana penyebaran suatu penyakit menular. Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu permasalahan yang nyata berdasarkan asumsi-asumsi. Pemanfaatan pemodelan matematika dalam mengetahui penyebaran penyakit difteri diharapkan memperoleh upaya apa yang harus dilakukan untuk mencapai suatu tujuan yaitu masyarakat terbebas dari difteri.

Beberapa penelitian sebelumnya yang memodelkan masalah penyebaran penyakit difteri diantaranya yaitu (Sornbundit, et al., 2017) yang mengembangkan model epidemik SIR untuk mengetahui penyebaran penyakit difteri di 77 provinsi Thailand, di tahun yang sama (Puspita, et al., 2017) meneliti model matematika

penyebaran penyakit difteri dengan menggunakan model SIQR yang dikembangkan dari model epidemik penyebaran penyakit menular.

SIR dengan menambahkan upaya karantina dalam penyebaran penyakit difteri. Penggunaan model SLIR dalam penyebaran penyakit difteri dibahas oleh (Islam, et al., 2022), dan dalam (Suryani and Yuenita, 2016) menggunakan model MSEIR untuk mengetahui penyebaran penyakit difteri di Indonesia. Pada tahun 2004 (Cheuvar, et al., 2004) melakukan pemodelan matematika untuk mengetahui berapa lama vaksin untuk pencegahan penyakit difteri dapat bertahan dan pada tahun 2020 (Aryani and Widyaningsih, 2020) mengembangkan model SIR dengan menambahkan upaya vaksinasi untuk menekan laju penyebaran penyakit difteri di Indonesia.

Berdasarkan penelitian terdahulu tersebut penulis tertarik untuk menganalisis penyebaran penyakit difteri dengan mengembangkan model SIR dengan menambahkan kompartemen *Latent*, membagi kompartemen *Infected* menjadi *Infected* bergejala dan tidak bergejala, membagi kompartemen *Recovered* menjadi dua yaitu *Recovered with full immunity* dan *Recovered with partial immunity*, serta menambahkan kontrol dalam model sehingga dalam menekan laju penyebaran penyakit difteri, selain melakukan pengobatan juga dilakukan langkah pencegahan berupa vaksinasi. Jadi, atas pertimbangan tersebut akan dilakukan penelitian yang dituang dalam tesis yang berjudul:

### **“Kontrol Optimal Model Matematika pada Penyebaran Penyakit Difteri”**

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya maka diperoleh rumusan masalah sebagai berikut

1. Bagaimana pengembangan model matematika penyebaran penyakit difteri dengan mempertimbangkan faktor vaksinasi individu yang rentan penyakit dan pengobatan individu yang terinfeksi penyakit difteri?
2. Bagaimana menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika penyebaran penyakit difteri?
3. Bagaimana menentukan kontrol optimal dari model matematika penyebaran penyakit difteri dengan faktor vaksinasi individu yang rentan penyakit dan pengobatan bagi individu yang terinfeksi penyakit difteri?

4. Bagaimana menganalisis perbandingan solusi numerik model matematika penyebaran penyakit difteri tanpa kontrol optimal dan dengan kontrol optimal?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan sebelumnya, maka tujuan dari penulisan tesis ini adalah

1. Mengetahui pengembangan model matematika penyebaran penyakit difteri dengan mempertimbangkan faktor vaksinasi individu yang rentan penyakit dan pengobatan individu yang terinfeksi penyakit difteri.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model penyebaran penyakit difteri.
3. Menentukan kontrol optimal dari model matematika penyebaran penyakit difteri dengan faktor vaksinasi individu yang rentan penyakit dan pengobatan bagi individu yang terinfeksi penyakit difteri.
4. Menganalisis perbandingan solusi numerik model matematika penyebaran penyakit difteri tanpa kontrol optimal dan dengan kontrol optimal.

### 1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran mengenai penyebaran penyakit difteri dan upaya pengendalian kontrol optimalnya dengan faktor kontrol berupa vaksinasi dan kampanye edukasi bagi individu rentan, serta pengobatan bagi individu yang terinfeksi penyakit agar proses pemulihan lebih cepat, penularan penyakit difteri dapat dikendalikan dan memperkecil tingkat kematian akibat penyakit difteri.

### 1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, populasi dalam model matematika penyebaran penyakit difteri dibagi menjadi enam kompartemen yaitu *susceptible* ( $S$ ), *latent* ( $L$ ), *Infected with symptoms* ( $I_s$ ), *infected without symptoms* ( $I_a$ ), *recovered with full immunity* ( $R_f$ ), dan *recovered with partial immunity* ( $R_p$ ). Kontrol optimal yang digunakan dalam model ini meliputi vaksinasi individu yang rentan dan pengobatan bagi individu yang terinfeksi.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Studi Review Perkembangan Pemodelan Difteri

Dalam (Sornbundit, et al., 2017) penelitian ini mengembangkan model epidemik SIR dengan mengklasifikasikan populasi menjadi 8 kompartemen yaitu *susceptible* ( $S_1$  dan  $S_2$ ) atau individu yang rentan terhadap penyakit, *symptomatic infectious* ( $I$ ) atau individu yang terinfeksi penyakit dengan gejala, *asymptomatic infectious* ( $A$ ) atau individu yang terinfeksi penyakit namun tanpa gejala, *carrier with full natural-acquired immunity* ( $R_f$ ) atau individu pembawa penyakit dengan imunitas alami lengkap, *carrier with partial natural acquired immunity* ( $R_p$ ) atau individu pembawa penyakit dengan imunitas parsial, *individual with full vaccine-induced immunity* ( $V_f$ ) atau individu dengan imunitas penuh, dan *individual with partial vaccine-induced immunity* ( $V_p$ ) atau individu dengan imunitas parsial. Dengan menggunakan data penderita difteri di Thailand dari tahun 1977-2014, penelitian ini bertujuan untuk mengetahui kemungkinan terjadinya *outbreak* di masa yang akan datang dan menyelidiki dampak dari pemberian *booster* vaksinasi. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa dengan pemberian booster vaksinasi secara kontinu maka *outbreak* penyakit difteri tidak akan terjadi di masa yang akan datang.

Penelitian (Puspita, et al., 2017) membagi kompartemen populasi menjadi 4 kompartemen yaitu *Susceptible* ( $S$ ) atau individu rentan terkena penyakit, *Infected* ( $I$ ) atau individu yang terinfeksi penyakit, *Quarantined* ( $Q$ ) individu terinfeksi yang di karantina, dan *Recovered* ( $R$ ) atau individu yang telah sembuh dari penyakit. Dalam model penyebaran penyakit difteri ini, model SIQR yang digunakan merupakan pengembangan dari model SIQR yang diteliti Hethcote pada tahun 2002. Dari simulasi model SIQR ini diperoleh bahwa semakin besar tingkat vaksinasi dan individu yang dikarantina maka akan semakin cepat individu akan sembuh dari penyakit.

Kestabilan model MSEIR penyebaran penyakit difteri dibahas dalam (Suryani and Yuenita, 2016) dengan memperhatikan laju infeksi jenuh (*saturated incidence rate*) dalam penelitian ini populasi dibagi dalam 4 kompartemen yaitu

*Maternal antibodies (M)* atau populasi yang dilindungi oleh imun pasif, *Susceptible (S)* atau populasi yang rentan terhadap penyakit, *Exposed (E)* atau populasi yang terinfeksi, tetapi tidak mampu menyebarkan penyakit kepada individu lain, *Infected (I)* atau populasi yang terinfeksi dan mampu menyebarkan penyakit kepada individu lain, dan *Recovered (R)* atau populasi yang sembuh. Berdasarkan kestabilan titik kesetimbangan dari model dalam penelitian ini, diperoleh bahwa dalam waktu yang lama penyakit akan hilang dari populasi atau dalam waktu yang lama penyakit akan relatif ada dalam populasi

Pada tahun 2004 (Cheuvar, et al, 2004) melakukan pemodelan matematika untuk mengetahui berapa lama vaksin untuk pencegahan penyakit difteri dapat bertahan. Konsen dari pemodelan ini tidak mengacu pada populasi, dalam penelitian diperoleh bahwa ketahanan antibodi individu yang menerima vaksin dTpa atau DTPa tidak melebihi dari 10 tahun, sehingga disarankan untuk individu yang rentan terkena penyakit difteri melakukan vaksinasi setiap 10 tahun sekali.

Kemudian (Aryani and Widyaningsih,2020) mengembangkan model SIR dengan menambahkan upaya vaksinasi untuk menekan laju penyebaran penyakit difteri di Indonesia, sehingga model yang diperoleh berupa model SVIR yang dikembangkan oleh (Liu, et al, 2008). Dalam penelitian ini menunjukkan bahwa pola penyebaran penyakit difteri di Indonesia pada rentang tahun 2008-2030, banyaknya individu sehat namun rentan terinfeksi difteri, dan individu yang sembuh dari difteri terus mengalami peningkatan setiap tahunnya.

## **2.2 Difteri dan Gejalanya**

Difteri adalah salah satu penyakit yang sangat menular, dapat dicegah dengan imunisasi, dan disebabkan oleh bakteri gram positif *Corynebacterium diphtheriae* strain toksin. Penyakit ini ditandai dengan adanya peradangan pada tempat infeksi, terutama pada selaput mukosa faring, laring, tonsil, hidung dan juga pada kulit. Manusia adalah satu-satunya *reservoir Corynebacterium diphtheriae*. Penularan terjadi secara droplet (percikan ludah) dari batuk, bersin, muntah, melalui alat makan, atau kontak langsung dari lesi di kulit. Tanda dan gejala berupa infeksi saluran pernafasan akut (ISPA) bagian atas, adanya nyeri tenggorokan, nyeri menelan, demam tidak tinggi (kurang dari 38,5°C), dan ditemui adanya *pseudomembrane* putih/keabu-abuan/kehitaman di tonsil, faring, atau laring yang tak mudah lepas, serta berdarah apabila diangkat.

Sebanyak 94% kasus difteri mengenai tonsil dan faring. Pada keadaan lebih berat dapat ditandai dengan kesulitan menelan, sesak nafas, stridor dan pembengkakan leher yang tampak seperti leher sapi (*bullneck*). Kematian biasanya terjadi karena obstruksi/sumbatan jalan nafas, kerusakan otot jantung, serta kelainan susunan saraf pusat dan ginjal. Apabila tidak diobati dan penderita tidak mempunyai kekebalan, angka kematian adalah sekitar 50%, sedangkan dengan terapi angka kematiannya sekitar 10%. Angka kematian difteri rata-rata 5 – 10% pada anak usia kurang 5 tahun dan 20% pada dewasa (di atas 40 tahun) (Kemenkes, 2017). Berdasarkan (New Jersey Department of Health, 2019), saat individu pertama kali terinfeksi penyakit, individu terinfeksi akan mengalami masa inkubasi, dimana dalam masa ini individu belum menunjukkan gejala telah terinfeksi difteri. Masa inkubasi berkisar antara 2-5 hari dan bisa lebih dari itu. Individu terinfeksi yang sedang dalam masa inkubasi tidak dapat menularkan penyakit ke individu yang lain.

Individu yang terinfeksi difteri ada yang menunjukkan gejala dan ada yang tanpa gejala, dan keduanya dapat menularkan penyakit difteri ke individu yang lain. Berdasarkan (Sornbundit, et al., 2017) populasi yang terinfeksi difteri tanpa gejala lebih besar dibandingkan dengan yang bergejala. Berdasarkan (Jane, 2018) dikatakan bahwa pada bulan Mei 2015 teridentifikasi satu kasus difteri dengan gejala di Catalonia, Spanyol, dan setelah dilakukan penelusuran kontak yang berhubungan dengan pasien, ditemukan bahwa terdapat 11 kasus lainnya yang positif terinfeksi difteri tetapi tidak menunjukkan gejala.

### 2.3 Vaksinasi

Penyakit Difteri dapat dicegah dengan imunisasi lengkap, dengan jadwal pemberian sesuai usia serta pemberian booster untuk dewasa. Saat ini vaksin untuk imunisasi rutin dan imunisasi lanjutan yang diberikan guna mencegah penyakit Difteri ada 4 macam (U.S. Department of Health and Human Services, 2020), yaitu:

- ✓ *Diphtheria and tetanus* (DT).
- ✓ *Diphtheria, tetanus, and pertussis* (DTaP).
- ✓ *Tetanus and diphtheria* (Td).
- ✓ *Tetanus, diphtheria, and pertussis* (Tdap).

Berdasarkan anjuran CDC, bayi dan anak di bawah 7 tahun menerima vaksin DTaP atau DT, sedangkan anak yang lebih besar dan orang dewasa menerima vaksin Tdap dan Td.

## 2.4 Pengobatan Difteri

Pengobatan untuk penyakit difteri ada dua (Gower, et al.,2022) yaitu

✓ Antitoksin

Pengobatan *Diphtheriae Anti Toxin* (DAT)/Antitoksin difteri diperoleh dari serum kuda dan obat ini hanya boleh digunakan di rumah sakit untuk kasus difteri yang dikonfirmasi atau suspek penyakit difteri. Pengobatan DAT merupakan obat lini pertama untuk tata laksana penyakit difteri dan harus diberikan sesegera mungkin. Perawatan dini dengan DAT penting untuk menetralkan toksin yang bersirkulasi bebas sebelum dapat mengikat secara permanen ke jaringan yang menyebabkan kerusakan organ. Oleh karena itu, efektivitasnya menurun seiring waktu sejak timbulnya gejala.

✓ Antibiotik

Penggunaan antibiotik dalam pengobatan difteri bukanlah pengganti untuk DAT. Pemberian antibiotik diberikan untuk membasmi bakteri dari nasofaring sehinggalah mencegah penularan difteri lebih lanjut ke orang lain. Proses diagnosis melalui laboratorium harus segera diselesaikan sebelum pengobatan difteri melalui antibiotik dimulai. Jenis antibiotik yang direkomendasikan sebagai obat difteri adalah golongan makrolida (erythromycin, azithromycin, dan clarithromycin). Terapi antibiotik biasanya diberikan selama 14 hari. Setelah pengobatan difteri ini selesai, perlu dilakukan pemeriksaan sampel kultur dari amandel dan tenggorokan untuk mengetahui perbedaan jumlah bakteri. Jika tingkat toksigenik bakteri masih tinggi, maka pengobatan difteri melalui antibiotik perlu diperpanjang sampai 10 hari ke depan.

## 2.5 Sistem Persamaan Differensial

Persamaan differensial merupakan persamaan yang berisi turunan dari satu atau lebih variabel terikat, berkenaan dengan satu atau lebih variabel bebas. Persamaan differensial dapat diklasifikasikan berdasarkan jenis, order dan linearitasnya (Zill, 2009). Berdasarkan jenisnya, persamaan differensial dibagi menjadi 2 yaitu Persamaan Differensial Biasa (PDB) jika persamaan hanya berisi turunan biasa dari satu atau lebih variabel dependen terhadap satu variabel

independen; Persamaan Differensial Parsial (PDP) jika persamaan memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat dari dua atau lebih variabel bebas. Orde persamaan differensial (baik PDB atau PDP) adalah urutan turunan tertinggi dalam persamaan differensial tersebut. Dalam simbol, persamaan differensial biasa berorde- $n$  dapat diekspresikan menjadi satu variabel terikat dengan bentuk umum berikut ini:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

dengan  $F$  merupakan fungsi dengan variabel bebas  $x$  dan variabel terikat  $y$ . Berdasarkan linearitasnya, Jika  $y$  dan berbagai turunannya  $y, y', y'', \dots$  muncul secara linier dalam persamaan differensial maka persamaan differensial tersebut merupakan persamaan differensial linier; jika tidak, maka persamaan tersebut merupakan persamaan nonlinier.

Sistem persamaan differensial adalah kumpulan persamaan differensial yang terikat satu sama lain. Misalkan diberikan sebuah vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , dengan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  dan  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Jika notasi  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  untuk menyatakan turunan  $x$  terhadap  $t$ , maka

$$\dot{x} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T.$$

Misalkan diberikan sistem autonomous  $\dot{x} = f(x)$  yaitu suatu sistem persamaan differensial dengan variabel bebas yang secara implisit bergantung pada  $t$  dengan  $x \in \mathbb{R}^n$ , maka sistem  $\dot{x} = f(x)$  dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

## 2.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan dilakukan untuk menganalisis kestabilan sistem persamaan differensial nonlinier. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan.

**Definisi 1.** (Wiggins, 2003): Titik  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , disebut titik kesetimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ , jika memenuhi  $f(x^*) = 0$ .

**Definisi 2.** (Hale and Kocak, 1991) Jika  $x^*$  merupakan titik kesetimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ , maka persamaan diferensial linear:

$$\dot{x} = J(x^*)x,$$

disebut persamaan linearisasi dari vector field  $f$  pada titik kesetimbangan  $x^*$  di mana  $f = f_1, f_2, \dots, f_n$  dan

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

disebut sebagai matriks Jacobi dari  $f$  di titik  $x^*$ .

Kestabilan titik kesetimbangan  $x^*$  dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu  $\lambda$  yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik:

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

dengan  $I$  adalah suatu matriks identitas.

## 2.7 Kriteria Routh-Hurwitz

Pengujian kestabilan dapat menggunakan kriteria jenis nilai eigen, namun terkadang ditemui kesulitan dalam mencari jenis nilai eigen dari akar persamaan karakteristik, misalnya pada persamaan karakteristik yang berorde tinggi. Dibutuhkan suatu kriteria untuk menjamin nilai akar persamaan karakteristik bernilai positif atau negatif, salah satu kriteria yang efektif untuk menjamin jenis nilai eigen adalah kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem dengan memperhatikan nilai koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika diberikan persamaan karakteristik:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0, \quad (2.1)$$

dengan  $b_i, i = 1, \dots, n$ , adalah koefisien dari persamaan karakteristik (2.1) dan merupakan bilangan real. Matriks Hurwitz yang dinotasikan dengan  $H_n$ , dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$H_1 = (b_1), H_2 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}, \dots$$

$$H_n = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \dots & 0 \\ 1 & b_2 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik (2.1) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan dari matriks Hurwitz bernilai positif yaitu  $\det(H_1) > 0$ ,  $\det(H_2) > 0$ ,  $\det(H_3) > 0$ , ...,  $\det(H_n) > 0$ . (Merkin, 1997).

## 2.8 Masalah Kontrol Optimal dan Prinsip Minimum Pontryagin

Perhatikan *state*  $x(t)$  dalam masalah kontrol optimal persamaan differensial biasa yang bergantung pada fungsi kontrol :

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.2)$$

dan fungsi objektif berikut:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.3)$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)),$$

$$x(t_0) = x_0, \text{ dan } x(t_f) \text{ bebas.}$$

Masalah kontrol optimal adalah mencari fungsi kontrol  $u(t)$  pada selang waktu  $[t_0, t_f]$  yang membawa persamaan (2.2) sepanjang lintasan  $x^*(t)$ , sedemikian sehingga nilai fungsi objektif apada persamaan (2.3) menjadi optimum. Diasumsikan bahwa  $u(t)$  merupakan fungsi terhadap waktu sehingga  $f(t, x, u)$  dan  $g(t, x, u)$  juga merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi dalam interval  $[t_0, t_f]$  dan fungsi  $f$  dipilih berdasarkan pada penekanan dari sistem yang akan dioptimalkan.

Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan menyelesaikan serangkaian syarat perlu yang harus dipenuhi oleh kontrol yang optimal dan *state* yang terkait. Syarat perlu yang yang harus diselesaikan dalam masalah kontrol optimal dikembangkan oleh Pontryagin dan rekannya pada pertengahan abad ke-20. Pontryagin memperkenalkan gagasan fungsi *adjoint* untuk menambahkan persamaan diferensial ke fungsi objektif. Fungsi *adjoint* memiliki peranan yang sama dengan pengali *Lagrange* dalam kalkulus multivariabel yang menambahkan

kendala pada fungsi beberapa variabel yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan.

**Teorema 1:** Jika  $u^*(t)$  dan  $x^*(t)$  merupakan kontrol optimal dan state optimal untuk masalah berikut:

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt.$$

Terhadap  $\dot{x} = g(t, x(t), u(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$  maka terdapat variabel adjoint  $\lambda(t)$  yang terturunkan sedemikian sehingga:

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

untuk semua fungsi kontrol  $u$  pada setiap  $t$  dengan fungsi Hamilton:

$$H = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$$

dan

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = 0.$$

Bukti:

Misalkan fungsi tujuan dalam persamaan (2.3) dengan  $x$  merupakan variabel *state*. Diasumsikan kontrol optimal  $u^*$  dengan  $x^*$  adalah variabel *state* optimal yang memenuhi persamaan (2.2). Misalkan  $J(u^*) \leq J(u) < \infty$  untuk semua kontrol  $u$ . Misalkan pula terdapat fungsi variasi kontinu  $h(t)$  dan  $\varepsilon \in R$  sedemikian sehingga:

$$v(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \tag{2.4}$$

dengan  $v(t)$  merupakan fungsi kontrol yang lain,  $\varepsilon$  adalah jarak untuk  $[t_0, t_f]$  dan  $h$  adalah *step size* dari persamaan (2.4). Misalkan  $y$  merupakan variabel *state* yang bersesuaian dengan  $v$  yang memenuhi:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \dot{y}(t) = g(t, y(t), v(t))$$

di mana  $v(t)$  adalah kontinu dan dengan lintasan *state* berawal dari posisi yang sama, dipilih  $y(t_0) = x_0$  sehingga  $v(t) \rightarrow u^*(t)$  untuk semua  $t$ , ketika  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Hal yang sama berlaku untuk  $y$ , karena asumsi yang dibuat pada  $g$  maka  $y(t) \rightarrow x^*(t)$  untuk setiap  $t$  yang tetap, dengan kata lain turunan  $\left. \frac{d}{d\varepsilon}y(t) \right|_{\varepsilon=0}$  ada untuk setiap  $t$ .

Fungsi tujuan dalam persamaan (2.2) yang dievaluasi di  $v$  adalah:

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, y(t), v(t)) dt \tag{2.5}$$

Selanjutnya didefinisikan  $\lambda(t)$  yang merupakan fungsi *adjoint* yang terturunkan dalam interval  $[t_0, t_f]$ . Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda^T(t)y(t)] dt &= \lambda^T(t_f)y(t_f) - \lambda^T(t_0)y(t_0) \\ \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\lambda^T(t)y(t)] dt + [\lambda^T(t_0)y(t_0) - \lambda^T(t_f)y(t_f)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Jumlahkan fungsi pada persamaan (2.6) ke dalam persamaan (2.5) diperoleh:

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ f(t, y(t), v(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda^T(t)y(t)) \right] dt + [\lambda^T(t_0)y(t_0) - \lambda^T(t_f)y(t_f)] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ f(t, y(t), v(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda^T(t)y(t)) \right] dt + [\lambda^T(t_0)y(t_0) - \lambda^T(t_f)y(t_f)] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [f(t, y(t), v(t)) + \dot{\lambda}^T(t)y(t) + \lambda^T(t)g(t, y(t), v(t))] dt + [\lambda^T(t_0)y(t_0) - \lambda^T(t_f)y(t_f)] \end{aligned}$$

dimana  $g(t, y(t), v(t)) = \dot{y}(t)$ . Karena nilai minimum dari  $J$  terhadap kontrol  $u$  terjadi pada  $u^*$ , saat turunan dari  $J(v)$  terhadap  $\varepsilon$  (dalam arah  $h$ ) adalah nol, yaitu

$$\left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(v) - J(u^*)}{\varepsilon} = 0$$

Berdasarkan teorema *Lebesgue Dominated Convergence*, bentuk limit dapat dipindahkan ke dalam bentuk integral, sehingga diperoleh turunan dari  $J(v)$  terhadap  $\varepsilon$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, y(t), v(t)) + \dot{\lambda}^T(t)y(t) + \lambda^T(t)g(t, y(t), v(t))] dt \Big|_{\varepsilon=0} + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_0)y(t_0) \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_f)y(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \end{aligned}$$

dengan menerapkan aturan rantai terhadap fungsi  $f$  dan  $g$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left[ f_x \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \dot{\lambda}^T(t) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \lambda^T(t) \left( g_x \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0} dt - \lambda^T(t_f) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( f_x + \lambda^T(t)g_x + \dot{\lambda}^T(t) \right) \frac{dy}{d\varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda^T(t)g_u)h(t) \right] dt - \lambda^T(t_f) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} &= 0 \end{aligned}$$

Agar bentuk  $\left( f_x + \lambda^T(t)g_x + \dot{\lambda}^T(t) \right)$  dan  $\lambda^T(t_f) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0}$  bernilai nol, maka dipilih fungsi *adjoint*  $\lambda(t)$  yang memenuhi persamaan:

$$\dot{\lambda}(t) = -[f_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t)g_x(t, x^*(t), u^*(t))]$$

dan syarat batas  $\lambda(t_f) = 0$ . Syarat batas ini dikenal sebagai syarat transversalitas. Pembuktian lebih lanjut mengenai teorema ini dapat dilihat dalam (Pontryagin, 1962) dan (Clarke, 1990).

**Teorema 2:** Misalkan fungsi  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang terturunkan secara kontinu terhadap  $t$ ,  $x$ ,  $u$  dan merupakan fungsi konveks terhadap  $u$ . Misalkan  $u^*$  adalah kontrol optimal untuk masalah optimasi, dengan state optimal  $x^*$ , dan  $\lambda$  adalah

fungsi yang diturunkan untuk setiap  $t$ . Misalkan untuk setiap  $t_0 \leq t \leq t_f$  berlaku  $\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial u} = 0$  maka untuk semua kontrol  $u$  dan untuk setiap  $t$  diperoleh:

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)).$$

Bukti:

Ambil kontrol  $u(t)$  dan  $x(t)$  pada waktu  $t$  dengan  $t_0 \leq t \leq t_f$  maka

$$\begin{aligned} & H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) - H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \\ &= [f(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g(t, x^*(t), u^*(t))] - [f(t, x^*(t), u(t)) + \\ & \quad \lambda(t)g(t, x^*(t), u(t))] \\ &= [f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t, x^*(t), u(t))] + \lambda(t)[g(t, x^*(t), u^*(t)) - g(t, x^*(t), u(t))] \end{aligned}$$

Karena  $f$  dan  $g$  merupakan fungsi konveks terhadap  $u$  maka aturan garis tangen berlaku sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & [f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t, x^*(t), u(t))] + \lambda(t)[g(t, x^*(t), u^*(t)) - g(t, x^*(t), u(t))] \\ & \geq (u^*(t) - u(t))f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)(u^*(t) - u(t))g_u(t, x^*(t), u^*(t)) \\ &= (u^*(t) - u(t))[f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t))] \end{aligned}$$

Karena  $\frac{\partial H}{\partial u} = f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0$  maka

$$\begin{aligned} & H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) - H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \geq 0 \\ & H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \end{aligned}$$

Berikut ini merupakan garis besar bagaimana prinsip ini dapat diterapkan untuk memperoleh syarat perlu dari masalah optimasi yang dilakukan yaitu:

1. Bentuk umum fungsi Hamilton berikut:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda^T g(t, x(t), u(t)).$$

2. Mencari  $u^* = u^*(t, x(t), \lambda(t))$  berdasarkan syarat stasioner berikut:

$$\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} = 0$$

3. Mengamati

$$H(t, x(t), u^*(t), \lambda(t)) = \min_{u \in U} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)).$$

4. Menyelesaikan persamaan *state*:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial \lambda}$$

dengan nilai  $x(t_0) = x_0$  dan persamaan *costate*:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x}$$

dengan kondisi transversalitas  $\lambda(t_f) = 0$ .

5. Mensubstitusi hasil dari langkah 4 ke  $u^*$  untuk menentukan kontrol optimal. (Lenhart and Workman, 2007)

## 2.9 Metode *Forward-Backward Sweep*

Tinjau masalah optimasi yang diberikan pada persamaan (2.13) terhadap kendala pada persamaan (2.14). Dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin, masalah optimasi yang berkendala tersebut dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu:

$$\min_{(x,u,\lambda)} H(t, x, u, \lambda) = \min_{(x,u,\lambda)} f(t, x, u) + \lambda^T(t)g(t, x, u)$$

dengan syarat keoptimalan:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U.$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan berbagai metode optimasi. Salah satunya adalah dengan menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Metode ini merupakan metode iteratif yang akan digunakan untuk mengaproksimasi solusi optimal  $u^*$  menggunakan tebakan awal yang diberikan untuk  $u$  di awal iterasi. Pada metode ini, interval waktu  $[t_0, t_f]$  dibagi menjadi beberapa bagian, yaitu  $t_0 = b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1} = t_f$  dan kontrol  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$ ,  $u_i \approx u(b_i)$ . Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk  $x$  dan  $\lambda$  yang bergantung pada  $u$ . Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas untuk  $x$  dan  $\lambda$  tersebut.

Metode *Forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi  $x(t)$ . Pada metode ini, diberikan kondisi awal dan *step size* yaitu  $h$ . Pendekatannya melalui  $x(t+h)$  dan  $x(t)$ , sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan:

$$k_1 = f(t, x(t)).$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right).$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right).$$

$$k_4 = f(t + h, x(t) + hk_3).$$

Sedangkan metode *Backward* Runge Kutta orde 4 diberikan kondisi akhir dan *step size* yaitu  $h$ . Pendekatannya melalui  $\lambda(t - h)$  dan  $\lambda(t)$  sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$\lambda(t - h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan:

$$k_1 = f(t, \lambda(t)).$$

$$k_2 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right).$$

$$k_3 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right).$$

$$k_4 = f(t - h, \lambda(t) - hk_3).$$

Sedangkan nilai  $u$  diperbaharui setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai  $u$  yang lama dengan nilai  $u$  yang baru yaitu:

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2}$$

dengan  $u_{baru}$  diperoleh dari syarat keoptimalan  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ .

Pada metode ini, iterasi akan berhenti ketika syarat konvergensi telah dipenuhi yaitu ketika nilainya menjadi sangat kecil. Bentuk uji konvergensi lain adalah  $\delta \|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$ , dengan  $\delta$  merupakan besar toleransi yang diperkenankan (Lenhart and Workman, 2007).

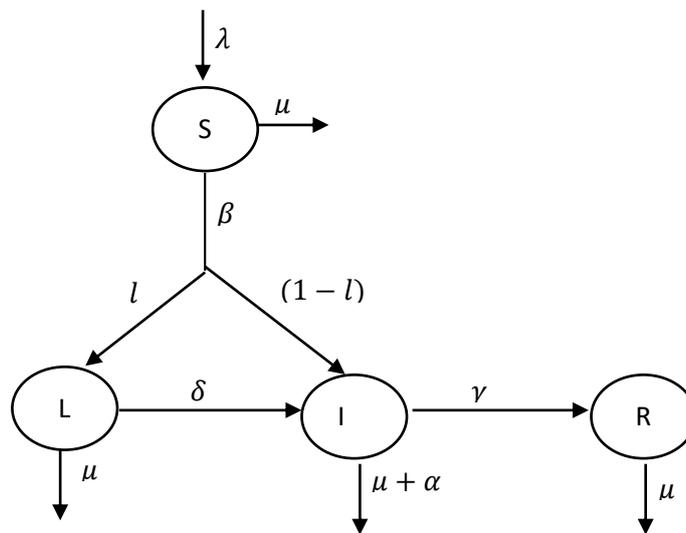
## 2.10 Model SLIR pada Penyebaran Penyakit Difteri Pengungsi Rohingya di Banglades.

Dalam penelitian ini, (Islam, et al., 2022) memodifikasi model dasar SIR dengan menambahkan kompartemen *Latent* (L), dimana dalam model tersebut populasi *Latent* didefinisikan sebagai populasi terinfeksi difteri dan tidak dapat menularkan penyakit ke populasi rentan. Secara garis besar, dalam model yang dikembangkan Islam ini dibagi dalam 4 kompartemen yaitu *Susceptible* (S), *Latent* (L), *Infected* (I) dan *Recovered* (R) dengan asumsi sebagai berikut:

- a. Laju individu yang masuk ke kompartemen S konstan

- b. Penyebaran penyakit menular karena adanya interaksi antara individu yang terinfeksi (I) dengan individu yang rentan dan individu rentan yang tertular penyakit ini akan pindah ke kompartemen I
- c. Kematian alami diasumsikan sama
- d. Individu yang berada di kompartemen *latent* dalam jangka waktu tertentu akan berpindah ke kompartemen I.
- e. Individu yang terinfeksi akan berpindah ke kompartemen R dengan laju perpindahan sebesar  $\gamma$ .

Berdasarkan asumsi di atas model penyebaran penyakit menular yang dikembangkan Hethcote dapat digambarkan dalam diagram kompartemen berikut



**Gambar 1.** Skema penyebaran penyakit difteri menggunakan model SLIR

Dari Gambar 1 diperoleh sistem persamaan diferensial berikut

$$\frac{dS}{dt} = \lambda - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dL}{dt} = l\beta SI - (\mu + \delta)L$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-l)\beta SI + \delta L - (\gamma + \mu + \alpha)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$