

**SOLUSI NUMERIK MODEL TRANSPOR SEDIMEN PERMUKAAN  
DASAR MENGGUNAKAN METODE MACCORMACK**

*NUMERICAL SOLUTIONS OF BED-LOAD TRANSPORT  
SEDIMENT MODEL USING MACCORMACK METHOD*



**IRFAN SAID  
H022201005**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2022**

**SOLUSI NUMERIK MODEL TRANSPOR SEDIMEN PERMUKAAN  
DASAR MENGGUNAKAN METODE MACCORMACK**

*NUMERICAL SOLUTIONS OF BED-LOAD TRANSPORT SEDIMENT  
MODEL USING MACCORMACK METHOD*

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

**IRFAN SAID  
H022201005**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2023**

**TESIS**

**SOLUSI NUMERIK MODEL TRANSPOR SEDIMEN PERMUKAAN  
DASAR MENGGUNAKAN METODE MACCORMACK**

**IRFAN SAID**  
**NIM. H022201005**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Magister Program Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 05 Januari 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

**Menyetujui**

**Pembimbing Utama**



**Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.**  
**NIP. 19750816 199903 1001**

**Pembimbing Pendamping**



**Dr. Khaeruddin, M.Sc.**  
**NIP. 19650914 199103 1003**

**Ketua Program Studi  
Magister Matematika**



**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**  
**NIP. 19640207 199103 1013**

**Dekan Fakultas MIPA  
Universitas Hasanuddin**



**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 19720515 1997 02 1002**

## PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Solusi Numerik Model Transpor Sedimen Permukaan Dasar Menggunakan Metode MacCormack" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Khaeruddin, M.Sc. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari ini tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal JMSK : Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi sebagai artikel dengan judul "*Metode MacCormack untuk menyelesaikan model transpor sedimen permukaan dasar satu dimensi*".

Dengan ini saya limpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 05 Januari 2023



Irfan Said  
NIM. H022201005

## UCAPAN TERIMA KASIH

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada Allah Yang Maha Esa atas segala nikmat hidup, kesehatan, rejeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul “Solusi Numerik Model Transpor Sedimen Permukaan Dasar Menggunakan Metode MacCormack”. Tak lupa pula salam dan shalawat kepada baginda Rasulullah Nabiullah Muhammad SAW, sosok yang menjadi suri tauladan bagi penulis dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Penulisan tesis ini bertujuan untuk memenuhi syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar. Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.**, selaku pembimbing utama dan **Dr. Khaeruddin, M.Sc.**, selaku pembimbing pendamping untuk segala waktu, ilmu, serta kesabaran dalam membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan dan koreksi kepada penulis dalam pengerjaan tesis ini.
2. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si., Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, dan **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, dan **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya dan seluruh pihak birokrasi atas pengurusan administrasi yang diberikan kepada penulis.
5. Seluruh staf Departemen Matematika Universitas Hasanuddin atas segala bantuan dalam pengurusan administrasi akademik selama ini.
6. Kedua Orang tua tercinta Ayahanda **Muh. Said** dan Ibunda **Rosniar** atas segala kasih sayang, doa, dan dukungan kepada penulis.

7. Seluruh teman-teman Program Studi Magister Matematika yang telah berjuang bersama-sama selama ini.
8. Teruntuk semua pihak yang belum sempat penulis tuliskan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuannya selama ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan-kekurangan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima guna perbaikan kedepannya.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak.

Makassar, 05 Januari 2023

Penulis

**ABSTRAK**

Penelitian ini menyelidiki tentang solusi numerik model transpor sedimen menggunakan metode MacCormack yang merupakan salah satu jenis skema metode beda hingga. Model transpor sedimen permukaan dasar dibangun atas persamaan air dangkal dan persamaan Exner. Formula Meyer-Peter dan Muller (MPM) dan formula Wu digunakan untuk menentukan faktor Grass dari laju transpor sedimen permukaan dasar. Dalam implementasi metode MacCormack, persamaan-persamaan pembangun didiskritisasi ke dalam step prediktor dan step korektor. Hasil-hasil numerik metode MacCormack akan divalidasi dengan hasil-hasil eksperimen serta hasil-hasil numerik yang diperoleh dengan metode numerik yang berbeda. Hasil-hasil numerik berdasarkan metode MacCormack dengan formula Wu memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan menggunakan formula MPM dalam proses transpor sedimen permukaan dasar. Pada kasus khusus, karena model transpor sedimen satu dimensi memiliki solusi analitik, persamaan ini juga diselesaikan dengan metode MacCormack. Hasilnya menunjukkan bahwa solusi numerik dan solusi analitik pada kasus satu dimensi sulit untuk dibedakan karena akurasi skema numerik yang tinggi.

**Kata kunci :** Model transpor sedimen permukaan dasar; Persamaan air dangkal; Persamaan Exner; Metode MacCormack;

**ABSTRACT**

In this work, we investigate the numerical solution of two-dimensional bed-load sediment transport model using MacCormack method which is one kind of finite difference method. Bed-load sediment transport model is governed by the shallow water equations and Exner equation. The Meyer-Peter and Muller (MPM) formula and Wu formula will be used to determine the Grass factor of the bed-load sediment transport rate. In the implementation of the MacCormack method, the governing equations will be discretised into predictor and corrector steps. The numerical results of the MacCormack method will be validated with experimental results as well as the existing numerical solutions that have been obtained with different numerical method. We found that the numerical solutions based on the MacCormack method with Wu formula give better results than using MPM formula in the bed-load sediment transport process. For the special case, since the one-dimensional sediment transport model has analytical solutions, we also solve the equation using MacCormack method. The results show that numerical and analytical solutions on the one-dimensional case are hardly differentiated due to the high accuracy of the numerical scheme.

**Keywords :** Bed-load sediment transport model; Shallow water equations; Exner equation; MacCormack Method;

**DAFTAR ISI**

HALAMAN PENGAJUAN TESIS .....	i
HALAMAN PENGESAHAN TESIS .....	ii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS .....	iii
UCAPAN TERIMA KASIH.....	iv
ABSTRAK .....	vi
ABSTRACT .....	vii
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR GAMBAR .....	x
DAFTAR TABEL .....	xii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1    LATAR BELAKANG .....	1
1.2    RUMUSAN MASALAH .....	4
1.3    TUJUAN PENELITIAN.....	4
1.4    MANFAAT PENELITIAN.....	4
1.5    BATASAN MASALAH.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	5
2.1    SEDIMEN.....	5
2.2    PERSAMAAN AIR DANGKAL.....	6
2.2.1    Persamaan Kekekalan Massa (Kontinuitas) .....	6
2.2.2    Persaman Kekekalan Momentum .....	9
2.3    PERSAMAAN EXNER.....	14
2.4    METODE MACCORMACK.....	16
2.5    LINEAR DAMPING .....	19
2.6    SYARAT BATAS.....	21
BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....	23
3.1    JENIS PENELITIAN.....	23
3.2    WAKTU DAN LOKASI PENELITIAN.....	23

3.3	LANGKAH PENELITIAN.....	23
3.4	DIAGRAM ALUR PENELITIAN .....	25
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....		26
4.1	MODEL TRANSPOR SEDIMEN .....	26
4.2	PERSAMAAN TRANSPOR SEDIMEN SATU DIMENSI .....	27
4.2.1	Solusi Analitik Persamaan Transpor Sedimen Satu Dimensi.....	28
4.2.2	Hasil Eksperimen Persamaan Transpor Sedimen Satu Dimensi ...	31
4.3	PERSAMAAN TRANSPOR SEDIMEN DUA DIMENSI .....	36
4.3.1	Hasil Eksperimen Dua Dimensi dengan penyempitan saluran.....	37
4.3.2	Hasil Eksperimen Dua Dimensi dengan perluasan saluran .....	44
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN .....		51
5.1	KESIMPULAN.....	51
5.2	SARAN.....	51
DAFTAR PUSTAKA .....		53
LAMPIRAN .....		55

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Sketsa untuk menurunkan persamaan air dangkal .....	7
Gambar 2.2. Ilustrasi tekanan hidrostatis .....	12
Gambar 2.3. (a) Kondisi awal $h$ masalah bendungan runtuh, (b) solusi $h$ masalah bendungan runtuh untuk $t = 0,2 s$ . .....	20
Gambar 2.4. (a) Solusi metode MacCormack untuk $t = 0,2s$ . (b) Perbandingan solusi analitik dengan solusi MacCormack untuk $t = 0,2 s$ . .....	21
Gambar 2.5. Kondisi batas <i>free-slip</i> .....	22
Gambar 4.1. Solusi analitik dan solusi metode MacCormack (atas) ketinggian permukaan dasar $Z_b$ (bawah) ketinggian permukaan air $h + Z_b$ untuk $t = 10 s$ dengan $\Delta t = 0,01$ dan $\Delta x = 0,1$ . .....	30
Gambar 4.2. (atas) Galat relatif ketinggian permukaan atas $h + Z_b$ untuk $t = 10 s$ (bawah) Galat relatif ketinggian permukaan dasar $Z_b$ untuk $t = 10 s$ . .....	31
Gambar 4.3. Perbandingan antara solusi eksperimen pertama (Spinewine & Zech, 2007), solusi numerik metode volume hingga (Juez, Murillo, & García-Navarro, 2014), dengan solusi metode MacCormack menggunakan formula MPM dan formula Wu untuk $t = 0,25, t = 0,5 s, t = 0,75 s, t = 1 s, t = 1,25 s$ dan $t = 1,5 s$ . .....	34
Gambar 4.4. Perbandingan antara solusi eksperimen kedua (Spinewine & Zech, 2007), solusi numerik metode volume hingga (Juez, Murillo, & García-Navarro, 2014), dengan solusi metode MacCormack menggunakan formula MPM dan formula Wu untuk $t = 0,25, t = 0,5 s, t = 0,75 s, t = 1 s, t = 1,25 s$ dan $t = 1,5 s$ . .....	35
Gambar 4.5. (atas) Tampak samping domain eksperimen, (bawah) Tampak atas domain eksperimen. ....	39

Gambar 4.6. Ketinggian air hasil eksperimen (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021) .....	40
Gambar 4.7. Hasil simulasi ketinggian air menggunakan (kolom kiri) metode MacCormack dan (kolom kanan) hasil penelitian sebelumnya (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021) dengan formula MPM. ....	41
Gambar 4.8. Hasil simulasi ketinggian air menggunakan (kolom kiri) metode MacCormack dan (kolom kanan) hasil penelitian sebelumnya (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021) dengan formula Wu. ....	42
Gambar 4.9. Lokasi titik-titik pengamatan perubahan ketinggian air. ....	42
Gambar 4.10. Perbandingan ketinggian air hasil eksperimen dengan hasil numerik metode MacCormack dan hasil penelitian sebelumnya .....	43
Gambar 4.11. (atas) Hasil eksperimen perubahan permukaan dasar, (tengah) Hasil numerik penelitian sebelumnya (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021), (bawah) Hasil numerik metode MacCormack; Gambar kiri menggunakan formula MPM dan gambar kanan menggunakan formula Wu. ....	45
Gambar 4.12. (atas) Sketsa tampak samping dari domain eksperimen, (bawah) Sketsa tampak atas dari domain eksperimen. ....	46
Gambar 4.13. Lokasi titik-titik pengamatan (kiri) dan sayatan melintang (kanan). ....	47
Gambar 4.14. Perbandingan solusi-solusi numerik terhadap solusi eksperimen untuk ketinggian air pada beberapa beberapa titik pengamatan; Hasil Juez merupakan hasil penelitian sebelumnya (Juez, Murillo, & García-Navarro, 2014). ....	49
Gambar 4.15. Perbandingan solusi-solusi numerik terhadap solusi eksperimen untuk ketinggian permukaan dasar pada beberapa sayatan melintang di hilir saluran; Hasil Juez merupakan hasil penelitian sebelumnya (Juez, Murillo, & García-Navarro, 2014). ....	51

## DAFTAR TABEL

Tabel 1.1. Faktor interaksi Grass $G_p$ untuk formula laju transpor sedimen (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021) .....	15
Tabel 4.1. Analisis konvergensi metode MacCormack terhadap solusi analitik untuk $t = 10$ s dari 6 (enam) $\Delta x$ yang berbeda .....	32
Tabel 4.2. Kondisi awal dari eksperimen .....	32
Tabel 4.3. <i>Root mean Square error</i> (RMSE) dari solusi numerik yang diperoleh pada Eksperimen pertama (Hasil MPM dan Wu menggunakan metode MacCormack; Hasil Juez merupakan hasil penelitian sebelumnya (Juez, Murillo, & García-Navarro, 2014)) .....	36
Tabel 4.4. <i>Root mean Square error</i> (RMSE) dari solusi numerik yang diperoleh pada Eksperimen kedua (Hasil MPM dan Wu menggunakan metode MacCormack; Hasil Juez merupakan hasil penelitian sebelumnya (Juez, Murillo, & García-Navarro, 2014)).....	36
Tabel 4.5. Komposisi penyusun permukaan dasar (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021) .....	39
Tabel 4.6. <i>Root mean square error</i> (RMSE) untuk ketinggian permukaan air solusi numerik metode MacCormack dan solusi numerik penelitian sebelumnya terhadap solusi eksperimen; M-Aranda merupakan solusi numerik penelitian sebelumnya (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021).....	44
Tabel 4.7. Koordinat dari titik-titik pengamatan pada saluran.....	47
Tabel 4.8. Posisi-posisi sayatan melintang pada saluran.....	47
Tabel 4.9. <i>Root mean square error</i> (RMSE) ketinggian air pada titik-titik pengamatan solusi-solusi numerik metode MacCormack maupun hasil penelitian sebelumnya terhadap solusi eksperimen; Hasil Juez merupakan hasil penelitian sebelumnya (Juez, Murillo, & García-Navarro, 2014) .....	48

Tabel 4.10. *Root mean square error* (RMSE) solusi numerik metode MacCormack maupun hasil penelitian sebelumnya terhadap solusi eksperimen pada sayatan melintang; Hasil Juez merupakan hasil penelitian sebelumnya (Juez, Murillo, & García-Navarro, 2014).....50

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

#### **1.1 LATAR BELAKANG**

Transpor sedimen merupakan salah satu fenomena alam yang sangat kompleks. Sedimen dapat didefinisikan sebagai material terfragmentasi dari batuan yang terbentuk dari proses fisika atau proses kimia. Proses transportasi sedimen disebabkan oleh efek gaya gravitasi serta oleh efek gesekan dengan udara atau aliran yang mengandung sedimen (Castro Diaz, Fernandez-Nieto, & Ferreiro, 2008).

Klasifikasi transpor sedimen di dalam sungai biasanya terbagi ke dalam dua bentuk fenomena yang berbeda: transpor sedimen dasar (bed-load) dan transpor sedimen suspensi (suspended load). Transpor sedimen dasar (bed-load) merupakan gerakan butiran sedimen pada permukaan dasar. Butiran sedimen tersebut bergerak dengan cara bergeser, berguling, atau melompat di atas permukaan dasar. Transpor sedimen suspensi merupakan butiran sedimen yang bergerak didalam aliran. Proses transpor sedimen ini umumnya terjadi pada lingkungan yang memiliki aliran permukaan seperti sungai, pantai dan muara (Wu, 2007).

Transpor sedimen permukaan dasar umumnya terdiri oleh pasangan komponen hidrodinamik dan morfodinamik. Komponen hidrodinamik dimodelkan oleh persamaan air dangkal, dimana model ini digunakan untuk mempelajari pergerakan aliran di sungai, saluran air, area pantai, dan sebagainya. Komponen morfodinamik dimodelkan dengan persamaan Exner. Persamaan Exner menggambarkan konservasi massa antara sedimen pada dasar permukaan dengan sedimen yang berpindah (Castro Diaz, Fernandez-Nieto, & Ferreiro, 2008).

Hudson dan Sweby (2003) menginvestigasi solusi numerik persamaan-persamaan pembangun transpor sedimen permukaan dasar menggunakan metode volume hingga skema Roe. Hasil-hasil solusi numerik dari berbagai variasi formula volume hingga dibandingkan dengan

sebuah solusi pendekatan yang dibangun. Solusi pendekatan tersebut valid dengan asumsi bahwa antara aliran air dan sedimen permukaan dasar memiliki tingkat interaksi yang lemah.

Fernandez-Nieto, dkk (2008) berfokus pada pendekatan numerik transpor sedimen permukaan dasar satu dimensi (yang selanjutnya akan ditulis 1D) yang dipengaruhi oleh aliran air. Hasil-hasil skema metode volume hingga berorde tinggi kemudian dibandingkan dengan solusi pendekatan maupun dengan data-data eksperimen yang telah dilakukan oleh penelitian-penelitian sebelumnya. Zhang dan Duan (2011) membangun model volume hingga pada model transpor sedimen permukaan dasar. Penelitian ini menggunakan persamaan van Rijn sebagai formula untuk menghitung laju transpor sedimen. Hasil dari skema numerik dibandingkan dengan solusi teoritis maupun dengan data hasil observasi. Kedua penelitian diatas menunjukkan bahwa skema numerik berorde tinggi cenderung memberikan akurasi yang lebih baik.

Sebuah solusi analitik diajukan oleh Berthon, dkk (2012) untuk model persamaan transpor sedimen permukaan dasar 1D dalam sistem persamaan air dangkal. Solusi ini valid untuk digunakan pada beberapa model erosi seperti model Grass maupun model Meyer-Peter dan Muller (MPM). Solusi ini dibangun dengan mengasumsikan laju dari aliran pada sistem persamaan air dangkal berada dalam keadaan tunak.

Kebanyakan penelitian-penelitian transpor sedimen dalam beberapa tahun terakhir masih terbatas pada bentuk persamaan 1D. Hal yang membedakan diantara penelitian-penelitian tersebut adalah skema dan modifikasi numerik volume hingga yang digunakan berbeda-beda. Gunawan dan Lhebrard (2015) menggunakan skema numerik yang disebut dengan skema relaksasi hidrostatis. Skema volume hingga ini memberikan rekonstruksi hidrostatis dari pemecah relaksasi. Liu dan Beljadid (2017) menyelesaikan pasangan persamaan transpor sedimen dengan metode volume hingga skema tipe Godunov central-upwind. Skema tersebut dibangun dalam grid segitiga tidak terstruktur dengan akurasi orde kedua.

Sebuah skema numerik volume hingga juga diusulkan oleh Martínez-Aranda, dkk (2019) berdasar pada pemecah Roe yang ditambahkan dengan akurasi orde pertama dalam ruang dan waktu.

Penelitian-penelitian dalam model dua dimensi (yang selanjutnya akan ditulis 2D) umumnya telah dilakukan untuk menyimulasikan bentuk topografi dari sedimen. Akan tetapi, aplikasi kasusnya masih terbatas karena membutuhkan waktu komputasi yang lebih lama dan kurangnya data observasi untuk dibandingkan dengan model yang digunakan. Juez, dkk (2014) membahas tentang model 2D transpor sedimen permukaan dasar yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode volume hingga dengan sebuah pemecah tipe Roe. Caviedes-Voullième, dkk (2017) membahas transpor sedimen dalam aplikasinya pada saluran pembuangan. Martínez-Aranda, dkk (2021) membandingkan dua strategi berbeda berdasarkan pada metode volume hingga menggunakan pendekatan Roe yang ditambahkan.

Oleh karena itu, penelitian ini akan difokuskan pada penyelesaian secara numerik menggunakan pendekatan beda hingga metode MacCormack. Metode MacCormack merupakan metode beda hingga eksplisit dengan akurasi orde kedua dalam ruang dan waktu (MacCormack, 1969). Metode MacCormack dipilih karena metode ini bisa memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode-metode beda hingga eksplisit lainnya (Hoffmann & Chiang, 2000; Said, Ribal, & Mahie, 2017).

Berdasarkan uraian penelitian-penelitian tersebut, menegaskan bahwa pentingnya kajian untuk menyelidiki solusi numerik persamaan transpor sedimen permukaan dasar dengan menggunakan metode MacCormack. Solusi numerik yang diperoleh akan divalidasi dengan solusi eksperimen yang telah diperoleh pada penelitian-penelitian sebelumnya, untuk mengetahui tingkat akurasi metode yang digunakan. Atas dasar ini, penulis menuangkannya dalam bentuk penelitian dengan judul:

**“Solusi Numerik Model Transpor Sedimen Permukaan Dasar  
Menggunakan Metode MacCormack”**

## **1.2 RUMUSAN MASALAH**

Adapun masalah yang dirumuskan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan solusi numerik model transpor sedimen pada permukaan dasar dengan metode MacCormack?
2. Bagaimana perbandingan solusi eksperimen dengan solusi numerik menggunakan metode MacCormack dalam proses transpor sedimen permukaan dasar?

## **1.3 TUJUAN PENELITIAN**

Adapun tujuan yang akan dicapai pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan solusi numerik model transpor sedimen pada permukaan dasar dengan metode MacCormack.
2. Membandingkan solusi eksperimen dengan solusi numerik menggunakan metode MacCormack dalam proses sedimen permukaan dasar.

## **1.4 MANFAAT PENELITIAN**

Penelitian ini diharapkan mampu memberikan pemahaman tentang model transpor sedimen permukaan dasar dan penyelesaiannya secara numerik menggunakan metode MacCormack.

## **1.5 BATASAN MASALAH**

Pada penelitian ini, permasalahan dibatasi pada penyelesaian model transpor sedimen permukaan dasar dengan melakukan pendekatan numerik beda hingga metode MacCormack.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 SEDIMEN

Sedimen dapat didefinisikan sebagai pecahan materi dari bebatuan yang terbentuk oleh proses fisika atau proses kimia yang berbeda. Pergerakan bebatuan di dalam sebuah gunung sebagai materi difusi dalam air juga termasuk sebagai proses transpor sedimen. Transpor ini disebabkan oleh efek gravitasi dan efek gesekan dengan udara atau fluida yang mengandung sedimen (Castro Diaz, Fernandez-Nieto, & Ferreiro, 2008).

Transpor sedimen adalah proses alam yang umumnya terjadi di aliran permukaan seperti sungai, pantai, atau muara. Partikel-partikel sedimen dapat berpindah melalui dua mekanisme dasar, yaitu *suspended load* dan *bedload*. *Suspended load* terdiri dari partikel-partikel yang bergerak di dalam aliran air yang memiliki kecepatan yang sama dengan fluida. Transpor *bedload* menyebabkan perpindahan massa sedimen melalui proses mekanisme meluncur (*slide*), bergulir (*rolling*) dan melompat (*saltation*) diatas lapisan permukaan dasar (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021).

Dalam transpor *bedload*, umumnya partikel sedimen berinteraksi langsung dengan permukaan dasar aliran, dan kecepatannya jauh lebih lambat jika dibandingkan dengan kecepatan aliran. Meskipun total massa sedimen yang berpindah melalui mekanisme *suspended load* dapat jauh lebih banyak dibandingkan dengan mekanisme *bedload*, akan tetapi mekanisme *bedload* memainkan peranan penting di dalam permukaan dasar yang berupa pasir dan kerikil. Mekanisme *bedload* dapat menyebabkan perubahan yang cepat dan mencolok pada kedalaman permukaan dasar (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021).

Model transpor sedimen tersusun atas persamaan air dangkal (*shallow water equation*) ditambahkan dengan persamaan transpor

sedimen atau biasa disebut juga dengan persamaan Exner. Persamaan air dangkal umumnya digunakan untuk mengamati pergerakan aliran di sungai, saluran, pantai dan sebagainya. Persamaan Exner merupakan persamaan kontinuitas yang menggambarkan sedimen pada permukaan dasar dengan sedimen yang berpindah-pindah (Castro Diaz, Fernandez-Nieto, & Ferreiro, 2008).

## 2.2 PERSAMAAN AIR DANGKAL

Persamaan air dangkal merupakan sistem persamaan diferensial parsial yang diturunkan dari persamaan Navier-Stokes. Persamaan ini dapat digunakan sebagai persamaan pembangun untuk aliran permukaan, aliran sungai, pantai, maupun saluran air. Karakteristik umum persamaan air dangkal adalah dimensi vertikalnya jauh lebih kecil dibandingkan dengan panjang skala horizontalnya. Persamaan ini terdiri dari persamaan kekekalan massa dan persamaan kekekalan momentum.

### 2.2.1 Persamaan Kekekalan Massa (Kontinuitas)

Bentuk turunan dari kekekalan massa yang dikenal sebagai persamaan kontinuitas, dalam bentuk vektor dituliskan sebagai (Hoffmann & Chiang, 2000):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2.1)$$

dengan  $\rho$  adalah kepadatan,  $t$  waktu dan notasi  $\vec{V}$  melambangkan vektor kecepatan, yaitu  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ . Untuk keadaan tunak (*steady state*), bagian waktu akan hilang atau  $\partial/\partial t \equiv 0$ , sehingga Persamaan (2.1) menjadi:

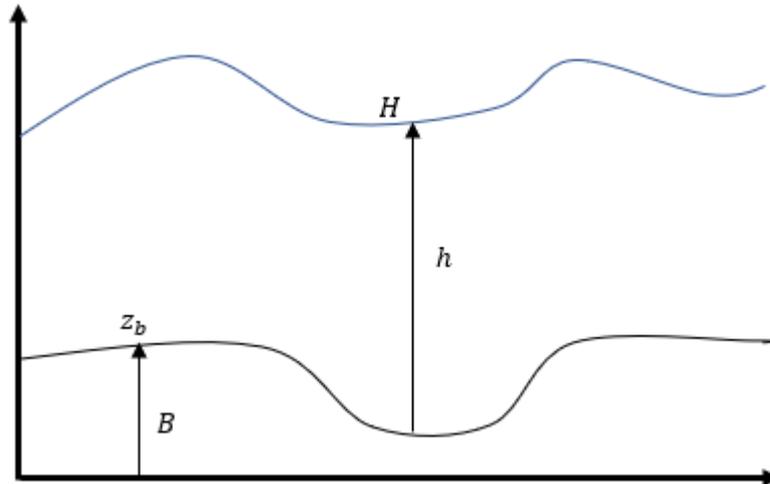
$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2.2)$$

Untuk memperoleh persamaan air dangkal, fluida dianggap aliran nirmampat (*incompressible*), dimana aliran variasi kepadatan diabaikan sehingga persamaan kontinuitas direduksi menjadi (Kowalik & Murty, 1993):

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0,$$

atau dituliskan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$



**Gambar 2.1.** Sketsa untuk menurunkan persamaan air dangkal

Dengan mengintegalkankan Persamaan (2.3) dari permukaan dasar  $z_b$  hingga permukaan atas  $H$  seperti yang terlihat pada Gambar 2.1, diperoleh:

$$\int_{z_b}^H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\int_{z_b}^H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + w_H - w_{z_b} = 0. \quad (2.4)$$

Dengan mengasumsikan kondisi “no-slip” terjadi pada permukaan dasar, dengan:

$$u_{z_b} = v_{z_b} = w_{z_b} = 0, \quad (2.5)$$

maka Persamaan (2.4) menjadi:

$$\int_{z_b}^H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + w_H = 0. \quad (2.6)$$

Aturan integrasi Leibniz didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b f(x, z) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z} dx + \left[ f \frac{\partial b}{\partial z} \right]_{x=b} - \left[ f \frac{\partial a}{\partial z} \right]_{x=a}. \quad (2.7)$$

Dengan menggunakan aturan integrasi Leibniz, diperoleh

$$\int_{z_b}^H \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H u dz - u|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial x} + u|_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x}$$

dan

$$\int_{z_b}^H \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H v dz - v|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial y} + v|_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y}.$$

Dari asumsi Persamaan (2.5), Persamaan (2.6) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H v dz - u|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial x} - v|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial y} + w_H = 0. \quad (2.8)$$

Teorema nilai rata-rata didefinisikan dengan:

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{(H - z_b)} \int_{z_b}^H u dz. \quad (2.9)$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.9) pada Persamaan (2.8), serta dari Gambar (2.1) diketahui bahwa nilai  $H - z_b = h$ , maka:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}h - u|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial x} - v|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial y} + w_H = 0. \quad (2.10)$$

Pada permukaan atas, kondisi kinematik berlaku bahwa partikel air tidak dapat melewati batas, sehingga kecepatan normal relatif harus dihilangkan:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_H \frac{\partial H}{\partial x} + v_H \frac{\partial H}{\partial y} = w_H. \quad (2.11)$$

Dari Persamaan (2.11), Persamaan (2.10) menjadi persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial}{\partial t} (h) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}h = 0. \quad (2.12)$$

## 2.2.2 Persaman Kekekalan Momentum

Persamaan momentum diperoleh dari aplikasi hukum kedua Newton menjadi elemen turunan dalam koordinat inersial. Jika  $\sigma$  digunakan untuk menggambarkan tegangan yang bekerja pada elemen turunan, komponen persamaan momentum Navier-Stokes dalam koordinat kartesius dituliskan dalam bentuk (Hoffmann & Chiang, 2000):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= f v + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xz}) \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -f u + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{yz}) \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}) \right).$$

Parameter koriolis  $f = 2\Omega \sin \phi$  adalah fungsi dari kecepatan angular bumi. Tegangan  $\sigma$  biasanya dituliskan dalam bentuk tekanan  $p$  dan tegangan geser  $\tau$ . Dalam notasi tensor dapat dituliskan sebagai:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (2.14)$$

dengan  $\delta_{ij}$  adalah delta Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{untuk } i = j \\ 0 & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.14) dan mengabaikan efek koriolis bumi, Persamaan (2.13) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (2.15b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right). \quad (2.15c)$$

Persamaan (2.3) dikalikan masing-masing dengan  $u$  dan  $v$  diperoleh:

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
 v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Kemudian Persamaan (2.16) masing-masing dijumlahkan dengan Persamaan (2.15a) dan Persamaan (2.15b),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Integralkan Persamaan (2.17) dari permukaan dasar  $z_b$  hingga permukaan atas  $H$ , diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \int_{z_b}^H \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right] dz + u_H w_H - u_{z_b} w_{z_b} &= \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz \\
 \int_{z_b}^H \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right] dz + v_H w_H - v_{z_b} w_{z_b} &= \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz.
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Dari Persamaan syarat batas (2.5), Persamaan (2.18) tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned}
 \int_{z_b}^H \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right] dz + u_H w_H &= \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz \\
 \int_{z_b}^H \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right] dz + v_H w_H &= \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz.
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Dengan menggunakan aturan integrasi Leibniz (2.7) pada bagian kiri Persamaan (2.19) serta mengaplikasikan syarat batas (2.5), diperoleh masing-masing:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H uv \, dz + u_H \left( -\frac{\partial H}{\partial t} - u_H \frac{\partial H}{\partial x} - v_H \frac{\partial H}{\partial y} + \right. \\
 \left. w_H \right) = \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H v \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H uv \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H v^2 \, dz + v_H \left( -\frac{\partial H}{\partial t} - u_H \frac{\partial H}{\partial x} - v_H \frac{\partial H}{\partial y} + \right. \\
 \left. w_H \right) = \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dengan menerapkan Persamaan syarat batas atas (2.11), Persamaan (2.20) tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H uv \, dz = \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H v \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H uv \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H v^2 \, dz = \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dari teorema nilai rata-rata (2.9), bagian kiri Persamaan (2.21) menjadi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial y} = \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz \\
 \frac{\partial \bar{v}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2h}{\partial y} = \int_{z_b}^H \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Penaksiran hidrostatis hanya berhubungan dengan komponen vertikal dari Persamaan momentum (2.15 c). Oleh karena skala horizontal jauh lebih panjang dibandingkan dengan skala vertikalnya, kecepatan vertikal jauh lebih lemah dibandingkan kecepatan horizontal. Jika aliran horizontal lebih dominan, dan percepatan vertikal lebih kecil dibandingkan percepatan gravitasi, persamaan momentum vertikal dapat direduksi ke hukum hidrostatis sederhana. Asumsi hidrostatis menyederhanakan Persamaan (2.15 c) menjadi (Kowalik & Murty, 1993):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0. \tag{2.23}$$

Dengan mengintegrasikan Persamaan (2.23) dari permukaan dasar  $z_b$  hingga permukaan atas  $H$ , diperoleh:

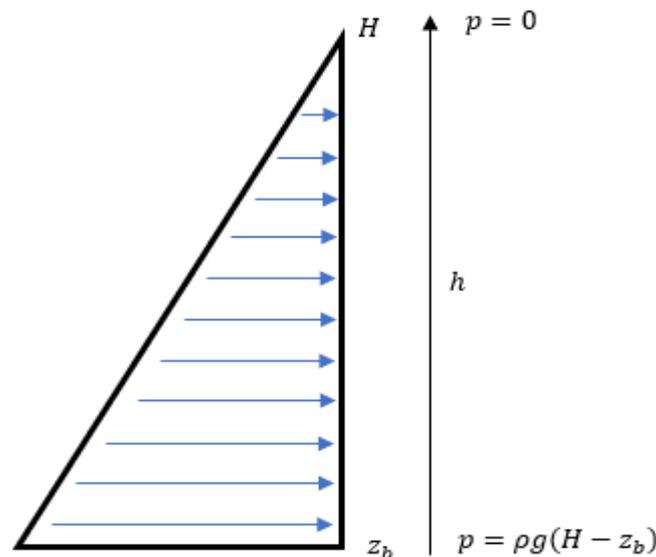
$$\int_{z_b}^H \partial p = - \int_{z_b}^H \rho g \partial z$$

$$p(z) = p_a + \rho g(H - z_b). \quad (2.24)$$

Tekanan permukaan atas  $p(H)$  sama dengan tekanan atmosfer  $p_a$ . Dengan mengabaikan tekanan atmosfer  $p_a$ , Persamaan (2.24) menjadi:

$$p(z) = \rho g(H - z_b). \quad (2.25)$$

Tekanan hidrostatis yang dipengaruhi oleh kepadatan ( $\rho$ ), percepatan gravitasi ( $g$ ), dan kedalaman ( $h$ ). Tekanan hidrostatis tidak bergantung pada skala horizontal, hanya bergantung pada skala vertikal (kedalaman). Oleh karena kepadatan ( $\rho$ ) dan percepatan gravitasi ( $g$ ) bernilai konstan, maka tekanan hidrostatis bersifat linear.



**Gambar 2.2.** Ilustrasi tekanan hidrostatis

Dengan menggunakan integrasi Leibniz pada bentuk tekanan hidrostatis pada Persamaan (2.22), diperoleh:

$$\int_{z_b}^H \frac{\partial p}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H p dz - p_H \frac{\partial H}{\partial x} + p_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x}$$

$$\int_{z_b}^H \frac{\partial p}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H p dz - p_H \frac{\partial H}{\partial y} + p_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (2.26)$$

Pada Gambar (2.2) diperoleh bahwa  $h = H - z_b$ , tekanan hidrostatik pada permukaan atas  $p_H = 0$ , dan tekanan hidrostatik pada permukaan dasar  $p_{z_b} = \rho gh$ , serta  $\int_{z_b}^H p dz$  merupakan luasan segitiga Gambar (2.2), maka Persamaan (2.26) menjadi:

$$\int_{z_b}^H \frac{\partial p}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (\rho gh^2) + \rho gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$\int_{z_b}^H \frac{\partial p}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} (\rho gh^2) + \rho gh \frac{\partial z_b}{\partial y}.$$

Tegangan permukaan atas  $\tau_s$  pada  $z = H$  didefinisikan (Vreugdenhil, 1994):

$$\tau_{sx} = -\tau_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} + \tau_{xz} \quad (2.28)$$

$$\tau_{sy} = -\tau_{xy} \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} + \tau_{yz}.$$

Pada permukaan dasar  $z = z_b$ , tegangan permukaan dasar  $\tau_b$  didefinisikan:

$$\tau_{bx} = -\tau_{xx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \tau_{xz} \quad (2.29)$$

$$\tau_{by} = -\tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \tau_{yz}.$$

Integrasi Leibniz pada bentuk tegangan geser ( $\tau$ ) dari Persamaan (2.22) diperoleh:

$$\int_{z_b}^H \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H \tau_{xy} dz + \tau_{xz} \Big|_H - \tau_{xz} \Big|_{z_b} - \tau_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.30)$$

$$\int_{z_b}^H \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H \tau_{xy} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H \tau_{yy} dz + \tau_{yz} \Big|_H - \tau_{yz} \Big|_{z_b} - \tau_{xy} \frac{\partial H}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} + \tau_{yy} \frac{\partial z_b}{\partial y}.$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.28) dan Persamaan (2.29), Persamaan (2.30) menjadi:

$$\int_{z_b}^H \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H \tau_{xy} dz + \tau_{sx} - \tau_{bx} \quad (2.31)$$

$$\int_{z_b}^H \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H \tau_{xy} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H \tau_{yy} dz + \tau_{sy} - \tau_{by}.$$

Dengan mengabaikan bentuk integral  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ , dan  $\tau_{yy}$ , serta mengasumsikan tidak ada gesekan pada permukaan atas sehingga  $\tau_{sx}$  dan  $\tau_{sy}$  diabaikan, sehingga diperoleh:

$$\int_{z_b}^H \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz = -\tau_{bx} \quad (2.32)$$

$$\int_{z_b}^H \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz = -\tau_{by}.$$

Substitusi Persamaan (2.27) dan Persamaan (2.32) ke dalam Persamaan (2.22), diperoleh persamaan momentum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{gh^2}{2} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \\ \frac{\partial \bar{v}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2 h}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{gh^2}{2} - gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Persamaan momentum (2.33) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) &= -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \left( hv^2 + \frac{gh^2}{2} \right) &= -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

### 2.3 PERSAMAAN EXNER

Transpor sedimen dideskripsikan dalam bentuk model persamaan kontinuitas atau persamaan Exner, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (z_b) + \frac{\partial}{\partial x} (q_{b,x}) + \frac{\partial}{\partial y} (q_{b,y}) = 0, \quad (2.35)$$

dengan  $q_{b,x}$  dan  $q_{b,y}$  merupakan laju volume permukaan dasar sepanjang  $(x, y)$ . Untuk lapisan permukaan dasar yang tersusun dari  $N$  lapisan kelas

sedimen berbeda,  $q_b$  dapat diperkirakan dengan (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021):

$$q_b = \frac{1}{1 - \varepsilon} \sum_{p=1}^N F_{b,p} G_p |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}, \quad (2.36)$$

dengan  $\varepsilon$  merupakan porositas dari permukaan dasar yang nilainya antara 0 dan 1.  $F$  bagian permukaan dasar dari kelas sedimen ke- $p$ , dimana disini dianggap konstan dalam waktu dan ruang dengan  $\sum_{p=1}^N F_{b,p} = 1$ , sementara  $G_p$  faktor Grass untuk menghitung interaksi antara aliran dan sedimen ke- $p$  dalam lapisan permukaan dasar.

Oleh karena itu, laju permukaan dasar dapat diekspresikan sebagai (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021):

$$q_{b,x} = \frac{1}{1 - \varepsilon} G |\mathbf{u}|^2 u$$

$$q_{b,y} = \frac{1}{1 - \varepsilon} G |\mathbf{u}|^2 v, \quad (2.37)$$

dengan  $G = \sum_{p=1}^N F_{b,p} G_p$ . Nilai  $G$  biasanya diperoleh dari data eksperimen dan dihitung berdasarkan diameter bulir sedimen. Nilai koefisien  $G$  berkisar antara 0 dan 1. Ketika nilai  $G$  menuju 0, itu menunjukkan bahwa terjadi interaksi yang lemah antara aliran dan sedimen. Sebaliknya, jika nilai  $G$  menuju 1, maka interaksi antara aliran dan sedimen sifatnya kuat (Castro Diaz, Fernandez-Nieto, & Ferreiro, 2008).

Tabel 1.1. Faktor interaksi Grass  $G_p$  untuk formula laju transpor sedimen (Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro, 2021)

formula	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\theta_c$
Meyer-Peter & Muller (MPM) (Meyer-Peter & Muller, 1948)	$\frac{n_p^3 \sqrt{g}}{(s-1)\sqrt{h}}$	$\frac{8\sqrt{\Delta\theta_p}}{\theta_p^{3/2}}$	$\frac{sk_d \eta_p}{k_c d_p}$	0,047
Wu (Wu, 2007)	$\frac{(n_p^3 n)^{3/4} \sqrt{g}}{(s-1)\sqrt{h}}$	$\frac{0,0053\sqrt{\Delta\theta_p}}{\theta_c^{2,2} \theta_p^{3/2}}$	$\frac{sk_d \eta_p}{k_c d_p}$	0,030

Faktor  $G_p$  dihitung menggunakan model yang diusulkan oleh Martinez-Aranda, Murillo, & Garcia-Navarro (2021). Oleh karena  $G_p$  tidak seragam dalam ruang dan dapat diekspresikan dalam sebuah fungsi dari kedalaman  $h$ , perisai tegangan tak berdimensi  $\theta_p$ , ketebalan lapisan transpor  $\eta_p$  sedimen kelas ke- $p$ :

$$G_p = \Gamma_1(h)\Gamma_2(\theta_p)\Gamma_3(\eta_p). \quad (2.38)$$

Ekpresi dari fungsi  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ , dan  $\Gamma_3$  dapat dilihat pada Tabel 1.1.

Pada Tabel 1.1,  $d_p$  merupakan diameter bulir untuk sedimen kelas ke- $p$ ,  $s = \rho_p/\rho_w$  adalah rasio antara  $\rho_p$  kepadatan bulir sedimen dan  $\rho_w$  kepadatan fluida (air).  $n_p$  merupakan koefisien kekasaran manning yang dihitung dengan  $n_p = d_p^{1/6}/21,1$ ,  $k_d$  dan  $k_c$  adalah konstanta perubahan deposisi dan erosi.  $\theta_c$  adalah ambang batas perisai tegangan, dan  $\Delta\theta_p$  merupakan selisih perisai tegangan untuk sedimen kelas ke- $p$ , yang dihitung dengan:

$$\Delta\theta_p = \begin{cases} \theta_p - \theta_c & \text{jika } \theta_p > \theta_c \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}. \quad (2.39)$$

Disini  $\theta_p$  dihitung dengan menggunakan keseimbangan antara kekuatan tegangan turbulen oleh aliran pada bulir sedimen di atas permukaan dasar dan kekuatan gravitasi:

$$\theta_p = \frac{n_p^2 |\mathbf{u}|^2}{(s-1)d_p h^{1/3}}. \quad (2.40)$$

Ketebalan lapisan transpor  $\eta_p$  untuk sedimen kelas ke- $p$  diperkirakan dengan:

$$\eta_p = \frac{k_e}{s k_d} \Delta\theta_p d_p. \quad (2.41)$$

## 2.4 METODE MACCORMACK

Metode MacCormack pertama kali diperkenalkan pada tahun 1969 untuk menyelesaikan masalah dinamika fluida. Metode ini merupakan

pendekatan beda hingga dua langkah berupa prediktor dan korektor. Step korektor menggunakan pendekatan beda maju, sedangkan step prediktor menggunakan pendekatan beda mundur (MacCormack, 1969). Sama halnya dengan metode Lax-Wendroff, metode MacCormack merupakan metode beda hingga eksplisit dengan akurasi orde kedua dalam ruang dan waktu. Metode beda hingga eksplisit ini menjadi sangat populer dalam menyelesaikan masalah aliran fluida. Selain itu, hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode ini sangat memuaskan untuk beberapa aliran fluida (Hoffmann & Chiang, 2000; Said, Ribal, & Mahie, 2017).

Sebagai ilustrasi, metode MacCormack dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear adveksi satu dimensi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.42)$$

dengan  $\alpha$  merupakan kecepatan konstan dan  $\alpha > 0$ . Ekspansi deret Taylor dalam waktu diperoleh:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t \Delta t + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^t \frac{\Delta t^2}{2}. \quad (2.43)$$

Metode MacCormack diperoleh dari:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{avg} \Delta t, \quad (2.44)$$

dengan  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{avg}$  menggambarkan nilai rata-rata dari  $\frac{\partial u}{\partial t}$  antara waktu  $t$  dan  $t + \Delta t$ . Pada Persamaan (2.43), turunan waktu pada waktu  $t$ , dan memuat turunan kedua  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^t$  untuk memperoleh akurasi orde kedua. Berbeda dengan Persamaan (2.44), nilai  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{avg}$  dihitung untuk memperoleh akurasi orde kedua tanpa memerlukan nilai dari turunan kedua waktu  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^t$ . Rata-rata turunan waktu  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{avg}$  diperoleh dari filosofi prediktor dan korektor sebagai berikut:

- Step prediktor

Pada Persamaan (2.42), turunan terhadap ruang ( $x$ ) diganti dengan menggunakan beda maju, diperoleh:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t = -\alpha \frac{u_{i+1}^t - u_i^t}{\Delta x}. \quad (2.45)$$

Untuk memperoleh nilai prediksi  $\bar{u}_i^{t+\Delta t}$ , dari dua bentuk awal deret Taylor Persamaan (2.43) diperoleh:

$$\bar{u}_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t \Delta t. \quad (2.46)$$

Substitusi Persamaan (2.45) ke Persamaan (2.46) sehingga diperoleh:

$$\bar{u}_i^{t+\Delta t} = u_i^t - \alpha \frac{u_{i+1}^t - u_i^t}{\Delta x} \Delta t. \quad (2.47)$$

- Step korektor

Untuk memperoleh nilai korektor, nilai dari step korektor disubstitusi ke sisi sebelah kanan Persamaan (2.42) menggunakan pendekatan beda mundur sehingga diperoleh:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_i^{t+\Delta t} = -\alpha \frac{\bar{u}_i^{t+\Delta t} - \bar{u}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}. \quad (2.48)$$

Nilai rata-rata Persamaan (2.44) diperoleh dari rata-rata Persamaan (2.45) dan Persamaan (2.48) sehingga diperoleh:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{avg} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_i^{t+\Delta t} \right]. \quad (2.49)$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (2.49) ke Persamaan (2.44), diperoleh:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t \Delta t + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_i^{t+\Delta t} \Delta t \right]. \quad (2.50)$$

Dari Persamaan (2.46), dimana diperoleh nilai dari  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$ , sehingga Persamaan (2.50) menjadi:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \frac{1}{2} \left[ u_i^t + \bar{u}_i^{t+\Delta t} + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{t+\Delta t} \Delta t \right]. \quad (2.51)$$

Dengan substitusi Persamaan (2.48) ke Persamaan (2.51), diperoleh:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \frac{1}{2} \left[ u_i^t + \bar{u}_i^{t+\Delta t} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} (\bar{u}_i^{t+\Delta t} - \bar{u}_{i-1}^{t+\Delta t}) \right]. \quad (2.52)$$

Jadi, skema beda hingga metode MacCormack untuk Persamaan (2.42) adalah sebagai berikut:

Step Prediktor

$$\bar{u}_i^{t+\Delta t} = u_i^t - \alpha \frac{u_{i+1}^t - u_i^t}{\Delta x}. \quad (2.53)$$

Step Korektor

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \frac{1}{2} \left[ u_i^t + \bar{u}_i^{t+\Delta t} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} (\bar{u}_i^{t+\Delta t} - \bar{u}_{i-1}^{t+\Delta t}) \right]. \quad (2.54)$$

## 2.5 LINEAR DAMPING

Metode MacCormack dapat diaplikasikan pada masalah bendungan runtuh 1 dimensi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h) + \frac{\partial}{\partial x}(hu) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

dengan syarat awal

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1,5 \\ 0,5 & x \text{ lainnya} \end{cases} \quad \text{dan} \quad u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 4$$

Diskritisasi Persamaan (2.51) ke dalam metode MacCormack diperoleh:

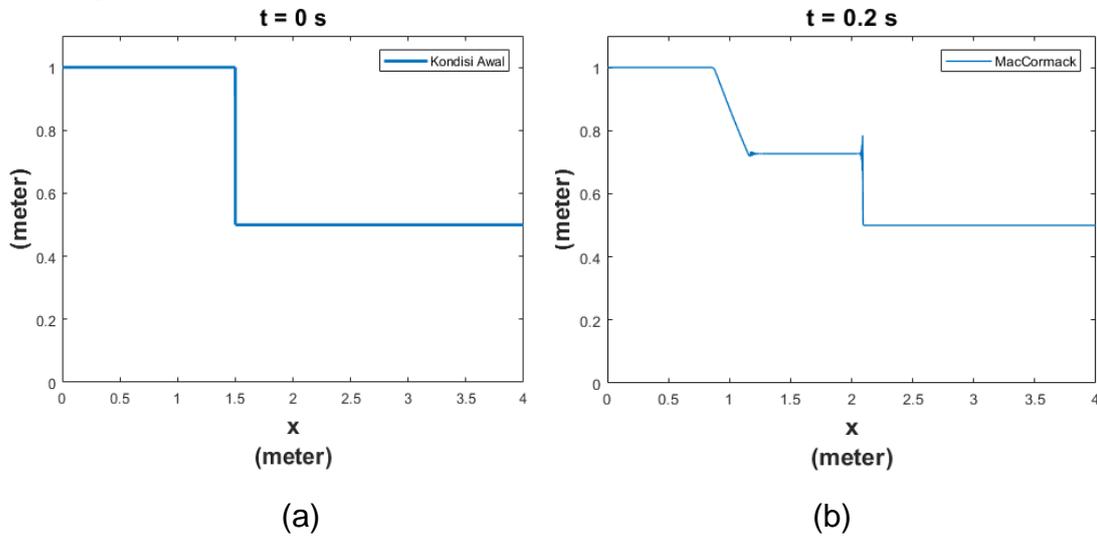
Step prediktor:

$$\begin{aligned} h_i^* &= h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i+1}^n - q_i^n) \\ q_i^* &= q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_{i+1}^n - \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_i^n \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Step korektor:

$$\begin{aligned}
 h_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ h_i^n + h_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_i^* - q_{i-1}^*) \right] \\
 q_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left( q_i^n + q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_i^* - \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_{i-1}^* \right] \right),
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

dengan  $q = hu$ .



**Gambar 2.3.** (a) Kondisi awal  $h$  masalah bendungan runtuh, (b) solusi  $h$  masalah bendungan runtuh untuk  $t = 0,2$  s.

Pada Gambar (2.3b), solusi yang diperoleh terdapat dispersi numerik yang ditandai dengan adanya osilasi pada solusi. Osilasi yang muncul ini membuat solusi yang diperoleh menjadi kurang akurat. Cara sederhana untuk mengurangi osilasi pada solusi adalah dengan menambahkan bentuk *damping* orde dua (Hoffmann & Chiang, 2000). Bentuk *damping* ini berupa  $\alpha h_{xx}$  dan  $\beta q_{xx}$  ditambahkan masing-masing pada persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Bentuk ini didiskritisasi beda tengah, sehingga diperoleh (Magdalena & Pebriansyah, 2022):

$$\begin{aligned}
 &\frac{\alpha}{\Delta x^2} [h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n] \\
 &\frac{\beta}{\Delta x^2} [q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n],
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

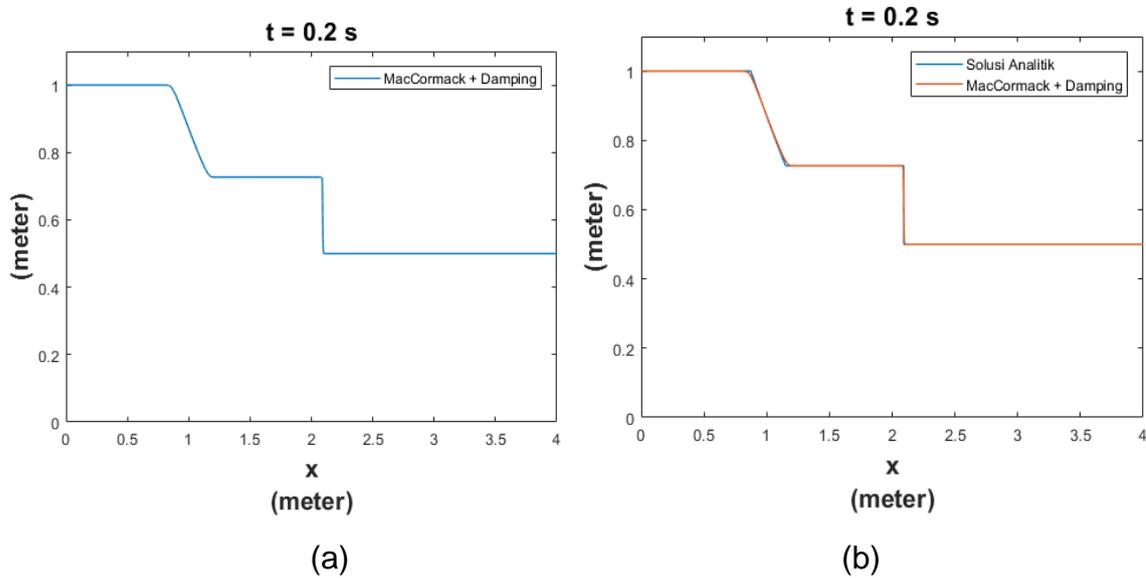
dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah konstanta *damping* dan  $\alpha, \beta > 0$ .

Dengan memperhatikan diskritisasi waktu, bentuk *damping* menjadi:

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} [h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n] \quad (2.59)$$

$$\frac{\beta \Delta t}{\Delta x^2} [q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n].$$

Nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  bisa saja berubah tergantung dengan kondisi masalah yang dimiliki.



**Gambar 2.4.** (a) Solusi metode MacCormack untuk  $t = 0,2s$ . (b)

Perbandingan solusi analitik dengan solusi MacCormack untuk  $t = 0,2 s$ .

Bentuk diskritisasi step korektor metode MacCormack dengan tambahan bentuk damping sebagai berikut:

$$h_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ h_i^n + h_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_i^* - q_{i-1}^*) \right] + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} [h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n]$$

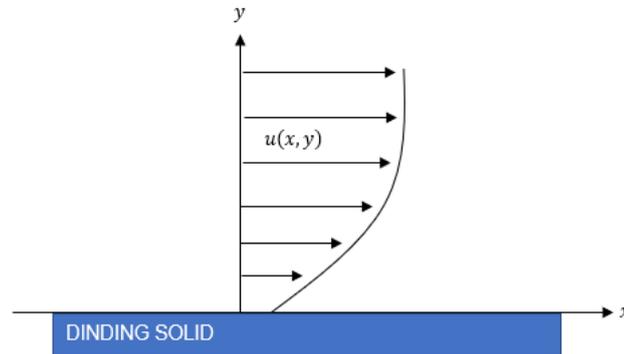
$$q_i^* = \frac{1}{2} \left( q_i^n + q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_i^* - \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_{i-1}^* \right] \right) + \frac{\beta \Delta t}{\Delta x^2} [q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n]. \quad (2.60)$$

Dari Gambar (2.4) dapat dilihat bahwa osilasi yang diperoleh pada simulasi sebelumnya dapat diredam dengan adanya bentuk damping, sehingga solusi yang diperoleh menjadi lebih akurat.

## 2.6 SYARAT BATAS

Syarat batas yang digunakan pada dinding solid pada domain eksperimen adalah syarat batas *free-slip* (*Navier slip boundary condition*).

Pada syarat batas *free-slip*, kecepatan normal pada dinding solid bernilai nol, sedangkan kecepatan tangensialnya bernilai  $> 0$ .



**Gambar 2.5.** Kondisi batas *free-slip*.

Tegangan geser  $\sigma$  pada dinding mempengaruhi kecepatan tangensial (pada Gambar (2.5) kecepatan tangensial dituliskan dengan  $u(x, y)$ ) dimana (de Gennes, 2002):

$$\sigma = ku, \quad (2.61)$$

dengan  $k$  merupakan koefisien gesekan pada permukaan dinding.

Persamaan tegangan geser terhadap viskositas ( $\mu$ ) adalah sebagai berikut:

$$\sigma = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (2.62)$$

Karena nilai  $v = 0$  pada dinding, maka  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , sehingga

$$ku = \sigma = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (2.63)$$

Dengan mengabaikan nilai viskositas air ( $\mu$ ) (viskositas air sama dengan  $10^{-3}$  Pascal second), maka

$$ku = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.64)$$

Dengan mengasumsikan nilai  $k = 0$  (tidak ada gesekan pada permukaan dinding), sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.65)$$