

# TESIS

## **PENERAPAN KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19 STRATEGI PEMBATASAN SOSIAL BERSKALA BESAR DAN EFEK TERAPI**

*Optimal Control of Mathematical Model for The Spread of COVID-19  
with Social Distancing and Therapy Effect Strategies*

**DWI MELDYA LESTARI**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2022**

**TESIS**

***Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat***

***Memperoleh Gelar Magister Sains***

***Pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika***

***Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam***

***Universitas Hasanuddin***

**DWI MELDYA LESTARI  
H022201006**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2022**

# LEMBAR PENGESAHAN

## LEMBAR PENGESAHAN

### PENERAPAN KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19 STRATEGI PEMBATASAN SOSIAL BERSKALA BESAR DAN EFEK TERAPI

Disusun dan diajukan oleh

**DWI MELDYA LESTARI**  
**H022201006**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 13 September 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pendamping,



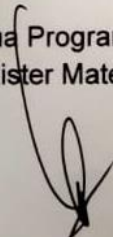
**Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.**  
**NIP. 19680114 199412 1 001**



**Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si**  
**NIP. 19800904 200312 2 001**

Ketua Program Studi  
Magister Matematika,

Dekan Fakultas MIPA  
Universitas Hasanuddin,



**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**  
**NIP. 19640207 199103 1 013**



**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**  
**NIP. 19720515 199702 1 002**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Dwi Meldya Lestari  
Nim : H022201006  
Program Studi : Matematika  
Jenjang : S2

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya yang berjudul

### **Penerapan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit COVID-19 Strategi Pembatasan Social Berskala Besar Dan Efek Terapi**

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilalihan tulisan orang lain. Tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 20 September 2022



Dwi Meldya Lestari

## KATA PENGANTAR

### ***Assalamu'alakum Warahmatullahi Wabarakatuh***

Segala puji bagi Allah SWT atas limpahan nikmat, rahmat dan hidayah yang tak pernah putus saya haturkan sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penyusunan tesis ini sebagai salah satu syarat untuk mennggapai gelar Magister pada program Pascasarjana Universitas Hasanuddin. Penulis menyadari bahwa banyak hambatan dan tantang yang penulis hadapi tapi karena pertolongan Allah SWT dan dukungan dari berbagai pihak secara langsung maupun tidak langsung semuanya dapat terselesaikan.

Dengan penuh rasa rendah hati, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada orang tua Natsir H. dan Nurhayati S. yang telah dan akan menjadi motivasi disepanjang jalan penulis. Terima kasih atas doa dan kasih sayang yang tak pernah putus, serta bantuan dan dukungan yang tidak akan berujung.

Iringan doa dan ucapan terimakasih yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Syammsuddin Toaha, M.Sc. selaku pembimbing utama yang telah meluangkan waktu, ilmu, dan pikiran untuk senantiasa memberikan bimbingan, arahan, serta saran dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua yang telah meluangkan waktu, tenaga, pikiran, ilmu, serta saran dan arahan selama bimbingan dalam menyelesaikan tesis ini.
3. Prof. Budi Nurwahyu, MS., Dr. Khaeruddin, M.Sc., dan Dr. Firman, M.Si., selaku penguji yang telah banyak memberikan saran dan ilmu dalam penyempurnaan tesis ini.
4. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
5. Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin Dr. Eng. Amiruddin, M.Si, seluruh dosen, dan staf administrasi pada Program Studi S2 Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.

6. Teman terdekat penulis Abeliah dan Ayu yang selalu memberikan dukungan kepada penulis dalam menyusun tesis ini.
  7. Teman -teman Pascasarjana Angkatan 2020 atas bantuan dan semangatnya kepada penulis.
  8. Teman-teman pascasarjana, Caca, Inna, Ika, Dhani, Musdalifa, Aulia, Uni, Arni, Amira, Putri, Aidah atas dukungan dan semangatnya kepada penulis.
- serta orang-orang yang telah berjasa kepada penulis yang tidak dapat dituliskan oleh penulis. Penulis berharap semoga segala bentuk bantuan yang diberikan mendapatkan balasan dari Allah SWT sebagai amal jariyah dan pahala yang berlipat ganda di sisi-Nya.

***Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.***

Makassar, 20 September 2022

Dwi Meldya Lestari

## ABSTRAK

**Dwi Meldya Lestari.** Penerapan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran COVID-19 Dengan Strategi PSBB Dan Efek Terapi (dibimbing oleh Syamsuddin Toaha dan Kasbawati).

Artikel ini menyajikan model penyebaran penyakit COVID-19 dengan kontrol optimal yang bertujuan untuk mengamati dinamika penyebaran COVID-19 dengan strategi pembatasan sosial berskala besar dan efek pemberian terapi. Kami menggunakan dua fungsi kontrol yang bergantung pada waktu yaitu fungsi kontrol  $u_1$  untuk meminimumkan populasi susceptible berpindah ke populasi carrier dan fungsi kontrol  $u_2$  untuk memaksimalkan populasi severe symptom untuk berpindah ke populasi recover. Simulasi numerik pada masalah kontrol optimal menggunakan metode forward-backward sweep dengan Runge Kutta Orde-4. Hasil simulasi yang diperoleh merupakan strategi terbaik untuk mengendalikan penyakit COVID-19.

**Kata kunci:** COVID-19, PSBB, Terapi, Kontrol Optimal

## ABSTRACT

**Dwi Meldya Lestari.** Optimal Control Mathematical Model for The Spread of COVID-19 with Large Scale of Social Distancing and Therapy Effect Strategies (mentored by Syamsuddin Toaha and Kasbawati).

This article presents the mathematical modeling of covid-19 spread with optimal control that aims to observe the dynamics with social distancing and therapeutic effect. We use two control functions, namely  $u_1$  to minimize the susceptibility to move to the carrier population and  $u_2$  to maximize the severe symptom to move to the recovery population. Numerical solution using the forward-backward sweep method with Runge Kutta 4th order, numerical simulation on the optimal control problem. The simulation results obtained are the best strategy to control COVID-19 disease.

**Keywords:** optimal control; covid-19; large scale of social distancing; therapy.



## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN .....	ii
PERNYATAAN KEASLIAN .....	iii
KATA PENGANTAR .....	iv
ABSTRAK.....	vi
ABSTRACT .....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR SIMBOL.....	xii
DAFTAR LAMPIRAN .....	xiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian .....	3
1.4 Manfaat Penelitian .....	3
1.5 Batasan Masalah .....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 COVID-19 dan Pola Penyebarannya .....	5
2.2 Bentuk Penanganan Individu Terinfeksi COVID-19 .....	6
2.3 Sistem Persamaan Diferensial.....	7
2.4 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan .....	8
2.5 Kriteria Kestabilan Routh – Hurwitz .....	9
2.6 Teori Kontrol Optimal.....	10
2.7 Prinsip Minimum Pontryagin .....	11
2.8 Metode Forward-Backward Sweep.....	14
2.9 Model Penyebaran Penyakit COVID-19.....	15
BAB III METODE PENELITIAN.....	17
1.1 Identifikasi Masalah .....	17
1.2 Studi Literatur .....	17
1.3 Formulasi Model .....	17
1.4 Analisis Kestabilan .....	17
1.5 Formulasi Model Kontrol Optimal.....	18
1.6 Prinsip Minimum Pontryagin .....	18
1.7 Simulasi Numerik.....	18
1.8 Penarikan Kesimpulan.....	18
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....	19

4.1	Model Matematika .....	19
4.2	Analisis Model .....	25
4.2.1	Titik Keseimbangan Model .....	25
4.2.2	Linearisasi dan Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan .....	28
4.2.3	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Non Endemik .....	29
4.2.4	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik .....	30
4.3	Formulasi Model Kontrol Optimal.....	34
4.7	Simulasi Numerik.....	40
BAB V PENUTUP .....		48
DAFTAR PUSTAKA.....		50

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel</b>		<b>Halaman</b>
Tabel 2.1	Jenis Kestabilan dari Sistem Linear $J(x^*)$	9
Tabel 4.1	Variabel Pada Model COVID-19	25
Tabel 4.2	Parameter Model COVID-19	25
Tabel 4.3	Nilai Parameter	43

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar</b>		<b>Halaman</b>
Gambar 2.1	Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran COVID-19	16
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Dinamika Penyebaran COVID-19	22
Gambar 4.2	Grafik Perubahan Populasi Susceptible dan Carrier Pada Titik Kesetimbangan Non endemik	31
Gambar 4.3	Grafik Perubahan Populasi Mild Symptom, Severe Symptom, Unreported, dan Recover Pada Titik Kesetimbangan Non endemik	32
Gambar 4.4	Grafik Perubahan Populasi Susceptible dan Carrier Pada Titik Kesetimbangan Endemik	35
Gambar 4.5	Grafik Perubahan Populasi Mild Symptom, Severe Symptom, Unreported, dan Recover Pada Titik Kesetimbangan Non endemik	36
Gambar 4.6	Dinamika Populasi Susceptible dan Carrier	44
Gambar 4.7	Dinamika Populasi Mild dan Severe Symptom	45
Gambar 4.8	Dinamika Populasi Unreported dan Recover	46
Gambar 4.9	Grafik Fungsi Kontrol $u_1$ dan $u_2$	47

## DAFTAR SIMBOL

<b>Simbol</b>	<b>Definisi</b>
$\mu$	Rata-rata laju kelahiran dan kematian
$\rho$	Proporsi banyaknya individu Carrier yang memiliki imunitas kurang baik
$\beta$	Rata-rata laju perpindahan kelompok individu rentan menjadi terinfeksi tanpa gejala akibat adanya interaksi dengan individu terinfeksi
$\delta$	Rata-rata laju perpindahan akibat munculnya gejala
$\sigma$	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi tanpa gejala menjadi individu yang sembuh dari penyakit
$q$	Proporsi banyaknya individu terinfeksi menjadi sembuh akibat karantina
$\alpha$	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi dengan gejala dan melaporkannya menjadi individu yang sembuh dari penyakit
$\gamma$	Rata-rata laju perpindahan individu yang sembuh dari penyakit kemudian rentan terinfeksi kembali
$\omega$	Rata-rata laju kematian dikarenakan COVID-19
$\varepsilon$	Rata-rata laju perpindahan individu terinfeksi akibat munculnya gejala berat
$u_1$	Proporsi penerapan PSBB
$u_2$	Proporsi banyaknya individu terinfeksi gagal terapi

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Deskripsi	Halaman
Lampiran 1	Titik Kesetimbangan Endemik	58
Lampiran 2	Sintax Simulasi Titik Kesetimbangan Endemik dan Non Endemik	59
Lampiran 3	Sintaks Simulasi Kontrol Optimal	6



# BAB I PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Desember 2019, dunia digemparkan dengan kehadiran salah satu virus etiologi, yakni *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (SARS-CoV 2) yang dapat menimbulkan penyakit *Coronavirus Disease 2019* (COVID-19) (WHO, 2020). Dikutip dari covid.go.id, sejak 9 Maret 2020, WHO mendeklarasikan SARS-CoV 2 sebagai pandemi. Situasi COVID-19 di Indonesia per tanggal 7 Februari 2022 terdapat 4.542.601 kasus yang terkonfirmasi dan 144.636 meninggal.

Gejala yang ditimbulkan biasanya muncul secara bertahap dan yang paling umum adalah demam, batuk kering, dan rasa lelah. Bentuk penularan virus ini dapat disebabkan melalui percikan dari hidung atau mulut saat orang yang terinfeksi batuk, bersin, atau berbicara. Oleh karena itu, pentingnya mencuci tangan secara teratur, membersihkan dengan cairan antiseptik berbahan dasar alkohol, menggunakan masker, dan menjaga jarak minimal 1-meter dari orang lain dapat menghentikan penularan penyakit COVID-19 (Kemenkes,2020).

Upaya pemerintah untuk menekan penyebaran COVID-19 adalah Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB). Kebijakan ini merupakan upaya untuk mengurangi atau memutuskan rantai penyebaran COVID-19 meskipun memiliki dampak dalam hal penurunan pendapatan masyarakat, turunnya daya beli, mobilitas masyarakat semakin terbatas yang dapat menyulitkan kondisi ekonomi (Nasruddin dan Haq, 2020). Pemerintah Kota Makassar melakukan survei online dengan total responden sebanyak 3.911, tingkat kesadaran responden dalam menerapkan protocol kesehatan sudah cukup baik. Faktor yang menjadi alasan masyarakat melanggar protocol kesehatan adalah Sebagian besar sudah jenuh terhadap pandemi (59,29%) dan tidak nyaman Ketika melaksanakan protocol kesehatan (42,04%) (BPS Sul-Sel, 2022).

Di bidang kesehatan, karantina merupakan salah satu upaya pemerintah dalam mengurangi penularan kontak antar individu yang terinfeksi. Tindakan ini bertujuan untuk membatasi pergerakan orang yang terinfeksi dan memantau kasus dari awal perjalanan penyakit. Dalam beberapa kasus, individu yang dikarantina awalnya hanya mengalami gejala ringan, tetapi dapat berkembang menjadi gejala berat bahkan kritis karena adanya penyakit penyerta dalam tubuh.

Menurut Satyakti (2021), salah satu faktor krusial meningkatnya kasus COVID-19 di Indonesia juga dipengaruhi oleh mobilitas manusia. Masyarakat



Indonesia lebih memilih untuk memperhatikan keadaan ekonomi dari pada mengikuti aturan kesehatan. Berdasarkan laporan pemerintah, kasus COVID-19 yang terkonfirmasi dan tidak dilaporkan sekitar 1,9 – 2 kali. Kurangnya kesadaran dalam menyikapi wabah ini dapat menambah kasus baru.

Tingginya angka kematian COVID-19 tentunya menjadi masalah dan tantangan kesehatan di dunia saat ini. Menurut Kemenkes, salah satu strategi penanggulangan pandemi adalah menyediakan layanan kesehatan yang optimal untuk pasien terutama kasus kritis. Haq dkk. (2021) menjelaskan bahwa beberapa faktor yang paling menentukan tingkat keparahan infeksi COVID-19 adalah usia, penyakit penyerta, defisiensi vitamin D, dan obesitas. Namun faktor tersebut tidaklah berdiri sendiri dalam menentukan tingkat keparahan, tetapi saling terkait dan saling mempengaruhi satu sama lain dengan mekanismenya masing-masing. Kemenkes menyatakan total kasus yang terkonfirmasi positif COVID-19 per tanggal 13 Oktober 2020 sebanyak 1.488 pasien atau sekitar 12% dari total secara keseluruhan. Persentasi terbanyak diantaranya penyakit hipertensi sebesar 13,2%, diabetes mellitus 11,6%, dan penyakit jantung sebesar 7,7%.

Penelitian tentang penyakit COVID-19 telah banyak dilakukan. Nisardi dkk. (2022) mengembangkan model matematika fraksional dengan skema karantina. Dalam penelitian ini, populasi dibagi menjadi empat kompartemen, yaitu individu rentan, individu terinfeksi, individu yang dikarantina, dan individu sembuh. Dari hasil simulasi yang diperoleh, untuk menekan penyebaran penyakit COVID-19 pemerintah tetap menetapkan kebijakan PPKM untuk membatasi interaksi antar individu. Selain itu, dengan penerapan karantina bagi orang yang terinfeksi juga dapat menurunkan jumlah penderita COVID-19. Selain itu, Bani dkk. (2021) mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit COVID-19 dengan membagi populasi terinfeksi tanpa gejala menjadi dua, yaitu populasi yang terinfeksi dan dilaporkan dan populasi yang terinfeksi namun tidak dilaporkan. Dalam penelitian ini diperoleh hasil bahwa untuk menekan penyebaran penyakit, pemerintah harus meningkatkan pemberlakuan PSBB minimal 34,23% wilayah Kota Makassar. Semakin banyak wilayah yang memberlakukan PSBB maka COVID-19 akan semakin cepat hilang.

Berdasarkan beberapa penelitian di atas, yang menjadi rujukan dalam penelitian ini adalah penelitian yang dilakukan Bani dkk. (2021). pengembangan yang dilakukan adalah membagi kompartemen populasi terinfeksi yang dilaporkan menjadi dua kompartemen, yaitu populasi terinfeksi bergejala ringan/ sedang atau

mild symptom dan populasi terinfeksi bergejala berat/kritis atau severe symptom dan akan dituangkan dalam bentuk tesis yang berjudul Penerapan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit COVID-19 dengan Strategi PSBB dan Efek Terapi.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diperoleh rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana bentuk model matematika interaksi antar kompartemen dari hasil simulasi model yang telah dikembangkan?
2. Bagaimana bentuk kontrol optimal dari pengendalian berupa penerapan PSBB dan efek pemberian terapi?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah

1. Mengembangkan model matematika penyebaran COVID-19 dengan mempertimbangkan PSBB, penyembuhan berupa karantina dan efek pemberian terapi.
2. Menentukan strategi kontrol optimal dari model matematika penyebaran penyakit COVID-19 dengan kontrol berupa penerapan PSBB dan efek terapi.
3. Menganalisis perbandingan solusi numerik model matematika penyebaran penyakit COVID-19 tanpa kontrol dan dengan kontrol optimal berdasarkan hasil simulasi yang diperoleh.

## **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Dapat memberikan gambaran secara jelas tentang dinamika penyebaran COVID-19.
2. Hasil penelitian diharapkan dapat membantu berbagai pihak dalam memprediksi dan menentukan strategi dalam penanganan dan pengobatannya.

## **1.5 Batasan Masalah**

Penelitian ini dibatasi oleh beberapa asumsi:

1. Kompartemen pada penelitian ini dibagi menjadi 6 kelas yaitu *Susceptible* (S) atau individu rentan, *Carrier* (C) atau individu tanpa gejala, *Mild Symptom* (P) atau individu terinfeksi dengan gejala ringan dan sedang dan melaporkannya, *Severe Symptom* (V) atau individu terinfeksi dengan gejala berat dan kritis dan melaporkannya, *Unreported Symptom* (U) atau individu terinfeksi dengan gejala dan tidak melaporkannya, serta *Recover* (R) atau individu sembuh dari penyakit COVID-19.
2. Individu yang dapat menularkan COVID-19 yaitu *Carrier* dan *Unreported Symptom*.
3. Data yang digunakan untuk simulasi model adalah data penderita COVID-19 di Kota Makassar. Berdasarkan laporan Media Harian COVID-19 Provinsi Sulawesi Selatan, data yang tercatat per tanggal 6 Juli 2022 pukul 15.00 WITA, terdapat 65.476 individu yang terkonfirmasi positif dan 64.350 individu sembuh di Kota Makassar. Menurut Satyakti (2021), populasi *unreported symptom* merupakan 1,9 – 2 kali kasus yang terkonfirmasi positif di Indonesia. Oleh karena itu, penulis mengasumsikan kondisi awal populasi *unreported symptom* sebanyak 130.952. Sedangkan untuk pasien yang terkonfirmasi positif akan dibagi ke dalam dua kompartemen yaitu *mild symptom* dan *severe symptom*. Total populasi *severe symptom*, dikutip dari m.merdeka.com, 5% dari kasus terkonfirmasi positif mengalami gejala berat/kritis. Hal ini juga didukung oleh Kemenkes RI yang menyatakan bahwa 5% kasus akibat COVID-19 akan mengalami kondisi kritis. Oleh karena itu, penulis mengasumsikan kondisi awal populasi *mild* dan *severe symptom* masing-masing 62.200 dan 3.273.

## **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

### **2.1 COVID-19 dan Pola Penyebarannya**

COVID-19 pertama kali ditemukan di Cina pada akhir Desember 2019 yang disebabkan oleh virus SARS-CoV-2. Di Indonesia, pemerintah mengumumkan kasus pertama dan kedua pada tanggal 6 Maret 2020, dan jumlah pasien positif COVID-19 berjumlah 4.542.601 orang per 7 Februari 1992 (covid.go.id).

Setiap individu rentan terinfeksi penyakit ini dengan bentuk penularan melalui kontak langsung dengan droplet dari orang yang terinfeksi. Gejala paling umum dapat berupa demam, batuk, dan sesak napas. Gejala yang ditimbulkan pada umumnya mirip dengan flu biasa. Oleh sebab itu, diperlukan pengujian lebih lanjut untuk mengetahui orang tersebut menderita penyakit covid. Ada tiga jenis tes pemeriksaan yang dapat dilakukan di Indonesia diantaranya tes cepat molekuler (TCM), *Polymerrase Chain Reaction* (PCR), dan rapid tes (unicef.org). Pada orang dewasa, gejala infeksi muncul ditandai antara lain dengan gejala batuk, nyeri tenggorokan, dan demam. Kasus terberat dari infeksi adalah gangguan akut pada fungsi paru-paru, seperti pneumonia (Yanti dkk., 2020). Menurut Sutaryo (2020), ada tiga kemungkinan akibat dari orang yang kemasukan virus corona, diantaranya tetap hidup sehat agar virus yang dapat dibunuh oleh sistem kekebalan tubuh, tetap atau masih sehat yang berarti bahwa imun tubuh belum cukup kuat untuk membunuh virus sehingga orang tersebut belum ada gejala, dan sakit COVID-19 yang bisa disebabkan oleh daya tahan tubuh yang tidak baik yang dapat disebabkan oleh adanya komorbid.

Gejala yang ditimbulkan oleh orang yang terinfeksi covid-19 dapat dikategorikan menjadi dua, yaitu terinfeksi dengan gejala ringan dan berat. Gejala ringan ditandai dengan gejala pada umumnya dan dapat sembuh dalam waktu kurang lebih 1 minggu. Sedangkan, yang bergejala berat akan mengalami gagal napas progresif karena virus telah masuk merusak alveolar dan akan menyebabkan kematian (Hamid S., 2020). Pasien yang terinfeksi gejala ringan dapat berkembang menjadi terinfeksi berat dan bisa disebabkan oleh faktor usia dan adanya penyakit penyerta dalam tubuh pasien. Faktor tersebut dapat saling terkait satu sama lain dan saling mempengaruhi dengan mekanismenya masing-masing.

## **2.2 Bentuk Penanganan Individu Terinfeksi COVID-19**

Menurut Sudiono (2014), hal yang paling dasar jika manusia terinfeksi virus adalah timbulnya gejala batuk, demam, atau flu. Jika seseorang sembuh dari demam atau flu, hal ini merupakan suatu tanda bahwa sistem imun mampu menghilangkan agen penyerang setelah sembuh dari penyakit sebelumnya. Sebaliknya, jika sistem imun tidak melakukan sesuatu, tubuh tidak akan sembuh dari demam atau apapun juga.

Sejak mewabahnya penyakit COVID-19 di tengah masyarakat hingga saat ini pemerintah telah melakukan beberapa cara untuk mengatasi wabah COVID-19 seperti karantina dan terapi untuk yang terinfeksi berat. Karantina merupakan proses mengurangi risiko penularan dan identifikasi dini COVID-19 melalui upaya memisahkan individu yang sehat dengan yang individu yang terinfeksi akibat COVID-19. Bentuk karantina meliputi karantina rumah, rumah sakit, dan wilayah. Tujuan dilakukan karantina adalah untuk menghentikan atau membatasi pergerakan orang dan barang, mengendalikan dan memutus rantai penularan, dan memulihkan kondisi kesehatan masyarakat seperti semula (Mahmud, 2020). Karantina merupakan langkah utama dalam pelacakan kontak dan akan mulai dilakukan karantina dalam waktu < 72 jam setelah kasus baru dikonfirmasi dan menyelesaikan masa karantina selama 14 hari (Kemenkes, 2020).

Disamping itu, individu yang terinfeksi berat tidak luput dari perhatian otoritas kesehatan. Pemerintah telah melakukan beberapa bentuk pengobatan terapi seperti terapi oksigen, dexamethasone, dan terapi plasma konvalesen (PK). Terapi oksigen dilakukan untuk memulihkan keadaan hipoksemia dengan cara meningkatkan  $FiO_2$ . Terapi ini merupakan langkah pertama untuk mengatasi pasien yang mengalami gejala gagal napas. Akan tetapi, tingkat kegagalan perawatan sangat tinggi sehingga dapat menyebabkan perburukan kondisi oksigenisasi pasien (Ji dkk., 2020). Dexamethasone diberikan pada kasus berat yang mendapat terapi oksigen atau kasus berat dengan ventilator (Pedoman Tata Laksana COVID, 2020). Jika terapi tersebut tidak memberikan respon perbaikan, salah satu terapi yang bisa dipertimbangkan adalah terapi PK. Terapi PK merupakan bentuk imunisasi pasif dimana darah yang kaya antibodi dikumpulkan dari pasien yang pulih dan kemudian diproses untuk ditransfusikan ke pasien lain. Antibodi penetralisasi memblokir masuknya virus ke dalam sel dengan mengikat virus, dan mengatur sistem kekebalan untuk menengahi fagositosis sel imun dan menghilangkan virus (Sun dkk., 2020).

Beberapa penelitian telah menunjukkan efektifitas pemberian terapi PK pada pasien COVID-19. Hegerova dkk. (2020) meneliti 20 pasien yang didiagnosis terdampak COVID-19 menggunakan PCR dari 13 April sampai 26 April 2020. Demografi dasar dan klinis karakteristik dicatat hingga 14 hari setelah terapi PK yang setara dengan durasi rawat inap untuk kontrol. Setelah lebih dari 7 hari pemberian terapi PK, rata-rata terjadi penurunan suhu hingga 0,3° di kelompok terapi PK. Terdapat dua pasien yang dibebaskan dari ventilator, sedangkan 2 pasien membutuhkan intubasi setelah terapi PK. Tidak ada pasien yang meninggal jika menerima terapi PK sebelum 7 hari rawat inap dan tidak ada tambahan kematian pada hari ke-14. Penulis menyimpulkan, penggunaan terapi PK dapat meningkatkan kelangsungan hidup pasien kritis jika diberikan pada awal perjalanan penyakit.

Selain itu, Joyner dkk. (2020) juga telah mengobservasi 20.000 pasien rawat inap yang akan mendapatkan terapi PK pada pasien COVID-19. Hasil studi menunjukkan pada 7 hari pertama setelah mendapatkan terapi PK, sebanyak 2.592 pasien meninggal. Tingkat kematian selama 7 hari yakni 12,96%. Penggunaan terapi PK aman dan tidak membawa risiko komplikasi yang berlebihan. Secara keseluruhan, tingkat kematian menurun dan penggunaan terapi PK.

### 2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial yang memuat turunan yang mengandung satu atau lebih variable bebas. Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear. Misalkan suatu sistem persamaan diferensial biasa dinyatakan sebagai:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (2.1)$$

dengan  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ ,

dan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

merupakan fungsi nonlinear dalam  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Sistem persamaan (2.1) disebut sistem persamaan diferensial biasa nonlinear (Braun, 1983).

## 2.4 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan

Linearisasi sistem di sekitar titik keseimbangan dilakukan untuk menganalisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik keseimbangan.

**Definisi 2.1** (Wiggins, 2003). Diberikan sistem persamaan diferensial  $\dot{x} = f(x)$ .

Titik  $x^* \in \mathbb{R}^n$  disebut titik keseimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$  jika memenuhi  $f(x^*) = 0$ .

Kestabilan titik keseimbangan  $x^*$  dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen  $\lambda$  yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik

$$|J - \lambda I| = 0, \quad (2.2)$$

dengan  $I$  adalah suatu matriks identitas.

Titik keseimbangan diklasifikasikan menjadi dua, yaitu titik keseimbangan non endemik dan endemik. Titik keseimbangan non endemik merupakan keseimbangan saat kompartemen tidak menyebar dalam populasi. Sedangkan titik keseimbangan endemik merupakan keseimbangan saat kompartemen penyakit menyebar dalam populasi.

**Definisi 2.2.** (Hale & Kocak, 1991) Jika  $x^*$  merupakan titik keseimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$  maka persamaan diferensial linear

$$\dot{x} = J(x^*)x, \quad (2.3)$$

disebut persamaan linearisasi pada titik keseimbangan  $x^*$  dimana  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  dan

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$J(x^*)$  disebut matriks Jacobi dari  $f$  di titik  $x^*$ .

Berikut disajikan beberapa jenis sifat kestabilan yang dikategorikan berdasarkan nilai eigen dari persamaan karakteristik (2.3).

**Tabel 2.1** Jenis Kestabilan dari Sistem Linear  $J(x^*)$  Berdasarkan Nilai Eigen

No.	Nilai Eigen Matriks $J(x^*)$	Jenis Kestabilan
1.	$\lambda_i > 0, \exists i = 1, 2, \dots, n$	Tidak Stabil
2.	$\lambda_i < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$	Stabil Asimtotik
3.	$\lambda_i < 0 < \lambda_j, \exists i = 1, 2, \dots, n$ dan $\exists j = 1, 2, \dots, n$	Tidak Stabil
4.	$\lambda_i = \lambda_j > 0, \exists i = 1, 2, \dots, n$ dan $\exists j = 1, 2, \dots, n$	Tidak Stabil
5.	$\lambda_i = \lambda_j < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ dan $\forall j = 1, 2, \dots, n$	Stabil Asimtotik
6.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, \exists i = 1, 2, \dots, n; \exists j = 1, 2, \dots, n; r > 0$	Tidak Stabil
7.	$\lambda_i, \lambda_j = -r \pm ic, \forall i = 1, 2, \dots, n; \forall j = 1, 2, \dots, n; r > 0$	Stabil Asimtotik
8.	$\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic, \forall i = 1, 2, \dots, n$ dan $\forall j = 1, 2, \dots, n$	Stabil

Sumber : Boyce dan Diprima (2012)

## 2.5 Kriteria Kestabilan Routh – Hurwitz

Nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(x^*)$  dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik untuk matriks tersebut dan ditulis sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \dots + A_n = 0. \quad (2.4)$$

Pada umumnya, persamaan (2.4) sulit ditemukan akar-akarnya secara eksplisit karena koefisien dari persamaan karakteristik polinom biasanya bergantung pada banyak parameter. Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen dari matriks Jacobi dapat diketahui jenis kestabilannya. Dalam bentuk umum, matriks Hurwitz yang disimbolkan dengan  $H_k$  dapat disusun dimana entri-entri-nya merupakan koefisien dari polinomial  $P(\lambda)$ . Persamaan (2.4) dibentuk matriks  $H_k$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H_k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i1} & h_{i2} & \dots & h_{im} \end{bmatrix}.$$

Jika setiap entri diisi dengan syarat berikut:

$$h_{im} = \begin{cases} A_{2i-m}, & 0 < 2i - m < n, \\ 1, & 2i = m, \\ 0, & \text{lainnya,} \end{cases} \quad \text{dengan } k = 1, 2, \dots, n.$$

maka diperoleh matriks  $H_k$  yang baru, yaitu



$$H_k = \begin{bmatrix} A_1 & 1 & \cdots & 0 \\ A_3 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2k-1} & A_{2k} - 2 & \cdots & A_k \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks  $H_k$ , titik kesetimbangan  $x^*$  dikatakan stabil jika dan hanya jika

$$R_1 = A_1 > 0,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ A_3 & A_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ A_5 & A_4 & A_3 \end{vmatrix} > 0,$$

⋮

$$R_k = \begin{vmatrix} A_1 & 1 & \cdots & 0 \\ A_3 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2k-1} & A_{2k} - 2 & \cdots & A_k \end{vmatrix} > 0$$

(Lapidus dan Seinfeld, 1971).

## 2.6 Teori Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal adalah mencari nilai kontrol  $u(t)$  yang diproses dalam sistem dinamik untuk memaksimalkan atau meminimalkan fungsi objektif. Misalkan suatu sistem dinamik diberikan oleh persamaan

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (2.5)$$

dengan kondisi awal  $x(t_0) = x(0)$  dan kondisi akhir  $x(t_f) = x(f)$  serta  $u(t)$  yang menyatakan kontrol keadaan pada waktu  $t$ .

Pada umumnya, masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt. \quad (2.6)$$

Dalam penyebaran penyakit menular, fungsi objektif memberikan ukuran kuantitas yang tepat untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi. Kontrol  $u^*(t)$  merupakan kontrol optimal. Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (2.5) akan diperoleh state yang optimal  $x^*(t)$  dan pada saat yang sama juga, mengoptimalkan fungsi tujuan (2.6) dan dinotasikan dengan  $J^*(x^*(t))$ . State optimal  $x^*(t)$  dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal dan kondisi akhir. Bentuk umum  $J(u(t))$  dinamakan bentuk Bolza dengan S adalah bentuk Meyer dan V adalah bentuk Lagrange (Naidu, 2002).

## 2.7 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin merupakan masalah kontrol optimal yang harus diselesaikan, yaitu persamaan stasioner, persamaan state, dan persamaan costate serta kondisi transversitasnya. Prinsip Minimum Pontryagin menyatakan bahwa persamaan Hamiltonian akan di minimumkan sepanjang  $\mathcal{U}$  yang merupakan himpunan kontrol yang mungkin (Naidu, 2002).

Berikut adalah garis besar bagaimana prinsip ini dapat diterapkan untuk memperoleh syarat perlu dari masalah optimasi yang dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut (Lenhart & Workman, 2007):

1. Membentuk fungsi Hamilton yaitu kombinasi fungsi dari  $f(t, x(t), u(t))$  dan perkalian fungsi yang berbentuk persamaan diferensial  $g(t, x(t), u(t))$  dengan suatu faktor pengali Lagrange  $\lambda(t)$ .
2. Mencari solusi fungsi Pontryagin berdasarkan syarat stasioner:

$$\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} = 0,$$

untuk mendapatkan  $u^* = u^*(t, x(t), \lambda(t))$ .

3. Mengamati

$$H(x(t), u^*(t), \lambda(t)) = \min_{u \in U} H(x(t), u(t), \lambda(t)).$$

4. Menyelesaikan persamaan state:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial \lambda},$$

dengan nilai  $x(t_0) = x_0$  dan persamaan costate:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x},$$

dengan kondisi transversalitas  $\lambda(t_f) = 0$ .

5. Mensubstitusikan hasil langkah 4 ke  $u^*$  untuk menentukan kontrol optimal.

### Contoh 2.1 (Lenhart & Workman, 2007)

Misalkan  $y(t) = t + 1$ . Minimumkan

$$\min_u \frac{1}{2} \int_0^1 ((x(t) - y(t))^2 + u(t)^2) dt,$$

terhadap fungsi kendala  $\dot{x} = u(t)$  dengan syarat awal  $x(0) = 1$ . Fungsi Hamilton dari masalah kontrol optimal tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}((x - y)^2 + u^2) + \lambda u \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2 + u^2) + \lambda u. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Syarat stasionernya adalah:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0.$$

sehingga diperoleh

$$u = -\lambda. \quad (2.8)$$

Fungsi Hamilton diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (2.8) ke dalam (2.7) diperoleh:

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy + \lambda^2) + \lambda u \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy) + \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda(-\lambda) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy) + \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda^2 \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2xy - \lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

Persamaan state:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\lambda.$$

Persamaan costate:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = y - x.$$

Untuk  $y = t + 1$ , diperoleh

$$\dot{\lambda} = t + 1 - x$$

sehingga dapat ditulis kembali menjadi

$$\dot{x} = -\lambda.$$

$$\dot{\lambda} = t + 1 - x.$$

Solusi dari  $\dot{x}$  dan  $\dot{\lambda}$  dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Nilai eigen dari persamaan (2.9) diperoleh:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Dari persamaan (2.10) akan diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = -1$ .

Selanjutnya, akan ditentukan vector eigen dari

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Ambil  $\lambda_1 = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

diperoleh:

$$u_1 = u_2.$$

Jika  $u_1 = u_2$ , maka vector eigen dari  $\bar{u}$  adalah

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ambil  $\lambda = -1$ ,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

diperoleh:

$$-u_1 = u_2.$$

Jika  $-u_1 = u_2$ , maka vector eigen dari  $\bar{u}$ , adalah

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh solusi umum,

$$\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} x_p \\ \lambda_p \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Selanjutnya, akan ditentukan solusi khusus dari persamaan (2.11)

$$\begin{pmatrix} x_p \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Persamaan (2.9) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.11)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -B_1 t - B_2 \\ -A_1 t - A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -B_1 t - B_2 \\ (-A_1 + 1)t + (1 - A_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dengan menggunakan kesamaan matriks, diperoleh:

$$A_1 = 1, A_2 = 1, B_1 = 0, B_2 = -1.$$

sehingga, solusi khusus dari persamaan (2.11)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} x_p \\ \lambda_p \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Selanjutnya, substitusi  $x(0) = 1$  ke dalam persamaan (2.13), diperoleh:

$$x(0) = C_1 + C_2 + 1 = 1, \quad (2.14)$$

$$\lambda(1) = C_1 e - C_2 e^{-1} - 1 = 0. \quad (2.15)$$

Jika persamaan (2.14) dan (2.15) dieliminasi, diperoleh  $C_1 = \frac{1}{e+e^{-1}}$  dan  $C_2 =$

$$-\frac{1}{e+e^{-1}}.$$

Jadi, diperoleh  $x^*$  dan  $\lambda^*$  yang optimal,

$$x^* = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t + 1 = \frac{e^t}{e+e^{-1}} - \frac{e^{-t}}{e+e^{-1}} + t + 1.$$

$$\lambda^* = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1 = \frac{e^t}{e+e^{-1}} + \frac{e^{-t}}{e+e^{-1}} - 1.$$

## 2.8 Metode Forward-Backward Sweep

Dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin, masalah optimasi yang berkendala tersebut dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu:

$$\min_{(x, u, \lambda)} H(t, x, u, \lambda) = \min_{(x, u, \lambda)} (f(t, x, u) + \lambda^T(t)g(t, x, u)),$$

dengan syarat keoptimalan:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u), x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \lambda(t_f) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \forall u \in U.$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan berbagai metode optimasi. Salah satunya adalah dengan menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Metode ini merupakan metode iteratif yang akan digunakan untuk mengaproksimasi solusi optimal  $u^*$  menggunakan tebakan awal yang diberikan untuk  $u$  di awal iterasi. Pada metode ini, interval waktu  $[t_0, t_f]$  dibagi menjadi beberapa bagian, yaitu  $t_0 = b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1} = t_f$  dan kontrol  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$ , dimana  $u_i \approx u(b_i)$ . Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk  $x$  dan  $\lambda$  yang bergantung pada  $u$ .

Metode *Forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi  $x(t)$ . Pada metode ini, diberikan kondisi awal dan *step size* yaitu  $h$ . Pendekatannya melalui  $x(t+h)$  dan  $x(t)$ , sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

dengan:

$$k_1 = f(t, x(t)),$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + hk_3\right).$$

Sedangkan metode *Backward Runge Kutta* orde 4 diberikan kondisi akhir dan *step size* yaitu  $h$ . Pendekatannya melalui  $\lambda(t - h)$  dan  $\lambda(t)$  sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$\lambda(t - h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

dengan:

$$k_1 = f(t, \lambda(t)),$$

$$k_2 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t - h, \lambda(t) - hk_3),$$

Sedangkan nilai  $u$  diperbaharui di setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai  $u$  yang lama dengan nilai  $u$  yang baru yaitu:

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2}$$

dengan  $u_{baru}$  diperoleh dari syarat keoptimalan  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ . Bentuk kombinasi konveks lain yang dapat digunakan adalah

$$u = u_{baru}(1 - c^k) + u_{lama}c^k,$$

dengan  $k$  merupakan iterasi yang berjalan dan  $0 < c < 1$ . Pada metode ini, iterasi akan berhenti ketika syarat konvergensinya telah dipenuhi diantaranya ketika nilai  $\|u - u_{lama}\| = \sum_{i=1}^{N+1} |u_i - u_{lama(i)}|$  menjadi sangat kecil, dengan  $u$  merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi yang sedang berjalan dan  $u_{lama}$  merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi sebelumnya. Bentuk uji konvergensi lain dapat pula dituliskan sebagai berikut :

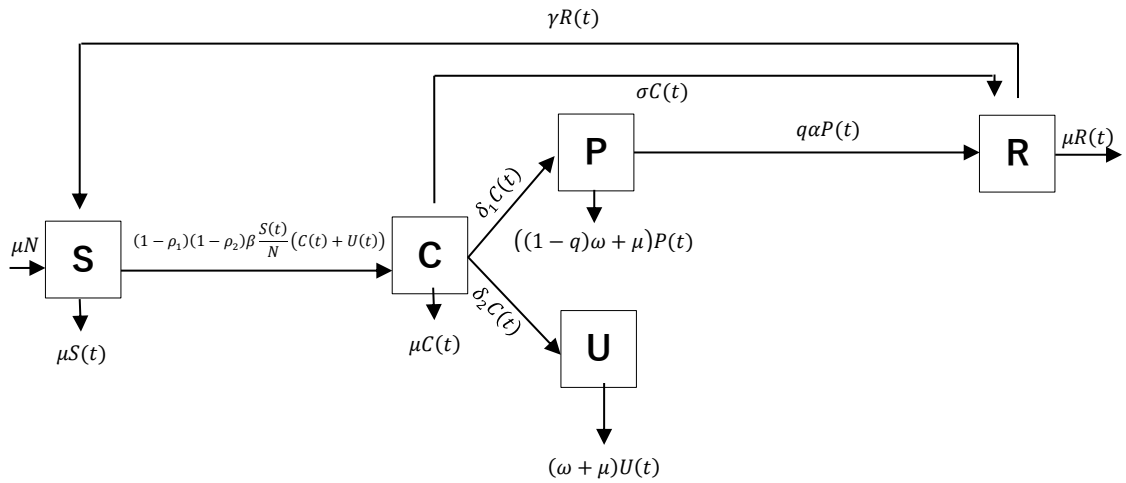
$$\frac{\|u - u_{lama}\|}{\|u\|} \leq \delta,$$

atau  $\delta\|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$ , dengan  $\delta$  merupakan besar toleransi yang diperkenankan (Lenhart & Workman, 2007).

## 2.9 Model Penyebaran Penyakit COVID-19

Banyak penelitian yang telah memodelkan masalah COVID-19. Penelitian yang menjadi rujukan pada tesis ini adalah penelitian yang dilakukan Bani dkk.

(2021). Penelitian tersebut membagi populasi menjadi lima kompartemen seperti yang ditampilkan dalam Gambar 2.1.



**Gambar 2.1** Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran COVID-19 oleh Bani dkk. (2021)

Berdasarkan Gambar 2.1, populasi dibagi menjadi lima kompartemen yaitu populasi rentan atau *susceptible* (S), populasi terinfeksi tanpa gejala atau *carrier* (C), populasi terinfeksi dengan gejala dan melaporkan atau *reported symptom* (P), populasi terinfeksi dengan gejala dan tidak melaporkan atau *unreported* (U), dan populasi sembuh atau *recover* (R). Dari hasil simulasi oleh Bani dkk. (2021) diperoleh bahwa dengan nilai parameter pemberlakuan PSBB yakni  $\rho_2 = 0.08$  tidak menyebabkan COVID-19 hilang dari kota Makassar. Sebaliknya, jika nilai parameter  $\rho_2 = 0.3423$  maka COVID-19 akan hilang dari kota Makassar. Hal ini berarti bahwa jika 34,23 % daerah kota Makassar memberlakukan PSBB maka dibutuhkan waktu kurang lebih 70 hari untuk individu terinfeksi habis dari kota Makassar. Sedangkan, jika nilai parameter dinaikkan menjadi  $\rho_2 = 0.6$ , maka dibutuhkan waktu kurang lebih 40 hari untuk individu terinfeksi habis dari kota Makassar. Hal ini menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter pemberlakuan PSBB diberikan, semakin cepat COVID-19 akan hilang dari kota Makassar. Selain itu, populasi *Carrier*, *Reported Symptom*, dan *Unreported Symptom* yang mengalami penurunan, maka populasi *Recover* juga mengalami penurunan. Akibatnya, turunnya jumlah populasi yang terinfeksi COVID-19 maka jumlah individu yang sembuh dari penyakit juga akan turun.