

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM TIFOID**

***STABILITY ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF
MATHEMATICAL MODEL OF THYPOID FEVER SPREAD***

**MUH. NURSYAM SIDUPPA
H022201009**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM
TIFOID**

***STABILITY ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF
MATHEMATICAL MODEL OF THYPOID FEVER SPREAD***

**MUH. NURSYAM SIDUPPA
H022201009**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM
TIFOID**

TESIS

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

MUH. NURSYAM SIDUPPA

H022201009

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM TIFOID**

Disusun dan diajukan oleh

**MUH. NURSYAM SIDUPPA
H022201009**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 27 September 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

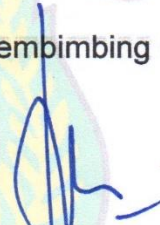
Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pendamping,



Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.
NIP. 19680114 199412 1 001



Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si
NIP. 19800904 200312 2 001

Ketua Program Studi
Magister Matematika,



Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin,



Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.
NIP. 19720515 199702 1 002

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Muh. Nursyam Siduppa

Nomor Mahasiswa : H022201009

Program Studi : Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 27 Semptember 2022

Yang menyatakan



Muh. Nursyam Siduppa

UCAPAN TERIMA KASIH

Bismillahirrohmanirrohim

Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh

Dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan *Alhamdulillahirobbil'alamin*, segala puji hanya bagi Allah *Subhanahu Wata'ala* sebab hanya karena limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan tesis yang berjudul "**Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid**" sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister pada Program Pascasarjana Universitas Hassanuddin.

Penulis menyadari akan adanya berbagai kekurangan dalam penulisan tesis ini, baik dari segi tata bahasa, sistematika penulisan, maupun isi yang terkandung dalam tulisan ini. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun demi perbaikan dan penyempurnaan tesis ini.

Ucapan terima kasih teristimewa penulis haturkan kepada ayahanda tercinta, Muhammad Syafar dan ibunda tercinta, Nurjannah yang telah merawat, membesarkan dan mencurahkan segala kasih sayangnya dalam membimbing, menasehati, dan telah memberikan segala yang terbaik buat penulis, baik berupa dorongan moril, materil, serta linangan air mata yang keluar dalam setiap doa-doa tulusnya. Tak lupa pula ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada kedua adik saya Muh. Ilham Siduppa dan Nurfadilla Siduppa yang selalu memberikan saya motivasi, canda serta tawa sehingga saya dapat melalui masa-masa sulit dalam penulisan tesis ini dalam keadaan tenang.

Selama penulisan tesis ini, tentunya penulis tidak terlepas dari bantuan, kerjasama, dan sumbangan pemikiran berbagai pihak sehingga pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc selaku pembimbing utama yang telah meluangkan waktu untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat dan arahannya dalam menyelesaikan tesis ini.

2. Dr. Kasbawati. S.Si. M.Si, selaku pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk senantiasa memberi bimbingan, semangat dan arahnya dalam menyelesaikan tesis ini.
3. Dr. Muhammad Zakir, M.Si., Dr. Firman, S. Si., M.Si., Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.sc., selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan dalam penyempurnaan tulisan ini.
4. Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku Ketua Program Studi Magister Matematika yang senantiasa memberi bimbingan dan semangat dalam menyelesaikan tesis ini.
5. Rektor Universitas Hassanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta seluruh staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hassanuddin.
6. Dekan FMIPA Universitas Hassanuddin Dr. Eng Amiruddin, M.Si seluruh dosen dan staff administrasi pada Program Studi S2 Matematika Program Pascasarjana Universitas Hassanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan.
7. Teman-teman program studi Magister (S2) Matematika Uiversitas Hasanuddin terkhusus kepada angkatan 2020 dan kepada semua pihak yang telah membantu baik langsung maupun tidak langsung, diucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Semoga hasil tesis ini memberikan kontribusi berharga bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan memberi informasi ilmiah secara umum.

Makassar, 06 Oktober 2022

Muh. Nursyam Siduppa

ABSTRAK

MUH. NURSYAM SIDUPPA. Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid) (Dibimbing oleh Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc. dan Dr. Kasbawati, M. Si.)

Demam tifoid merupakan penyakit endemik yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Salmonella Typhi*. Proses penularan demam tifoid melalui makanan dan minuman yang telah terkontaminasi bakteri *Salmonella Typhi* yang dikeluarkan melalui tinja maupun urin dari orang yang telah terinfeksi. Permasalahan tentang demam tifoid semakin kompleks karena meningkatnya kasus - kasus carrier, sehingga menyulitkan upaya pengobatan dan pencegahan. Setelah pengobatan tidak semua pasien sembuh total, 2 – 5% pasien berpotensi menjadi carrier chronic. Teori kontrol optimal diterapkan pada model matematika dengan pemberian kontrol berupa kampanye kesehatan, screening dan pengobatan untuk meminimumkan jumlah individu asymptomatic, individu symptomatic dan carrier chronic. Penentuan bentuk kontrol optimal menggunakan prinsip Minimum Pontryagin. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode *Forward-Backward Sweep* Runge-Kutta orde 4. Berdasarkan hasil simulasi, terjadi penurunan disetiap subpopulasi terinfeksi setelah penerapan kontrol optimal selama 10 bulan. Kontrol berupa kampanye kesehatan memiliki pengaruh yang besar dibandingkan kontrol berupa *screening* dan pengobatan dalam menekan meningkatnya individu *asymptomatic* dan individu *symptomatic*. Penerapan kontrol berupa pengobatan sangat efektif dalam mengurangi individu terinfeksi dengan gejala dan individu *carrier chronic*.

Kata Kunci: Demam Tifoid, Kampanye Kesehatan, *Screening*, Pengobatan, Kontrol Optimal, Prinsip minimum pontryagin, *Forward-Backward Sweep*.

ABSTRACT

MUH. NURSYAM SIDUPPA. Stability Analysis and Optimal Control Of Mathematical Model of Thypoid Fever Spread (Supervised by Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc. and Dr. Kasbawati, M. Si.)

Typhoid fever is an endemic disease caused by infection with the bacterium Salmonella Typhi. The process of transmission of typhoid fever through food and drink that has been contaminated with Salmonella Typhi bacteria which is excreted through the feces or urine of an infected person. The problem of typhoid fever is increasingly complex because of the increase in carrier cases, making it difficult for treatment and prevention efforts. After treatment, not all patients recover completely, 2-5% of patients have the potential to become chronic carriers. Optimal control theory is applied to the mathematical model by providing control through health campaigns, screening, and treatment to minimize the number of asymptomatic individuals, symptomatic individuals, and chronic carriers. Determination of the optimal control form using the Pontryagin Minimum principle. Numerical simulations were performed using the Forward-Backward Sweep Runge-Kutta method of order 4. Based on the simulation results, there was a decrease in each infected subpopulation after the application of optimal control for ten months. It was found that control in health campaigns had a more significant impact than control in screening and treatment in decreasing asymptomatic and symptomatic individuals. The control of treatment effectively reduces infected individuals with symptoms and chronic carriers.

Keywords: *Typhoid Fever; Health Campaign; Screening; Treatment; Optimal Control; Pontryagin minimum principle; Forward-Backward Sweep.*

DAFTAR ISI

| | |
|---|------------------------------|
| HALAMAN SAMPUL | i |
| HALAMAN PENGANTAR | ii |
| LEMBAR PENGESAHAN | Error! Bookmark not defined. |
| LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS | Error! Bookmark not defined. |
| UCAPAN TERIMA KASIH | v |
| ABSTRAK | vii |
| ABSTRACT | viii |
| DAFTAR ISI | ix |
| DAFTAR TABEL | xi |
| DAFTAR GAMBAR | xii |
| DAFTAR SIMBOL | xiii |
| DAFTAR LAMPIRAN | xiv |
| BAB I PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 3 |
| 1.3 Tujuan Penelitian | 4 |
| 1.4 Manfaat Penelitian | 4 |
| 1.5 Batasan Masalah | 4 |
| BAB II TINJAUAN PUSTAKA | 5 |
| 2.1 Studi Review Perkembangan Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid | 5 |
| 2.2 Epidemiologi Demam Tifoid | 6 |
| 2.3 Manifestasi Klinis Demam Tifoid | 7 |
| 2.4 Pencegahan Demam Tifoid | 7 |
| 2.5 Diagnosis dan Pengobatan Demam Tifoid | 8 |
| 2.6 Titik Kesetimbangan | 8 |
| 2.7 Kestabilan Titik Kesetimbangan | 8 |
| 2.8 Kriteria Routh-Hurwitz | 10 |
| 2.9 Masalah Kontrol Optimal | 12 |
| 2.10 Prinsip Minimum Pontryagin | 13 |
| 2.11 Metode Forward-Backward Sweep | 15 |
| BAB III METODOLOGI PENELITIAN | 18 |
| 3.1 Jenis Penelitian | 18 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 3.2 | Waktu dan Tempat Penelitian..... | 18 |
| 3.3 | Langkah Penelitian | 18 |
| 3.4 | Penarikan Kesimpulan..... | 19 |
| BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN | | 20 |
| 4.1 | Pengembangan Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid 20 | |
| 4.2 | Titik Keseimbangan Sistem | 26 |
| 4.3 | Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid..... | 29 |
| 4.4 | Formulasi dan Penyelesaian Kontrol Optimal | 35 |
| 4.5 | Simulasi Numerik Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol Optimal . | 51 |
| 4.6 | Akumulasi Jumlah Individu Terinfeksi..... | 70 |
| BAB V PENUTUP | | 72 |
| 5.1 | Kesimpulan..... | 72 |
| 5.2 | Saran..... | 73 |
| DAFTAR PUSTAKA | | 74 |
| LAMPIRAN | | 77 |

DAFTAR TABEL

| | |
|---|----|
| Tabel 2.1 Sifat Kestabilan dari Sistem Linear | 9 |
| Tabel 4.1 Variabel Pada Model Penyebaran Penyakit Demam Tifoid | 25 |
| Tabel 4.2 Parameter Pada Model Penyebaran Penyakit Demam Tifoid | 26 |
| Tabel 4.3 Nilai Parameter Simulasi Numerik | 51 |

DAFTAR GAMBAR

| | |
|--|----|
| Gambar 4. 1 Diagram Kompartemen Penyebaran Penyakit Demam Tifoid..... | 21 |
| Gambar 4. 2 Grafik Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol Kampanye Kesehatan $u_1 \neq 0, u_2 = u_3 = 0$ | 52 |
| Gambar 4. 3 Grafik Fungsi Kontrol Kampanye Kesehatan (u_1) | 53 |
| Gambar 4. 4 Grafik Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol Screening $u_2 \neq 0, u_1 = u_3 = 0$ | 55 |
| Gambar 4. 5 Fungsi Kontrol <i>Screening</i> (u_2) | 56 |
| Gambar 4. 6 Grafik Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol Pengobatan..... | 57 |
| Gambar 4. 7 Fungsi Kontrol Pengobatan u_3 Pada Strategi III..... | 58 |
| Gambar 4. 8 Simulasi Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$ | 59 |
| Gambar 4. 9 Fungsi Kontrol Kampanye Kesehatan u_1 dan Screening u_2 Pada Strategi IV..... | 60 |
| Gambar 4. 10 Grafik Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol $u_1 \neq 0, u_3 \neq 0, u_2 = 0$ | 62 |
| Gambar 4. 11 Fungsi Kontrol Kampanye Kesehatan u_1 dan Pengobatan u_3 Pada Strategi IV..... | 63 |
| Gambar 4. 12 Grafik Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol $u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$ dan $u_3 = 0$ | 65 |
| Gambar 4. 13 Fungsi Kontrol <i>Screening</i> u_2 dan Pengobatan u_3 Pada Strategi IV | 66 |
| Gambar 4. 14 Simulasi Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ dan $u_3 \neq 0$ | 67 |
| Gambar 4. 15 Fungsi Kontrol Kampanye Kesehatan u_1 , Screening u_2 dan Pengobatan u_3 Pada Strategi IV | 69 |

DAFTAR SIMBOL

| Simbol | Nama |
|---------------|--------------------|
| Λ | Lambda (\Lambda) |
| μ | Mu (\mu) |
| ε | Epsilon (\epsilon) |
| ρ | Rho (\rho) |
| ν | Nu (\nu) |
| θ | Theta(\theta) |
| ϕ | Phi Variant (\phi) |
| δ | Delta (\delta) |
| τ | Tau (\tau) |
| α | Alpha (\alpha) |
| β | Beta(\beta) |
| η | Eta (\eta) |
| λ | Lambda (\lambda) |

DAFTAR LAMPIRAN

| | |
|---|----|
| Lampiran 1 Penentuan Titik Kesetimbangan Endemik | 77 |
| Lampiran 2 Listing Program Perbandingan Solusi Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol Optimal Menggunakan Matlab R2015a | 80 |
| Lampiran 3 Simulasi Maple | 86 |

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut OMS (2018) penyakit demam tifoid sering terjadi di beberapa negara di dunia dan umumnya terjadi di negara-negara berkembang yang memiliki tingkat kebersihan yang rendah. Demam tifoid merupakan masalah kesehatan masyarakat dengan jumlah kasus mencapai 11 – 20 juta kasus pertahun yang mengakibatkan sekitar 128.000 – 161.000 kematian setiap tahunnya (WHO, 2018).

Demam tifoid merupakan penyakit endemik di Indonesia, yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Salmonella Typhi*. Bakteri ini dapat ditularkan melalui makanan dan minuman yang terkontaminasi bakteri *Salmonella Typhi* yang dikeluarkan melalui tinja maupun urin dari orang yang terinfeksi bakteri *Salmonella Typhi* (Prayoga & Fatmawati, 2018).

Zurimi (2019) menyebutkan pada tahun 2014, angka kesakitan demam tifoid di Indonesia menempati urutan ke tiga dari 10 penyakit terbanyak yang dirawat inap di rumah sakit, dengan jumlah kasus sebanyak 80.850 dan kasus yang meninggal sebanyak 1.747 kasus. Demam Tifoid di Indonesia tersebar secara merata diseluruh propinsi dengan insidensi di pedesaaan 35 /100.000 penduduk pertahun dan di daerah perkotaan 760/100.000 penduduk pertahun atau 600.000 dan 1,5 juta kasus per tahun. Penderita demam tifoid di Propinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2019 sebanyak 16.743 penderita yaitu laki-laki sebanyak 7.925 dan perempuan sebanyak 8.818 penderita (Husna, 2020).

Berdasarkan telaah kasus di rumah sakit besar di Indonesia yang dilakukan oleh Purba, dkk (2016) menunjukkan adanya kecenderungan peningkatan jumlah kasus Demam Tifoid dari tahun ke tahun dengan rata-rata kesakitan 500/100.000 penduduk dan kematian diperkirakan sekitar 0,6–5% kasus. Berdasarkan RPJMN tahun 2015-2019 yang telah ditetapkan oleh pemerintah melalui Peraturan Presiden nomor 2 tahun 2015 tentang Rencana Pembangunan Jangka Menengah Nasional tahun 2015-2019 (RPJMN) menyebutkan demam tifoid berada pada urutan ke enam dari 23 penyakit yang berpotensi KLB (kejadian luar biasa).

Demam tifoid merupakan penyakit yang harus mendapat perhatian serius dari berbagai pihak karena bersifat endemis dan mengancam kesehatan masyarakat. Menurut Gunn, dkk (2014) permasalahan tentang demam tifoid semakin kompleks dengan meningkatnya kasus - kasus karier (*carrier*), *relaps* dan *resistensi* terhadap obat-obat yang dipakai, sehingga menyulitkan upaya pengobatan dan pencegahan. Setelah pengobatan tidak semua pasien sembuh total, 2 – 5% pasien berpotensi menjadi karier kronis. Hingga 4% pasien demam tifoid menjadi karier kronis. Pasien-pasien ini tetap asimtomatik setelah pengobatan akut, tetapi mereka dapat mengeluarkan Bakteri *Salmonella Thypi* hingga 1 tahun melalui tinja dan urin Gupta, dkk (2018).

Kajian tentang demam tifoid dapat dilakukan secara teoritis, salah satunya melalui pemodelan matematika. Pemodelan matematika digunakan secara luas untuk mendeskripsikan berbagai masalah nyata baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang, salah satunya adalah bidang kesehatan. Sebagai contoh yaitu model matematika penyebaran penyakit menular. Dalam hubungan dengan permasalahan tersebut, model matematika dapat digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran suatu penyakit. Dengan demikian dapat ditentukan strategi yang efektif untuk mengendalikan penyakit tersebut. Menurut Toaha (2013) model matematika telah digunakan secara meluas sebagai suatu metode pendekatan untuk mengenali dengan baik mekanisme penyebaran suatu penyakit. Hal serupa diungkapkan oleh Mushayabasa, dkk (2013) model matematika telah menjadi alat manajemen yang sangat berharga bagi para ahli epidemiologi, baik yang menjelaskan mekanisme yang mendasari dinamika yang diamati maupun membuat prediksi kuantitatif tentang efektivitas berbagai tindakan pengendalian. Kontrol optimal merupakan suatu metode standar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dari suatu sistem dinamik kontinu. Pendefinisian fungsi objektif didasarkan pada tujuan yang akan dicapai (Kasbawati, 2011).

Penelitian tentang penyebaran penyakit demam tifoid sebelumnya dilakukan oleh Tilahun, dkk (2017) yang meneliti mengenai pemodelan matematika dan kontrol optimal penyebaran penyakit demam tifoid dengan strategi hemat biaya. Model matematika yang dikembangkan membagi populasi menjadi dua yaitu populasi bakteri *Salmonella Thypi* (B) dan populasi manusia yang terdiri

dari populasi individu rentan (S), populasi individu yang terinfeksi demam tifoid namun belum menunjukkan gejala (I_c), populasi individu terinfeksi demam tifoid (I) dan populasi individu sembuh (R). Dengan meninjau pengaruh *carrier chronic* dan dampaknya pada penyebaran penyakit demam tifoid maka peneliti tertarik untuk mengembangkan model matematika penyebaran penyakit demam tifoid dari Tilahun, dkk (2017) dengan menambahkan populasi *carrier chronic* (C), dengan judul penelitian “Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pengembangan model matematika penyebaran penyakit demam tifoid dengan menambahkan populasi *carrier chronic* sebagai kompartemen?
2. Bagaimana menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika penyebaran penyakit demam tifoid dengan menambahkan populasi *carrier chronic* sebagai kompartemen?
3. Bagaimana menentukan kontrol optimal dari model matematika penyebaran penyakit demam tifoid dengan faktor kontrol berupa kampanye kesehatan, *screening* dan pengobatan?
4. Bagaimana menentukan solusi optimal dari masalah optimasi model matematika penyebaran penyakit demam tifoid melalui metode *forward-backward sweep*?
5. Bagaimana menganalisis perbandingan solusi numerik model matematika penyebaran penyakit demam tifoid tanpa kontrol dan dengan kontrol optimal?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengembangkan model matematika penyebaran penyakit demam tifoid dengan menambahkan populasi *carrier chronic* sebagai kompartemen.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika penyebaran penyakit demam tifoid dengan menambahkan populasi *carrier chronic* sebagai kompartemen.
3. Menentukan bentuk kontrol optimal dari model matematika penyebaran penyakit demam tifoid dengan faktor kontrol berupa kampanye kesehatan, *screening* dan pengobatan.
4. Memperoleh solusi optimal dari masalah optimasi model matematika penyebaran penyakit demam tifoid melalui metode *forward-backward sweep*.
5. Menganalisis perbandingan solusi numerik model matematika penyebaran penyakit demam tifoid tanpa kontrol dan dengan kontrol optimal.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberi gambaran tentang model penyebaran penyakit demam tifoid serta pengendalian optimalnya dengan faktor kontrol berupa kampanye kesehatan, *screening* dan pengobatan.

1.5 Batasan Masalah

Model matematika penyebaran penyakit demam tifoid yang digunakan dibatasi pada penyakit yang disebabkan oleh bakteri *Salmonella Thypi*. Populasi dibagi menjadi enam kompartemen yaitu *susceptibles (S)*, *Asymptomatic infection (I_c)*, *Symptomatic infection (I)*, *Chronic Carrier (C)*, *Recovered (R)* dan bakteri pada lingkungan (*B*).

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Studi Review Perkembangan Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid

Beberapa peneliti telah mengamati dinamika penyebaran penyakit demam tifoid. Mushanyu, dkk (2018) meneliti dampak potensial dari sumber daya kesehatan masyarakat yang terbatas pada penyebaran dan pengendalian demam tifoid. Model matematika yang dikembangkan oleh Mushanyu membagi populasi menjadi populasi bakteri (B) dan populasi manusia yang terbagi menjadi populasi individu rentan (S) populasi individu terinfeksi demam tifoid (I) dan populasi individu pembawa (I_c) dalam hal ini individu pembawa merupakan individu yang telah sembuh dari demam tifoid tetapi namun masih mengeluarkan bakteri *Salmonella Thypi* melalui feses dan urin, (T) merupakan populasi individu yang melakukan pengobatan serta (R) merupakan populasi individu yang sembuh setelah melakukan pengobatan.

Peter, dkk (2020) dalam penelitiannya membagi populasi manusia kedalam empat subpopulasi yaitu, (S) subpopulasi manusia rentan, (I) mewakili subpopulasi individu yang telah terinfeksi demam tifoid dan dapat menularkan infeksi ke populasi rentan, (I_c) mewakili subpopulasi individu yang telah terinfeksi demam tifoid tetapi tidak menunjukkan adanya tanda-tanda demam tifoid dan (R) merupakan subpopulasi individu yang telah sembuh dari demam tifoid.

Nyaberi & Musaili (2021) meneliti mengenai dampak dari pengobatan dalam model matematika penyebaran demam tifoid. Model matematika yang dikembangkan membagi populasi menjadi dua yaitu Populasi bakteri *Salmonella Thypi* (B) dan populasi manusia yang terdiri dari subpopulasi rentan (S), subpopulasi terinfeksi demam tifoid (I) dan subpopulasi sembuh setelah melakukan pengobatan (R).

Tilahun, dkk (2017) meneliti mengenai pemodelan matematika dan kontrol optimal penyebaran penyakit demam tifoid dengan strategi hemat biaya. Model matematika yang dikembangkan membagi populasi menjadi dua yaitu populasi bakteri *Salmonella Thypi* (B) dan populasi manusia yang terdiri dari subpopulasi

individu rentan (S), subpopulasi individu yang terinfeksi demam tifoid namun belum menunjukkan gejala (C) subpopulasi terinfeksi demam tifoid (I) dan subpopulasi individu sembuh setelah melakukan pengobatan (R).

2.2 Epidemiologi Demam Tifoid

Demam Tifoid bersifat endemik dan sporadik di Indonesia. Penyakit yang disebabkan oleh bakteri *Salmonella typhi* ini dapat ditemukan sepanjang tahun dengan insiden tertinggi pada anak - anak. Sumber penularan *Salmonella Typhi* ada dua, yaitu pasien dengan demam tifoid dan karier. Transmisi terjadi melalui air yang tercemar *Salmonella typhi* pada daerah endemik, sedangkan pada daerah non endemik, makanan yang tercemar karier merupakan sumber utama. Tifoid karier adalah seseorang yang kotorannya (feses atau urin) mengandung bakteri *Salmonella Typhi* setelah satu tahun pasca demam tifoid tanpa gejala klinis (Olsen, 2017).

Prinsip penularan penyakit demam tifoid melalui fekal-oral. Bakteri berasal dari tinja atau urin penderita atau bahkan *carrier* (pembawa penyakit yang tidak sakit) yang masuk ke dalam tubuh manusia melalui air dan makanan. Kontaminasi juga dapat terjadi pada sayuran mentah dan buah-buahan yang pohonnya dipupuk menggunakan kotoran manusia. Vektor berupa serangga (lalat) juga berperan dalam penularan penyakit (WHO, 2018).

Menurut Zulkoni, (2010) penularan demam tipoid dapat terjadi melalui berbagai cara, yaitu dikenal dengan istilah 5F (*food, finger, fomitus, feses dan fly*). Riwayat penyakit demam tifoid dalam satu keluarga sangat berpengaruh karena cenderung penularan yang dialami akan melalui jalan yang sama dan risiko tertular akan semakin cepat. Seseorang mampu menjadi pembawa penyakit (*asymptomatic carrier*) demam tifoid, tanpa menunjukkan gejala yang jelas, tetapi mampu menularkan ke orang lain (Nuruzzaman & Syahrul, 2016).

Menurut Gunn, dkk (2014) permasalahan tentang demam tifoid semakin kompleks dengan meningkatnya kasus - kasus karier (*carrier*), *relaps* dan *resistensi* terhadap obat-obat yang dipakai, sehingga menyulitkan upaya pengobatan dan pencegahan. Setelah pengobatan tidak semua pasien sembuh total, 2 – 5% pasien berpotensi menjadi *carrier chronic*. Hingga 4% pasien demam tifoid menjadi karier kronis. Individu *carrier chronic* tetap asimtomatik setelah

pengobatan akut dan tetap dapat mengeluarkan Bakteri *Salmonella Typhi* hingga 1 tahun melalui tinja dan urin (Gupta, dkk 2018).

2.3 Manifestasi Klinis Demam Tifoid

Gejala klinis utama dari demam tifoid yang sering dijumpai adalah demam. Gejala demam pada demam tifoid akan meningkat secara perlahan menjelang sore dan mencapai puncak pada malam hari dan akan mengalami penurunan pada siang hari. Demam akan terus meningkat hingga $39^{\circ} - 40^{\circ}\text{C}$ dan demam akan menetap pada minggu kedua infeksi. Masa inkubasi tifoid yaitu 7 – 14 hari. Gejala infeksi pada demam tifoid tidak spesifik dan seperti infeksi lainnya, gejalanya berupa sakit kepala, mual, nyeri perut, nyeri otot, nyeri sendi, demam, kurang nafsu makan serta susah BAB (Levani & Prastya, 2020).

2.4 Pencegahan Demam Tifoid

Apabila seseorang menderita demam tifoid, maka kemungkinan besar makanan dan minuman yang dikonsumsi tercemar bakteri *Salmonella typhi*. Jajanan di pinggir jalan yang sanitasinya kurang bersih sebaiknya dihindari. Hindari pula memasak telur ayam setengah matang yang pada kulitnya terdapat tinja ayam yang terkontaminasi bakteri tersebut. Usaha yang dapat dilakukan untuk mencegah penyakit demam tifoid adalah sebagai berikut:

1. Vaksinasi untuk mencegah agar seseorang terhindar dari penyakit demam tifoid. Saat ini, vaksin untuk penyakit demam tifoid sudah ada dan dapat melindungi seseorang dari serangan bakteri *Salmonella typhi* dalam waktu 3 tahun.
2. Pendidikan kesehatan kepada masyarakat yang meliputi kebersihan makanan, kebersihan lingkungan, serta kebersihan sanitasi.
3. Penyediaan air minum yang memenuhi syarat kesehatan.
4. Tempat pembuangan kotoran manusia yang higienis.
5. Pemberantasan lalat
6. Pengawasan terhadap masakan dirumah dan penyajian pada penjualan makanan (Zulkoni, 2010).

2.5 Diagnosis dan Pengobatan Demam Tifoid

Menurut Bhandari, dkk (2022) untuk menghindari komplikasi yang tidak diinginkan, kecepatan diagnosis serta ketepatan pengobatan merupakan hal yang harus diperhatikan. Pengobatan demam tifoid dilakukan dengan tatalaksana umum yang bersifat suportif (terapi sytomatik) sesuai dengan gejala yang muncul dan tatalaksana khusus berupa pemberian antibiotik sebagai pengobatan kausal. Penggunaan antibiotik bertujuan untuk mencegah terjadinya komplikasi yang mengakibatkan kematian, yang tidak kalah penting mencegah kekambuhan (Rahmasari & Lestari, 2016). Antibiotik lini pertama mengatasi demam tifoid adalah *chloramphenicol*, *penisilin* dan *trimethoprim/sulfametoxazole* (Depkes, 2013).

2.6 Titik Keseimbangan

Titik Keseimbangan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Titik keseimbangan dibedakan menjadi dua, yaitu titik keseimbangan non endemik dan titik keseimbangan endemik. Titik keseimbangan non endemik merupakan suatu kondisi ketika individu pada populasi terinfeksi adalah nol atau saat penyakit tidak menyebar dalam populasi. Sedangkan titik keseimbangan endemik merupakan suatu kondisi ketika populasi terinfeksi tidak nol atau saat penyakit menyebar dalam populasi. Secara matematis, titik ekuilibrium didefinisikan sebagai

Definisi 2.1. (Wiggins, 2003). *Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$. Titik $x^* \in R^n$ disebut titik keseimbangan dari $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(x^*) = 0$.*

2.7 Kestabilan Titik Keseimbangan

Sistem persamaan dalam penelitian ini berbentuk non linear sehingga perlu dilakukan linearisasi sistem. Linearisasi sistem merupakan suatu proses yang digunakan untuk mengubah suatu sistem persamaan diferensial non linear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Linearisasi sistem persamaan diferensial non linear dilakukan untuk mempermudah dalam mengamati perilaku sistem disekitar titik ekuilibrium. Untuk mencari hasil linearisasi, digunakan Matrik Jacobian

Definisi 2.2 (Hale & Kocak, 1991) jika x^* merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{x} = f(x)$ maka persamaan diferensial linear

$$\dot{x} = J(x^*)x \quad (2.1)$$

disebut persamaan linearisasi pada titik kesetimbangan x^* dimana $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dan

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$J(x^*)$ disebut matriks Jacobi dari f yang di evaluasi di titik x^* .

Kestabilan titik kesetimbangan x^* dapat ditentukan dengan cara menyelesaikan persamaan karakteristik

$$|J(x^*) - \lambda I| = 0, \quad (2.2)$$

dengan I merupakan matriks identitas dan J merupakan matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik kesetimbangan x^* . Misalkan akar-akar persamaan karakteristik dari (2.2) adalah $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ dan $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$ maka sifat kestabilan dari $J(x^*)$ yang dilinearkan di sekitar titik kesetimbangan dapat ditentukan berdasarkan sifat kestabilan pada Tabel 2.1.

Tabel II.1 Sifat Kestabilan dari Sistem Linear

| NO. | Nilai Eigen | Sifat Kestabilan |
|-----|---|----------------------------|
| 1 | $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ | Tidak Stabil |
| 2 | $\lambda_i < 0, \forall i = 1, \dots, n$ | Stabil Asimtotik |
| 3 | $\lambda_i < 0 < \lambda_j, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ | Tidak Stabil |
| 4 | $\lambda_i = \lambda_j > 0, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ | Tidak Stabil |
| 5 | $\lambda_i = \lambda_j < 0, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ | Stabil Asimtotik |
| 6 | $\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ | $r > 0$, tidak Stabil |
| 7 | $\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ | $r < 0$, stabil Asimtotik |
| 8 | $\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ | Stabil |

Sumber : Boyce & Dippima (2012)

2.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen dapat ditentukan dari matriks jacoobi $J(x^*)$ dengan menyelesaikan akar-akar persamaan karakteristik dari sebuah polinomial. Namun seringkali akar-akar dari sebuah persamaan karakteristik tidak mudah untuk diselesaikan secara eksplisit sehingga dalam menentukan sifat kestabilan sistem persamaan di sekitar titik kesetimbangan dilakukan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Kriteria ini digunakan untuk mempermudah dalam menganalisis kestabilan titik kesetimbangan jika nilai eigen matriks Jacobinya sulit dicari. Analisis dilakukan dengan memperhatikan koefisien-koefisien dari persamaan karakteristik (Edelstein, 2005).

Teorema 2.2. *Misalkan diberikan suatu polinomial,*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n \quad (2.3)$$

dengan $a_i, i = 1, \dots, n$ adalah konstanta real. Persamaan ini mempunyai k buah akar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Masing-masing akar dapat bernilai real atau kompleks yang memenuhi $P(\lambda_i) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Misalkan diberikan sistem linear dengan koefisien konstanta, yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.4)$$

x merupakan vektor kolom yang berukuran $n \times 1$ dan A merupakan matriks berukuran $n \times n$. Misalkan polinom (2.3) merupakan persamaan karakteristik dari sistem (2.4), maka nilai eigen dari matriks A merupakan akar-akar dari polinomial $P(\lambda)$.

Untuk menentukan jenis nilai eigen dari matriks A , yaitu melalui determinan dari matriks H_n . Dalam bentuk umum, matriks H_n atau matriks *Hurwitz* merupakan matriks dengan entri sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$H_j = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{pmatrix}$$

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

Dengan syarat setiap unsur (l, m) pada matriks H_j adalah

$$H_k = \begin{cases} a_{2l-m}, & \text{untuk } 0 < 2l - m \leq k \\ 1, & \text{untuk } 2l = m \\ 0, & \text{untuk } 2l < m \text{ atau } 2l > k + m \end{cases}$$

Titik kesetimbangan x^* dikatakan stabil jika dan hanya jika $|H_j| > 0$, untuk setiap $j = 1, 2, 3, \dots, k$. (Edelstein, 2005).

Sebagai contoh, misalkan diberikan persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (2.5)$$

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, akar-akar persamaan (2.5) mempunyai bagian ril negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = |a_1| > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \text{ atau}$$

$$A_1 A_2 > 0 \text{ dan memenuhi } A_1, A_2 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \text{ atau}$$

$$A_1 A_2 A_3 - A_3^2 > 0 \text{ dan memenuhi } A_1, A_2, A_3 > 0$$

2.9 Masalah Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal adalah memilih fungsi kontrol $u(t)$ yang membawa sistem dari *state* awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 ke *state* akhir $x(t_f)$ pada waktu akhir t_f , sedemikian sehingga suatu fungsi objektif dapat bernilai maksimum atau minimum suatu fungsi tujuan (Lenhart & Workman, 2007).

Pada masalah nyata yang berkembang menurut waktu t , sistem berada dalam keadaan atau *state* tertentu, yang dapat dinyatakan dengan variabel keadaan (variabel *state*) $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, atau dalam notasi vektor $x(t) \in R^n$.

State yang bergantung pada fungsi kontrol dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.6)$$

dengan nilai awal $x(t_0) = x_0$. Dengan g suatu fungsi yang kontiniu dan bergantung pada variabel x dan kontrol u yang merupakan fungsi kontrol dari sistem (2.6). Jika nilai $u(t)$ berubah maka solusi dari sistem (2.6) juga akan berubah. Masalah kontrol optimal adalah mencari fungsi kontrol $u(t)$ dan solusi sistem yang bersesuaian dengan (2.6) sehingga fungsi tujuan (2.7) dapat tercapai, yaitu

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.7)$$

dengan f fungsi yang bergantung pada variabel x dan kontrol u (Lenhart & Workman, 2007).

Fungsi J merupakan fungsi tujuan dan kontrol $u(t) \in U$, dengan U merupakan himpunan dari semua fungsi kontrol $u(t)$. Fungsi $u(t)$, $f(t, x, u)$ dan $g(t, x, u)$ merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi pada interval $[t_0, t_f]$. Pemilihan fungsi f bergantung pada penekanan dari sistem yang akan dioptimalkan. Tujuan pengontrolan adalah untuk mengoptimalkan fungsi objektif (2.7) mencapai nilai yang optimal (Lenhart & Workman, 2007).

2.10 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum Pontryagin merupakan prinsip penting dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal karena prinsip minimum Pontryagin menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal untuk meminimumkan fungsi Hamilton pada saat t . Prinsip minimum pontryagin menyatakan bahwa persamaan Hamiltonian akan diminimumkan sepanjang U yang merupakan himpunan kontrol yang mungkin (Lenhart & Workman, 2007).

Berikut garis besar bagaimana prinsip minimum pontryagin diterapkan untuk memperoleh syarat perlu dari masalah optimasi yang dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut (Lenhart & Workman, 2007):

1. Membentuk fungsi hamiltonian

$$H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$$

Dengan $f(t, \mathbf{x}, u)$ merupakan fungsi tujuan yang akan dioptimalkan dan $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$ merupakan persamaan state.

2. Minimumkan H terhadap kontrol u dengan menggunkana syarat stasioner yaitu:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

sehingga diperoleh

$$u^* = u^*(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

3. Menyelesaikan persamaan state

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$$

dan persamaan costate

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

Dengan adanya dua turunan yaitu $\dot{\mathbf{x}}$ dan $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$, untuk menentukan solusi optimal dibutuhkan dua kondisi batas. Jika diberikan nilai awal $\mathbf{x}(0)$ dan nilai akhir $\mathbf{x}(t_f)$ maka secara langsung dapat ditentukan $\mathbf{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ apabila tidak diberikan kondisi akhir $\mathbf{x}(t_f)$ maka digunakan kondisi transversaliti yaitu $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$ sebagai kondisi akhir

4. Mensubtitusi hasil dari langkah 3 ke u^* untuk menentukan kontrol optimal.

Berikut komponen dari prinsip minimum Pontryagin dapat diringkas sebagai berikut:

| | | |
|---------------------|---|-------|
| Model Sistem | $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ | |
| Fungsional Objektif | $J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt$ | |
| Fungsi Hamiltonian | $H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$ | (2.8) |
| Pengontrol Optimum | | |

- Persamaan *state* $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$ (2.9)

- Persamaan *costate* $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ (2.10)

- Syarat *Stationer* $\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U$ (2.11)

- Syarat *Transversalitas* $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$ (2.12)

Contoh 2.1: (Lenhart & Workman, 2007) Misalkan diberikan suatu fungsi tujuan:

$$\min_u \int_0^1 u^2(t) dt$$

terhadap fungsi kendala $\dot{x} = x + u$ dengan syarat awal $x(0) = 1$

Didefinisikan fungsi Hamilton sebagai berikut:

$$H = u^2 + \lambda(x + u),$$

dengan persamaan *costate*

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda,$$

yang penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= -\lambda, \\ \int \frac{d\lambda}{\lambda} &= \int -dt, \\ \ln \lambda &= -t + c, \end{aligned}$$

$$e^{\ln \lambda} = e^{-t+c},$$

$$\lambda = \lambda_0 e^{-t},$$

Dengan λ_0 adalah konstan. Kondisi akhir $\lambda(1) = 0$ mengakibatkan $\lambda_0 = 0$. Selanjutnya, diperoleh kondisi stationer sebagai berikut.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{\lambda}{2},$$

Karena $\lambda = 0$ didapatkan $u^* = 0$.

Substitusi $u^* = 0$ ke persamaan state $\dot{x} = x + u$ diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = x,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int 1 dt,$$

$$\ln x = t + c,$$

$$e^x = e^{t+c},$$

$$x = \lambda_0 e^{-t}.$$

Kondisi akhir $x(0) = 1$ mengakibatkan $x_0 = 1$. Sehingga persamaan state yang optimal adalah $x^*(t) = e^t$ untuk setiap $y \in [0,1]$

2.11 Metode Forward-Backward Sweep

Tinjau masalah optimasi yang diberikan pada persamaan (2.7) terhadap kendala pada persamaan (2.6). Dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin, masalah optimasi dengan kendala dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu

$$\min_{(x,u,\lambda)} H(t, x, u, \lambda) = \min_{(x,u,\lambda)} (f(t, x, u) + \lambda^T(t)g(t, x, u))$$

dengan syarat keoptimalan

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U.$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Pada metode ini, interval waktu $[t_0, t_f]$ dibagi menjadi beberapa bagian, yaitu $t_0 = b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1} = t_f$ dan kontrol $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$, dimana $u_i \approx u(b_i)$. Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk \mathbf{x} dan λ yang bergantung pada \mathbf{u} . Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas untuk \mathbf{x} dan λ tersebut (Lenhart dan Workman, 2007).

Metode *Forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi $\mathbf{x}(t)$. Pada metode ini, diberikan kondisi awal yaitu pada persamaan (2.9), kemudian diberikan *step size* yaitu h . Pendekatannya melalui $\mathbf{x}(t+h)$ dan $\mathbf{x}(t)$, sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.14)$$

dengan

$$k_1 = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \quad (2.15)$$

$$k_2 = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = \mathbf{f}(t+h, \mathbf{x}(t) + hk_3)$$

Sedangkan metode *Backward Runge Kutta* orde 4 diberikan kondisi akhir yaitu pada persamaan (2.10). Kemudian diberikan *step size* yaitu h pendekatannya melalui $\lambda(t-h)$ dan $\lambda(t)$ sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$\lambda(t-h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.16)$$

dengan

$$k_1 = \mathbf{f}(t, \lambda(t)) \quad (2.17)$$

$$k_2 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t - h, \lambda(t) - hk_3)$$

Nilai u diperbaharui pada setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai u yang lama dengan nilai u yang baru yaitu

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2}$$

dengan u_{baru} diperoleh dari syarat keoptimalan $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Iterasi akan berhenti ketika syarat konvergensi terpenuhi yaitu ketika nilai $\|u - u_{lama}\| = \sum_{i=1}^{N+1} |u_i - u_{lama(i)}|$ menjadi sangat kecil, dengan u merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi yang sedang berjalan dan u_{lama} merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi sebelumnya. Bentuk uji konvergensi lain dapat pula dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\|u - u_{lama}\|}{\|u\|} \leq \delta$$

atau $\delta\|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$, dengan δ merupakan toleransi yang diperkenankan (Lenhart dan Workman, 2007).