

**KONSTRUKSI GELANGGANG MCCOY DAN ARMENDARIZ
MENGUNAKAN GELANGGANG MATRIKS SEGITIGA FORMAL**



OLEH :

AIDAH NABILAH ANWAR

H022202006

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022**

**KONSTRUKSI GELANGGANG MCCOY DAN ARMENDARIZ
MENGUNAKAN GELANGGANG MATRIKS SEGITIGA
FORMAL**

TESIS

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Magister Sains

pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

AIDAH NABILAH ANWAR

H022202006

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

LEMBAR PENGESAHAN

**KONSTRUKSI GELANGGANG MCCOY DAN ARMENDARIZ
MENGUNGKAKAN GELANGGANG MATRIKS SEGITIGA FORMAL.**

Disusun dan diajukan oleh

**AIDAH NABILAH ANWAR
H022202006**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka
Penyelesaian Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
pada tanggal 7 Desember 2022
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,



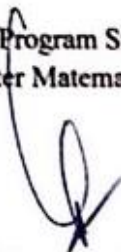
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.
NIP. 19680803 199202 1 001

Pembimbing Pendamping,




Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si
NIP. 19700807 200003 1 002

**Ketua Program Studi
Magister Matematika,**



Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1 013

**Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin,**



Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.
NIP. 19720515 199702 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul “Konstruksi Gelanggang McCoy dan Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal” adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. sebagai Pembimbing Utama dan Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi sebagai artikel dengan judul “Konstruksi Gelanggang Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal”.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 07 Desember 2022



Aidah Nabilah Anwar
NIM. H022202006

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada **Allah SWT** atas segala nikmat hidup, kesehatan, rejeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul "**Konstruksi Gelanggang McCoy dan Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal**". Tak lupa pula salam dan shalawat kepada baginda **Rasulullah Nabiullah Muhammad SAW**, sosok yang menjadi suri tauladan bagi penulis dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Penyusunan tesis ini tentunya tak lepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kepada Ayahanda tercinta **Anwar Zainuddin** dan Ibunda tersayang **Sunarti** yang telah mendidik penulis dengan penuh kesabaran, cinta dan kasih sayang yang tulus. Serta kakak-kakakku tersayang **Prihartini Amalia Anwar, Puspita Hardianti Anwar, dan Reskiati Wiradhika Anwar** yang senantiasa selalu memberikan dukungan dan motivasi kepada adik bungsunya ini.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada :

1. Bapak **Rektor Universitas Hasanuddin** beserta jajarannya, Bapak **Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** beserta jajarannya dan semua pihak birokrasi atas ilmu dan kemudahan-kemudahan yang diberikan, baik dibidang akademik maupun dibidang kemahasiswaan.
2. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si** selaku ketua prodi program pasca sarjana matematika.
3. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku pembimbing utama serta Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing pertama yang selalu sabar dalam membimbing penulis dan telah bersedia meluangkan waktunya di sela-sela kesibukan demi membimbing penulis dan memberikan masukan serta koreksi yang dibutuhkan selama pengerjaan tesis ini.

4. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku ketua tim penguji, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si** dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku anggota tim penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan kritikan yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
5. Bapak dan Ibu seluruh **Dosen Program PascaSarjana Matematika** serta **Staf Jurusan Matematika** yang telah memberikan banyak masukan dan arahan dalam pengurusan Administrasi.
6. Untuk semua teman-teman seperjuangan Pasca Matematika yang senantiasa memberikan motivasi dan dorongan agar penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Terimakasih untuk waktu singkat yang sangat berharganya.
7. Teruntuk semua pihak yang tak sempat disebutkan satu persatu. Terimakasih banyak telah membantu penulis dalam pembuatan tesis ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan tangan terbuka demi perbaikan lebih lanjut.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak yang membacanya.

Amin Yaa Rabbal Alamin.

Makassar, 22 November 2022



Penulis

ABSTRAK

Bilangan Trinion dan bilangan Quaternion adalah salah satu jenis dari bilangan *hypercomplex* yang merupakan perluasan dari bilangan *complex*. Bilangan *hypercomplex* sendiri merupakan bilangan yang terdiri dari satu bilangan riil dan memiliki lebih dari satu bilangan imajiner. Dikarenakan bilangan Trinion dan bilangan Quaternion adalah Gelanggang, maka dari kedua bilangan tersebut dapat dibentuk suatu modul yang disebut sebagai bimodul Trinion dan Quaternion. Bimodul ini merupakan modul yang terdiri dari modul kiri Trinion dan modul kanan Quaternion. Selanjutnya, bilangan Trinion, bilangan Quaternion dan Bimodulnya dikemas kedalam bentuk Matriks Segitiga Formal yang berordo 2×2 .

Matriks segitiga formal atau yang lebih dikenal sebagai matriks segitiga atas merupakan matriks yang semua elemen dibawah diagonal utamanya bernilai nol. Matriks segitiga formal yang elemen didalamnya berupa bilangan Trinion, bilangan Quaternion dan bimodulnya juga dapat disebut sebagai Gelanggang Polinom Miring Matriks Segitiga Formal dikarenakan bilangan Trinion, bilangan Quaternion dan Bimodulnya merupakan suatu gelanggang polinom miring dimana aturan perkaliannya mengikut ke aturan perkalian masing-masing bilangan. Selanjutnya, gelanggang polinom miring matriks segitiga formal tersebut akan di modifikasi sedemikian rupa sehingga dapat memenuhi syarat dari Gelanggang McCoy dan Gelanggang Armendariz yang merupakan perluasan dari Gelanggang Polinom Miring. Penelitian ini akan menunjukkan pengkonstruksian Gelanggang McCoy dan Gelanggang Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal yang elemen didalamnya berupa bilangan Trinion, bilangan Quaternion, dan Bimodulnya.

Kata Kunci : Trinion, Quaternion, Bimodul, Matriks Segitiga Formal, Gelanggang, Gelanggang Polinom Miring, Gelanggang McCoy, Gelanggang Armendariz.

ABSTRACT

Trinion number and Quaternion number are one of the hypercomplex numbers which is an extensions of the complex number. Hypercomplex number is a number that consists of one real number and have more than one imaginary numbers. Because Trinion number and Quaternion number are a rings, then from both of that numbers can be formed a module called bimodule of Trinion and Quaternion. Bimodule of Trinion and Quaternion consists a left module Trinion and right module Quaternion. Furthermore, Trinion number, Quaternion number and their bimodule can be formed into a 2×2 Formal Triangular Matrix.

Formal Triangular Matrix or better known as Upper Triangular Matrix is a Matrix that all entries below the main diagonal are zero. Formal Triangular Matrix that have Trinion number, Quaternion number and their bimodule as their entries is also called Formal Triangular Matrix Skew Polynomial Ring because all of that numbers are a Skew Polynomial Rings where their multiplication rule is follows the multiplication rule for each number. Furthermore, the formal triangular matrix ring will be modified so that it can meet the requirements of McCoy Ring and Armendariz Ring which are a generalized of Skew Polynomial Ring. The aims of this research is to show the constuction of McCoy Ring and Armendariz Ring Using Formal Triangular Matrix Ring that have Trinion number, Quaternion number and their bimodule as their entries.

Keywords : Trinion, Quaternion, Bimodule, Formal Triangular Matrix, Ring, Skew Polynomial Ring, McCoy Ring, Armendariz Ring.

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
1. 1. Latar Belakang	1
1. 2. Rumusan Masalah	2
1. 3. Tujuan Penelitian.....	3
1. 4. Batasan Masalah	3
1. 5. Manfaat Penelitian	3
1. 6. Sistematika Penulisan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1. Matriks Segitiga Formal	5
2.2. Gelanggang	5
2.2.1. Endomorfisma Gelanggang	6
2.2.2. Gelanggang Polinom Miring	7
2.3. Trinion	8
2.3.1. Operasi Pada Trinion	8
2.3.2. Gelanggang Trinion	9
2.4. Quaternion	11
2.4.1. Operasi Pada Quaternion	12
2.4.2. Gelanggang Quaternion	12

2.5.	Modul dan Bimodul	16
2.5.1.	Modul	16
2.5.2.	Bimodul	16
2.6.	Gelanggang McCoy	17
2.6.1.	Gelanggang McCoy Miring	17
2.7.	Gelanggang Armendariz	19
2.7.1.	Gelanggang Armendariz Miring	19
BAB III METODE PENELITIAN		21
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		22
4.1.	Modul dan Bimodul dari Trinion dan Quaternion	22
4.1.1.	Modul Kiri Trinion	22
4.1.2.	Modul Kanan Quaternion	25
4.1.3.	Bimodul Trinion dan Quaternion	29
4.2.	Gelanggang Matriks Segitiga Formal	29
4.3.	Endomorfisma Gelanggang Matriks Segitiga Formal	33
4.3.1.	Endomorfisma Gelanggang Trinion	33
4.3.2.	Endomorfisma Gelanggang Quaternion	34
4.3.3.	Endomorfisma Bimodul Trinion dan Quaternion	35
4.4.	Pengkonstruksian Gelanggang Matriks Segitiga Formal	36
4.4.1.	Gelanggang σ -Skew McCoy dan Gelanggang σ -Skew Armendariz	36
4.4.2.	Gelanggang σ -Skew π -McCoy dan Gelanggang σ -Skew π - Armendariz	56
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		58
5.1.	Kesimpulan	58
5.2.	Saran	59

DAFTAR PUSTAKA 60

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

1. 1. Latar Belakang

Secara umum matriks dikenal sebagai sekumpulan bilangan yang disusun sedemikian rupa berdasarkan baris dan kolom sehingga membentuk bangun persegi. Bilangan-bilangan yang disusun dalam baris dan kolom ini dinamakan elemen matriks. Dalam aljabar linear terdapat berbagai macam bentuk dan jenis matriks, diantaranya ialah matriks segitiga.

Matriks segitiga merupakan salah satu bentuk matriks persegi yang berordo $n \times n$. Matriks segitiga dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Dalam beberapa penelitian, matriks segitiga atas juga dikenal sebagai matriks segitiga formal. Adapun bentuk dari matriks segitiga formal yang berordo 2×2 ialah sebagai berikut.

$$\mathcal{T}(R, M, S) := \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M, s \in S \right\}$$

Sama halnya dengan matriks pada umumnya, elemen-elemen pada matriks segitiga formal juga dapat berupa bilangan bulat, bilangan asli, bilangan real, bilangan rasional, maupun bilangan kompleks. Namun, pada tesis ini akan berfokus pada bilangan *hypercomplex* yang merupakan perluasan dari bilangan kompleks.

Jika bilangan kompleks merupakan pasangan terurut dari satu bagian real dan satu bagian imajiner, maka lain halnya dengan bilangan *hypercomplex*. Bilangan *hypercomplex* merupakan bilangan yang memiliki lebih dari satu bagian imajiner. Diantaranya, terdapat bilangan Quaternion (\mathbb{H}) yang diperkenalkan oleh Sir William Rowan Hamilton. Bilangan Quaternion merupakan pasangan terurut dari satu bagian real dan tiga bagian imajiner. Selain Quaternion, terdapat pula bilangan *hypercomplex* lainnya yaitu, Trinion (\mathbb{T}) yang terdiri dari satu bagian real dan dua bagian imajiner.

Seperti bilangan pada umumnya, bilangan Quaternion dan Trinion juga memiliki modul. Modul merupakan salah satu bentuk struktur aljabar yang

merupakan perumuman dari suatu ruang vektor. Modul sendiri terbagi menjadi dua bagian yaitu modul kiri dan modul kanan. Dalam pembentukan modul melibatkan suatu gelanggang dengan elemen satuan. Apabila suatu modul M memiliki modul kiri R yang berbeda dengan modul kanan S , maka modul M disebut sebagai (R, S) -bimodul.

Dalam hal ini, apabila bilangan *hypercomplex* Trinion mempunyai modul kiri R dan Quaternion memiliki modul kanan S , maka dapat terbentuk suatu (R, S) -bimodul. Selanjutnya, bilangan *hypercomplex* Trinion dan Quaternion beserta bimodul dari kedua bilangan *hypercomplex* tersebut akan dikemas kedalam bentuk matriks segitiga formal. Karena Trinion dan Quaternion merupakan suatu gelanggang begitu pula dengan (R, S) -bimodulnya, maka matriks segitiga formal tersebut juga disebut sebagai gelanggang matriks segitiga formal.

Lebih lanjut, peneliti ingin mengkaji mengenai gelanggang matriks segitiga formal dan kaitannya dengan gelanggang McCoy miring dan gelanggang Armendariz miring yang merupakan perkhurusan dari gelanggang polinom miring. Hasil-hasil penelitian akan ditata dan dirangkum dalam bentuk satu tulisan yang diberi judul :

“Konstruksi Gelanggang McCoy dan Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal”

1. 2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam tesis ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana mengkonstruksi suatu (R, S) -bimodul dengan R adalah Gelanggang Trinion dan S adalah Gelanggang Quaternion untuk membangun Gelanggang Matriks Segitiga Formal ?
2. Bagaimana mengkonstruksi :
 - (i). Gelanggang σ -skew McCoy ?
 - (ii). Gelanggang σ -skew π -McCoy ?
 - (iii). Gelanggang σ -skew Armendariz ?
 - (iv). Gelanggang σ -skew π -Armendariz ?

1. 3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan penelitian dalam tesis ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk memperoleh solusi dalam pengembangan Gelanggang Matriks Segitiga Formal dari hasil pengkonstruksian (R,S) -bimodul dengan R adalah Gelanggang Trinion dan S adalah Gelanggang Quaternion.
2. Untuk memperoleh solusi dari hasil pengkonstruksian :
 - (i). Gelanggang σ -skew McCoy.
 - (ii). Gelanggang σ -skew π -McCoy.
 - (iii). Gelanggang σ -skew Armendariz.
 - (iv). Gelanggang σ -skew π -Armendariz.

1. 4. Batasan Masalah

Pada penulisan tesis ini hanya akan dibatasi pada matriks segitiga formal yang berordo 2×2 dan σ derivatif yang digunakan bernilai 0.

1. 5. Manfaat Penelitian

Penulisan ini diharapkan bermanfaat sebagai bahan kajian di dalam mempelajari mengenai karakteristik bimodul pada Gelanggang Hypercomplex Trinion dan Quaternion, Gelanggang σ -skew McCoy, Gelanggang σ -skew π -McCoy, Gelanggang σ -skew Armendariz dan Gelanggang σ -skew π -Armendariz.

1. 6. Sistematika Penulisan

Agar penulisan tesis mudah dipahami maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari lima bab. Masing-masing bab dibagi kedalam subbab dengan rumusan sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Meliputi Matriks Segitiga, Gelanggang, Trinion, Quaternion, Modul dan Bimodul, Gelanggang McCoy, dan Gelanggang Armendariz.

BAB III METODE PENELITIAN

Meliputi tahapan dalam pengkonstruksian Gelanggang σ -skew McCoy, Gelanggang σ -skew π -McCoy, Gelanggang σ -skew Armendariz, dan Gelanggang σ -skew π -Armendariz.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Meliputi hasil penelitian yang diperoleh menggunakan teori dari tinjauan pustaka dan berisi alasan ulasan jawaban dari rumusan masalah.

BAB V PENUTUP

Meliputi kesimpulan dan saran yang berhubungan dengan topik pembahasan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dibahas mengenai Matriks Segitiga Formal, Gelanggang, Trinion, Quaternion, Modul dan Bimodul, Gelanggang McCoy dan Gelanggang Armendariz.

2.1. Matriks Segitiga Formal

Matriks segitiga merupakan salah satu bentuk dari matriks persegi. Matriks persegi dengan semua elemen di atas diagonal utama bernilai nol disebut matriks segitiga bawah. Sedangkan, matriks persegi dengan semua elemen di bawah diagonal utama bernilai nol disebut matriks segitiga atas.

Definisi 2.1. *Matriks segitiga formal juga dikenal sebagai matriks segitiga atas dimana semua elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol. Adapun bentuk umum dari matriks segitiga atas adalah sebagai berikut :*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

2.2. Gelanggang

Sistem bilangan yang telah dikenal seperti bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan kompleks maupun bilangan *hypercomplex* mempunyai dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian. Sistem aljabar dengan dua operasi tersebut termasuk dalam sistem aljabar yang dinamakan Gelanggang.

Definisi 2.2. *Gelanggang $(R, +, \cdot)$ adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian (\cdot) yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.*

1. $(R, +)$ membentuk grup komutatif, $a + b = b + a$
2. (R, \cdot) berlaku sifat asosiatif, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. $(R, +, \cdot)$ bersifat distributif, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

untuk setiap $a, b, c \in R$.

Contoh 2.2. Misal diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian biasa. Himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} disebut gelanggang karena memenuhi 3 aksioma pada **Definisi 2.2.**

2.2.1. Endomorfisma Gelanggang

Endomorfisma merupakan homomorfisma yang pemetaannya dari suatu gelanggang ke gelanggang itu sendiri.

Definisi 2.2.1.a. Pemetaan σ dari suatu gelanggang $(R, +, \cdot)$ ke dirinya sendiri yang memenuhi dua aksioma berikut disebut sebagai endomorfisma gelanggang.

Untuk setiap $a, b \in R$, maka berlaku :

1. $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$
2. $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$

Contoh 2.2.1.a. Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{c_0 + c_1 i \mid c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa merupakan suatu gelanggang dan mempunyai endomorfisma $\sigma(\mathbf{c}) = c_0 - c_1 i$. Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}$, maka

1. Ruas kiri

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \sigma[(a_0 + a_1 i) + (b_0 + b_1 i)] \\ &= \sigma[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i] \\ &= (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1) i\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{a}) + \sigma(\mathbf{b}) &= \sigma(a_0 + a_1 i) + \sigma(b_0 + b_1 i) \\ &= (a_0 - a_1 i) + (b_0 - b_1 i) \\ &= (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1) i\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa ruas kiri dan kanan bernilai sama, maka syarat pertama **Terpenuhi.**

2. Ruas kiri

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{ab}) &= \sigma[(a_0 + a_1 i)(b_0 + b_1 i)] \\ &= \sigma[(a_0 b_0) + (a_0 b_1 i) + (a_1 b_0 i) - (a_1 b_1)] \\ &= \sigma[(a_0 b_0 - a_1 b_1) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) i] \\ &= (a_0 b_0 - a_1 b_1) - (a_0 b_1 + a_1 b_0) i\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}
 \sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) &= \sigma(a_0 + a_1\mathbf{i})\sigma(b_0 + b_1\mathbf{i}) \\
 &= (a_0 - a_1\mathbf{i})(b_0 - b_1\mathbf{i}) \\
 &= (a_0b_0 - a_0b_1\mathbf{i} - a_1b_0\mathbf{i} - a_1b_1) \\
 &= (a_0b_0 - a_1b_1) - (a_0b_1 + a_1b_0)\mathbf{i}
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat juga bahwa ruas kiri dan kanan bernilai sama, maka syarat kedua juga terpenuhi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\sigma(\mathbf{c}) = c_0 - c_1\mathbf{i}$ merupakan endomorfisma gelanggang pada bilangan kompleks.

Definisi 2.2.1.b. *Derivatif gelanggang atau yang biasa disimbolkan sebagai δ diperlukan dalam pembentukan gelanggang polinom miring dan bergantung pada endomorfisma gelanggang sehingga disebut σ -derivatif. Jika $a, b \in R$, maka $\delta(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \delta(b) + \delta(a) \cdot b$.*

2.2.2. Gelanggang Polinom Miring

Dalam pembentukan suatu gelanggang polinom miring diperlukan beberapa hal yaitu suatu gelanggang (disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring), endomorfisma gelanggang (endomorfisma biasanya disimbolkan dengan σ (sigma) dan δ (delta) yang merupakan σ -derivatif.

Definisi 2.2.2. *Gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$ merupakan gelanggang yang terbentuk dari gelanggang polinomial dengan variabel tak diketahui x dan mempunyai bentuk*

$$R[x; \sigma, \delta] = \{r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_{n-1}x^{n-1} + r_nx^n \mid r_i \in R\}$$

dan operasi perkaliannya $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Aturan perkaliannya inilah yang membuat gelanggang $R[x; \sigma, \delta]$ bersifat tidak komutatif meskipun gelanggang tumpuan R adalah gelanggang komutatif.

Contoh 2.2.2. Misalkan $R[x; \sigma, \delta] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$. Endomorfisma $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$. Pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$. Gelanggang ini tidak bersifat komutatif. Misal $f(x) = (4 - 2\sqrt{-5})x$ dan $g(x) = (3 + 5\sqrt{-5})x$.

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= [(4 - 2\sqrt{-5})x][(3 + 5\sqrt{-5})x] \\
&= (4 - 2\sqrt{-5})[x(3 + 5\sqrt{-5})]x \\
&= (4 - 2\sqrt{-5})[\sigma(3 + 5\sqrt{-5})x + \delta(3 + 5\sqrt{-5})]x \\
&= (4 - 2\sqrt{-5})[(3 - 5\sqrt{-5})x + 5]x \\
&= (4 - 2\sqrt{-5})[(3 - 5\sqrt{-5})x^2 + 5x] \\
&= [(4 - 2\sqrt{-5})(3 - 5\sqrt{-5})x^2] + [(4 - 2\sqrt{-5})5x] \\
&= (-38 - 26\sqrt{-5})x^2 + (20 - 10\sqrt{-5})x \\
g(x)f(x) &= [(3 + 5\sqrt{-5})x][(4 - 2\sqrt{-5})x] \\
&= (3 + 5\sqrt{-5})[x(4 - 2\sqrt{-5})]x \\
&= (3 + 5\sqrt{-5})[\sigma(4 - 2\sqrt{-5})x + \delta(4 - 2\sqrt{-5})]x \\
&= (3 + 5\sqrt{-5})[(4 + 2\sqrt{-5})x^2 - 2x] \\
&= [(3 + 5\sqrt{-5})(4 + 2\sqrt{-5})x^2] - [(3 + 5\sqrt{-5})2x] \\
&= (-38 + 26\sqrt{-5})x^2 - (6 + 10\sqrt{-5})x
\end{aligned}$$

2.3. Trinion

Bilangan Trinion yang disimbolkan oleh \mathbb{T} merupakan perluasan umum dari aljabar kompleks.

Definisi 2.3. Bilangan trinion t didefinisikan sebagai kombinasi linear dari suatu bagian real dan dua bagian imajiner yaitu $t = t_0 + t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j}$ dimana $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dan memenuhi $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = -\mathbf{1}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}, \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}$.

2.3.1. Operasi Pada Trinion

Misalkan p dan q merupakan bilangan trinion dengan $p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}$ dan $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j}$. Operasi penjumlahan dan perkalian pada Trinion didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
p + q &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}) + (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j}) \\
&= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

dan,

$$\begin{aligned}
pq &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j})(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j}) \\
&= (p_0q_0 + p_0q_1\mathbf{i} + p_0q_2\mathbf{j}) + (p_1q_0\mathbf{i} + p_1q_1(\mathbf{i})^2 + p_1q_2\mathbf{ij}) \\
&\quad + (p_2q_0\mathbf{j} + p_2q_1\mathbf{ji} + p_2q_2(\mathbf{j})^2)
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $ij = ji = -1, i^2 = j, j^2 = -1$, sehingga

$$\begin{aligned} &= (p_0q_0 + p_0q_1i + p_0q_2j) + (p_1q_0i + p_1q_1j + (-1)p_1q_2) \\ &\quad + (p_2q_0j + (-1)p_2q_1 + p_2q_2(-i)) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_2 - p_2q_1) + (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_2)i + (p_0q_2 + p_1q_1 + p_2q_0)j \end{aligned}$$

2.3.2. Gelanggang Trinion

Untuk menunjukkan bahwa Trinion merupakan gelanggang berdasarkan

Definisi 2.2., maka dimisalkan $a, b, c \in \mathbb{T}$ dengan $a = a_0 + a_1i + a_2j$,
 $b = b_0 + b_1i + b_2j$, $c = c_0 + c_1i + c_2j$.

(i). Akan ditunjukkan $(\mathbb{T}, +)$ adalah grup komutatif.

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1i + a_2j) + (b_0 + b_1i + b_2j) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)i + (b_2 + a_2)j \\ &= (b_0 + b_1i + b_2j) + (a_0 + a_1i + a_2j) \\ &= b + a. \end{aligned}$$

(ii). Akan ditunjukkan (\mathbb{T}, \cdot) bersifat asosiatif $(ab)c = a(bc)$.

$$\begin{aligned} (ab)c &= [(a_0 + a_1i + a_2j)(b_0 + b_1i + b_2j)](c_0 + c_1i + c_2j) \\ &= [(a_0(b_0 + b_1i + b_2j) + a_1i(b_0 + b_1i + b_2j) \\ &\quad + a_2j(b_0 + b_1i + b_2j))] (c_0 + c_1i + c_2j) \\ &= [(a_0b_0 + a_0b_1i + a_0b_2j) + (a_1b_0i + a_1b_1j - a_1b_2) \\ &\quad + (a_2b_0j - a_2b_1 - a_2b_2i)] (c_0 + c_1i + c_2j) \\ &= [(a_0b_0 + a_0b_1i + a_0b_2j) + (a_1b_0i + a_1b_1j - a_1b_2) \\ &\quad + (a_2b_0j - a_2b_1 - a_2b_2i)] c_0 + \\ &\quad [(a_0b_0 + a_0b_1i + a_0b_2j) + (a_1b_0i + a_1b_1j - a_1b_2) \\ &\quad + (a_2b_0j - a_2b_1 - a_2b_2i)] c_1i + \\ &\quad [(a_0b_0 + a_0b_1i + a_0b_2j) + (a_1b_0i + a_1b_1j - a_1b_2) \\ &\quad + (a_2b_0j - a_2b_1 - a_2b_2i)] c_2j \\ &= [(a_0 + a_1i + a_2j) b_0c_0 + (a_0 + a_1i + a_2j)b_1c_0i \\ &\quad + (a_0 + a_1i + a_2j)b_2c_0j] + \\ &\quad [(a_0 + a_1i + a_2j)b_0c_1i + (a_0 + a_1i + a_2j) b_1ic_1i \\ &\quad + (a_0 + a_1i + a_2j)b_2jc_1i] + \\ &\quad [(a_0 + a_1i + a_2j)b_0c_2j + (a_0 + a_1i + a_2j) b_1ic_2j \\ &\quad + (a_0 + a_1i + a_2j)b_2jc_2j] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0c_0 + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1c_0\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2c_0\mathbf{j}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0c_1\mathbf{i} + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1c_1\mathbf{j} \\
&\quad - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2c_1] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0c_2\mathbf{j} - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1c_2 \\
&\quad - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2c_2\mathbf{i}] \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})[(b_0c_0 + b_1c_0\mathbf{i} + b_2c_0\mathbf{j}) + (b_0c_1\mathbf{i} \\
&\quad + b_1c_1\mathbf{j} - b_2c_1) + (b_0c_2\mathbf{j} - b_1c_2 - b_2c_2\mathbf{i})] \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})[(b_0c_0 - b_2c_1 - b_1c_2) + (b_1c_0 \\
&\quad + b_0c_1 - b_2c_2)\mathbf{i} + (b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2)\mathbf{j}] \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})[(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})(c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j})] \\
&= a(bc).
\end{aligned}$$

(iii). Akan ditunjukkan $(\mathbb{T}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif.

a. Distributif kanan $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

$$\begin{aligned}
a(b + c) &= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) [(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) \\
&\quad + (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j})] \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (b_2 + c_2)\mathbf{j}] \\
&= (a_0[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\mathbf{i} + (b_2 + c_2)\mathbf{j}] \\
&\quad + (a_1\mathbf{i}[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\mathbf{i} + (b_2 + c_2)\mathbf{j}] \\
&\quad + (a_2\mathbf{j}[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\mathbf{i} + (b_2 + c_2)\mathbf{j}]) \\
&= [(a_0b_0) + (a_0c_0) + (a_0b_1)\mathbf{i} + (a_0c_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0b_2)\mathbf{j} + (a_0c_2)\mathbf{j}] + [(a_1b_0)\mathbf{i} + (a_1c_0)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_1b_1)\mathbf{j} + (a_1c_1)\mathbf{j} - (a_1b_2) - (a_1c_2)] \\
&\quad + [(a_2b_0)\mathbf{j} + (a_2c_0)\mathbf{j} - (a_2b_1) - (a_2c_1) \\
&\quad - (a_2b_2)\mathbf{i} - (a_2c_2)\mathbf{i}] \\
&= [((a_0b_0) - (a_1b_2) - (a_2b_1)) + ((a_0b_1) \\
&\quad + (a_1b_0) - (a_2b_2))\mathbf{i} + ((a_0b_2) + (a_1b_1) \\
&\quad + (a_2b_0))\mathbf{j}] + [((a_0c_0) - (a_1c_2) - (a_2c_1)) \\
&\quad + ((a_0c_1) + (a_1c_0) - (a_2c_2))\mathbf{i} + ((a_0c_2) \\
&\quad + (a_1c_1) + (a_2c_0))\mathbf{j}] \\
&= (ab) + (ac).
\end{aligned}$$

b. Distributif kiri $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

$$\begin{aligned}
(a + b)c &= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})] \\
&\quad (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}) \\
&= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}] \\
&\quad (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}) \\
&= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}]c_0 \\
&\quad + [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}]c_1\mathbf{i} \\
&\quad + [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}]c_2\mathbf{j} \\
&= [(a_0c_0) + (b_0c_0) + (a_1c_0)\mathbf{i} + (b_1c_0)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_2c_0)\mathbf{j} + (b_2c_0)\mathbf{j}] + [(a_0c_1)\mathbf{i} + (b_0c_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_1c_1)\mathbf{j} + (b_1c_1)\mathbf{j} - (a_2c_1) - (b_2c_1)] \\
&\quad + [(a_0c_2)\mathbf{j} + (b_0c_2)\mathbf{j} - (a_1c_2) - (b_1c_2) \\
&\quad - (a_2c_2)\mathbf{i} - (b_2c_2)\mathbf{i}] \\
&= [(a_0c_0) - (a_1c_2) - (a_2c_1)] + [(a_0c_1) \\
&\quad + (a_1c_0) - (a_2c_2)]\mathbf{i} + [(a_0c_2) + (a_1c_1) \\
&\quad + (a_2c_0)]\mathbf{j} + [(b_0c_0) - (b_1c_2) - (b_2c_1)] \\
&\quad + [(b_0c_1) + (b_1c_0) - (b_2c_2)]\mathbf{i} + [(b_0c_2) \\
&\quad + (b_1c_1) + (b_2c_0)]\mathbf{j} \\
&= (ac) + (bc).
\end{aligned}$$

Karena ketiga syarat diatas terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa Trinion merupakan suatu gelanggang.

2.4. Quaternion

Himpunan bilangan quaternion yang disimbolkan oleh \mathbb{H} merupakan bilangan *hypercomplex* pertama yang ditemukan setelah bilangan kompleks. Simbol quaternion \mathbb{H} diambil dari nama matematikawan yang menemukannya, yaitu Sir Hamilton.

Definisi 2.4. *Himpunan bilangan quaternion didefinisikan sebagai kumpulan semua kombinasi linear dari satu bagian real dan tiga bagian imajiner yaitu $\mathbb{H} = \{q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$ yang memenuhi $\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$.*

2.4.1. Operasi Pada Quaternion

Misalkan p dan q merupakan bilangan quaternion dengan $p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$ dan $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$. Operasi penjumlahan dan perkalian pada Quaternion didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p + q &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}) + (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k} \end{aligned}$$

dan,

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ &= p_0(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) + p_1\mathbf{i}(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ &\quad + p_2\mathbf{j}(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) + p_3\mathbf{k}(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$, sehingga

$$\begin{aligned} &= (p_0q_0 + p_0q_1\mathbf{i} + p_0q_2\mathbf{j} + p_0q_3\mathbf{k}) + (p_1q_0\mathbf{i} - p_1q_1 + p_1q_2\mathbf{k} - p_1q_3\mathbf{j}) \\ &\quad + (p_2q_0\mathbf{j} - p_2q_1\mathbf{k} - p_2q_2 + p_2q_3\mathbf{i}) + (p_3q_0\mathbf{k} + p_3q_1\mathbf{j} - p_3q_2\mathbf{i} - p_3q_3) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} \\ &\quad + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)\mathbf{j} + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

2.4.2. Gelanggang Quaternion

Untuk menunjukkan bahwa Quaternion merupakan gelanggang berdasarkan **Definisi 2.2.**, maka dimisalkan $a, b, c \in \mathbb{H}$ dengan $a = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $b = b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, $c = c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$.

(i). Akan ditunjukkan $(\mathbb{H}, +)$ adalah grup komutatif.

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k} \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)\mathbf{i} + (b_2 + a_2)\mathbf{j} + (b_3 + a_3)\mathbf{k} \\ &= (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\ &= b + a. \end{aligned}$$

(ii). Akan ditunjukkan (\mathbb{H}, \cdot) bersifat asosiatif $(ab)c = a(bc)$.

$$\begin{aligned} (ab)c &= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})] \\ &\quad (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\ &= [a_0(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_1\mathbf{i}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &\quad + a_2\mathbf{j}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})] \\ &\quad (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\mathbf{i} - a_1b_1 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} - a_2b_2 + a_2b_3\mathbf{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} - a_3b_3)] (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&= [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\mathbf{i} - a_1b_1 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} - a_2b_2 + a_2b_3\mathbf{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} - a_3b_3)] c_0 + \\
&\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\mathbf{i} - a_1b_1 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} - a_2b_2 + a_2b_3\mathbf{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} - a_3b_3)] c_1\mathbf{i} + \\
&\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\mathbf{i} - a_1b_1 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} - a_2b_2 + a_2b_3\mathbf{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} - a_3b_3)] c_2\mathbf{j} + \\
&\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\mathbf{i} - a_1b_1 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} - a_2b_2 + a_2b_3\mathbf{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} - a_3b_3)] c_3\mathbf{k} \\
&= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_0c_0 + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_1c_0\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_2c_0\mathbf{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_3c_0\mathbf{k}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_0c_1\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_1\mathbf{i}c_1\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_2\mathbf{j}c_1\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_3\mathbf{k}c_1\mathbf{i}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_0c_2\mathbf{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_1\mathbf{i}c_2\mathbf{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_2\mathbf{j}c_2\mathbf{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_3\mathbf{k}c_2\mathbf{j}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) b_0c_3\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_1\mathbf{i}c_3\mathbf{k} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_2\mathbf{j}c_3\mathbf{k} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_3\mathbf{k}c_3\mathbf{k} \\
= & [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_0c_0 + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_1c_0\mathbf{i} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_2c_0\mathbf{j} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_3c_0\mathbf{k}] + \\
& [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_0c_1\mathbf{i} \\
& - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_1c_1 \\
& - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_2c_1\mathbf{k} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_3c_1\mathbf{j}] + \\
& [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_0c_2\mathbf{j} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_1c_2\mathbf{k} \\
& - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_2c_2 \\
& - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_3c_2\mathbf{i}] + \\
& [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_0c_3\mathbf{k} \\
& - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_1c_3\mathbf{j} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_2c_3\mathbf{i} \\
& - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_3c_3] \\
= & (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})[b_0c_0 + b_1c_0\mathbf{i} + b_2c_0\mathbf{j} + b_3c_0\mathbf{k}] \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})[b_0c_1\mathbf{i} - b_1c_1 - b_2c_1\mathbf{k} + b_3c_1\mathbf{j}] \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})[b_0c_2\mathbf{j} + b_1c_2\mathbf{k} - b_2c_2 - b_3c_2\mathbf{i}] \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})[b_0c_3\mathbf{k} - b_1c_3\mathbf{j} + b_2c_3\mathbf{i} - b_3c_3] \\
= & (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})[(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) \\
& + (b_1c_0 + b_0c_1 - b_3c_2 + b_2c_3)\mathbf{i} + (b_2c_0 + b_3c_1 + b_0c_2 \\
& - b_1c_3)\mathbf{j} + (b_3c_0 - b_2c_1 + b_1c_2 + b_0c_3)\mathbf{k}] \\
= & (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})[(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
& (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})] \\
= & a(bc).
\end{aligned}$$

(iii). Akan ditunjukkan $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif.

a. Distributif kanan $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

$$\begin{aligned}
a(b + c) = & (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})[(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
& + (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (b_2 + c_2)\mathbf{j} + (b_3 + c_3)\mathbf{k}] \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + c_0) \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1 + c_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_2 + c_2)\mathbf{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_3 + c_3)\mathbf{k} \\
&= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_0 \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_1\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_2\mathbf{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})b_3\mathbf{k}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})c_0 \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})c_1\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})c_2\mathbf{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})c_3\mathbf{k}] \\
&= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} \\
&\quad + b_3\mathbf{k})] + [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
&\quad (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})] \\
&= (ab) + (ac).
\end{aligned}$$

b. Distributif kiri $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

$$\begin{aligned}
(a + b)c &= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} \\
&\quad + b_3\mathbf{k})] (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} \\
&\quad + (a_3 + b_3)\mathbf{k}] (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&= (a_0 + b_0)(c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_1 + b_1)\mathbf{i} (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_2 + b_2)\mathbf{j} (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_3 + b_3)\mathbf{k} (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})(c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&= (ac) + (bc).
\end{aligned}$$

Karena ketiga syarat diatas terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa Quaternion merupakan suatu gelanggang.

2.5. Modul dan Bimodul

Dalam pembentukan modul perlu melibatkan suatu ring atau gelanggang dengan elemen satuan. Berikut akan dijelaskan mengenai perbedaan antara modul dan bimodul.

2.5.1. Modul

Modul adalah salah satu bentuk struktur aljabar yang melibatkan suatu gelanggang dengan elemen satuan. Modul terbagi menjadi dua bagian yaitu modul kiri dan modul kanan.

Definisi 2.5.1.a. Misalkan R adalah gelanggang dan 1 merupakan identitas perkaliannya. M disebut modul kiri atas R jika memenuhi :

- (i). $(M, +)$ merupakan grup komutatif.
- (ii). Untuk setiap $a, b \in R$ dan $x, y \in M$ dengan operasi perkalian $\cdot : R \times M \rightarrow M$, maka berlaku :
 1. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
 2. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
 3. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

Definisi 2.5.1.b. Misalkan S adalah gelanggang dan 1 merupakan identitas perkaliannya. M disebut modul kanan atas S jika memenuhi :

- (i). $(M, +)$ merupakan grup komutatif.
- (ii). Untuk setiap $a, b \in S$ dan $x, y \in M$ dengan operasi perkalian $\cdot : M \times R \rightarrow M$, maka berlaku :
 1. $(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$
 2. $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$
 3. $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$

2.5.2. Bimodul

Dalam aljabar abstrak, bimodul adalah suatu grup komutatif yang memiliki modul kiri R dan modul kanan S , sedemikian sehingga perkalian dari kanan dan kiri memiliki sifat kompatibilitas yaitu untuk setiap $r \in R, m \in M$, dan $s \in S$ memenuhi sifat $r(ms) = (rm)s$. Suatu (R, R) -bimodul juga diketahui sebagai R -bimodul.

Definisi 2.5.2. Jika R dan S adalah dua gelanggang, maka (R, S) -bimodul adalah suatu grup komutatif $(M, +)$ sedemikian sehingga :

1. M adalah modul kiri R dan modul kanan S .
2. Untuk setiap $r \in R, s \in S$ dan $m \in M$ maka $(rm)s = r(ms)$.

2.6. Gelanggang McCoy

Secara umum, Gelanggang polinom R atau biasa disimbolkan sebagai $R[x]$ disebut gelanggang McCoy, jika terdapat dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^m g_j x^j \in R[x] \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka terdapat $r \in R \setminus \{0\}$ yang memenuhi $f(x)r = 0$. Dengan aturan perkalian yang berlaku adalah aturan perkalian secara umum.

2.6.1. Gelanggang McCoy Miring

Gelanggang McCoy miring adalah salah satu bentuk dari gelanggang polinom miring sehingga aturan perkaliannya juga mengikuti aturan perkalian dari gelanggang polinom miring yaitu $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Definisi 2.6.1.a. Misalkan $R[x; \sigma]$ adalah suatu gelanggang polinom miring dengan σ adalah endomorfisma gelanggang. Gelanggang R disebut sebagai σ - skew McCoy jika terdapat dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^m g_j x^j \in R[x; \sigma] \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka terdapat $c \in R \setminus \{0\}$ yang memenuhi $f(x)c = 0$.

Contoh 2.6.1.a. Misalkan \mathbb{Z}_4 adalah gelanggang bilangan bulat positif modulo 4 dengan bentuk sebagai berikut :

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$$

Misalkan $\sigma : R \rightarrow R$ adalah suatu endomorfisma yang didefinisikan sebagai :

$$\sigma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Misalkan, pilih

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad \text{dan} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2$$

Sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \right] \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 \right] \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x^2 \\
 &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^3 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Maka, terdapat $c = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ yang memenuhi

$$\begin{aligned}
 f(x)c &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Maka, disimpulkan bahwa $R[x; \sigma]$ dengan $R = \mathbb{Z}_4$ merupakan gelanggang σ -skew McCoy.

Definisi 2.6.1.b. Misalkan $R[x; \sigma]$ adalah suatu gelanggang polinom miring dengan σ adalah endomorfisma gelanggang. Gelanggang R disebut gelanggang **Gelanggang σ -skew π -McCoy** jika terdapat dua polinomial $f(x)$ dan $g(x) \in R[x; \sigma] \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) \in N(R[x; \sigma])$ dimana $N(R[x; \sigma])$ adalah himpunan semua elemen nilpoten dari $R[x; \sigma]$. Maka terdapat $c \in R \setminus \{0\}$ yang memenuhi $f(x)c \in N(R[x; \sigma])$.

Contoh 2.6.1.b. mengikut pada **Contoh 2.6.1.a.** dimana dimisalkan $R = \mathbb{Z}_4$ dengan

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad \text{dan} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2$$

Selanjutnya akan dicari semua elemen nilpoten dari \mathbb{Z}_4 . Elemen $a \in \mathbb{Z}_4$ disebut elemen nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = 0$.

Dalam gelanggang bilangan bulat positif modulo 4 (\mathbb{Z}_4) hanya terdapat dua elemen nilpoten yang memenuhi syarat yaitu 0 dan 2. Sehingga,

$$f(x)g(x) \in N(R[x; \sigma])$$

$$f(x)g(x) \in 0$$

berdasarkan **Contoh 2.6.1.a.** maka dapat disimpulkan bahwa Gelanggang bilangan bulat positif modulo 4 (\mathbb{Z}_4) merupakan Gelanggang σ - skew π - McCoy.

2.7. Gelanggang Armendariz

Secara umum, Gelanggang $R[x]$ disebut gelanggang armendariz jika terdapat dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^m g_j x^j \in R[x] \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap $i, j \in \mathbb{R}$. Dengan aturan perkalian yang berlaku adalah aturan perkalian secara umum.

2.7.1. Gelanggang Armendariz Miring

Gelanggang Armendariz Miring merupakan salah satu bentuk dari gelanggang polinom miring sehingga aturan perkaliannya juga mengikuti aturan perkalian gelanggang polinom miring yaitu $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Definisi 2.7.1.a. Suatu gelanggang polinom miring $R[x; \sigma]$ disebut sebagai gelanggang σ - skew Armendariz jika dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^m g_j x^j \in R[x; \sigma] \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka $f_i g_j = 0$ untuk setiap $0 \leq i \leq n$ dan $0 \leq j \leq m$.

Contoh 2.7.1.a. Misalkan, $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$ dengan $\sigma : R \rightarrow R$ adalah suatu endomorfisma yang didefinisikan sebagai:

$$\sigma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Misalkan, pilih

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \text{ dan } g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x^2$$

Sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \right] \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x^2 \right] \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x^2 \\
 &\quad + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x^3 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa untuk setiap f_i dan g_j dimana $i = 0, 1$ dan $j = 0, 1$ memenuhi syarat $f_i g_j = 0$. Maka, dapat disimpulkan bahwa $R[x; \sigma]$ dengan $R = \mathbb{Z}_6$ merupakan gelanggang σ -skew Armendariz.

Definisi 2.7.1.b. Misalkan $R[x; \sigma, \delta]$ adalah suatu gelanggang polinom mirng dengan σ adalah endomorfisma gelanggang dan δ adalah σ -derivatif. Gelanggang R disebut sebagai **Gelanggang σ -skew π -Armendariz** jika dua polinomial $f(x)$ dan $g(x) \in R[x; \sigma, \delta] \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) \in N(R[x; \sigma, \delta])$, maka $f_i g_j \in N(R)$ untuk setiap $0 \leq i \leq n$ dan $0 \leq j \leq m$.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Pada penelitian ini terdapat beberapa tahapan dalam mengkonstruksi Gelanggang McCoy dan Gelanggang Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal antara lain :

1. Mengkonstruksi (R,S) -bimodul.
2. Mengkonstruksi Gelanggang Matriks Segitiga Formal.
3. Mengkonstruksi endmorfisma pada Gelanggang Matriks Segitiga Formal.
4. Membuktikan :
 - (i). Gelanggang σ -skew McCoy.
 - (ii). Gelanggang σ -skew π -McCoy.
 - (iii). Gelanggang σ -skew Armendariz.
 - (iv). Gelanggang σ -skew π -Armendariz.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai hasil penelitian yang diperoleh menggunakan teori dari tinjauan pustaka dan berisi ulasan jawaban dari rumusan masalah.

4.1. Modul dan Bimodul dari Trinion dan Quaternion

Bimodul M merupakan suatu grup komutatif yang memiliki modul kiri R dan modul kanan S yang berbeda. Dalam tesis ini, gelanggang R yang digunakan adalah gelanggang Trinion sedangkan untuk gelanggang S yang digunakan adalah gelanggang Quaternion. Sehingga dapat disimpulkan, bimodul M merupakan grup komutatif yang memiliki modul kiri berasal dari gelanggang Trinion dan modul kanan yang berasal dari gelanggang Quaternion.

4.1.1. Modul Kiri Trinion

Setiap gelanggang pasti setidaknya memiliki satu modul, yaitu dirinya sendiri. Sama halnya dengan gelanggang Trinion. Pada tesis ini, modul kiri atas Trinion yang digunakan adalah gelanggang Trinion itu sendiri. Agar memudahkan perhitungan, gelanggang Trinion disimbolkan sebagai R dan modul kiri atas Trinion disimbolkan sebagai $({}^R M)$. Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa Trinion $({}^R M)$ merupakan modul kiri atas Trinion, maka harus memenuhi beberapa syarat seperti yang dijelaskan pada **Definisi 2.5.1.a.**

- (i). Akan ditunjukkan $({}^R M, +)$ merupakan grup komutatif.

$$\begin{aligned}
 x + y &= (x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}) + (y_0 + y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}) \\
 &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) \mathbf{i} + (x_2 + y_2) \mathbf{j} \\
 &= (y_0 + x_0) + (y_1 + x_1) \mathbf{i} + (y_2 + x_2) \mathbf{j} \\
 &= (y_0 + y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}) + (x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}) \\
 &= y + x.
 \end{aligned}$$

- (ii). Untuk setiap $a, b \in R$ dan $x, y \in {}^R M$ dengan operasi perkalian

$$\cdot : R \times {}^R M \rightarrow {}^R M, \text{ akan ditunjukkan :}$$

$$\begin{aligned}
 1. \quad a \cdot (x + y) &= (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) \cdot \\
 &\quad [(x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}) + (y_0 + y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j})] \\
 &= (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j}] \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (x_0 + y_0) \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (x_1 + y_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (x_2 + y_2)\mathbf{j} \\
&= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot x_0 \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot x_1\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot x_2\mathbf{j}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot y_0 \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot y_1\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot y_2\mathbf{j}] \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&\quad + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) \\
&= a \cdot x + a \cdot y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad (a + b) \cdot x &= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})] \cdot \\
&\quad (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}] \cdot \\
&\quad (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&= (a_0 + b_0) \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&\quad + (a_1 + b_1)\mathbf{i} \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&\quad + (a_2 + b_2)\mathbf{j} \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&= [a_0 \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&\quad + a_1\mathbf{i} \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&\quad + a_2\mathbf{j} \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j})] + \\
&\quad [b_0 \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&\quad + b_1\mathbf{i} \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&\quad + b_2\mathbf{j} \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j})] \\
&= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) + \\
&\quad (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&= a \cdot x + b \cdot x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad (ab) \cdot x &= [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})] \\
&\quad \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&= [a_0(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) + a_1\mathbf{i}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_2\mathbf{j}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})] \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
= & [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j}) + (a_1b_0\mathbf{i} + a_1b_1\mathbf{j} - a_1b_2) \\
& + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1 - a_2b_2\mathbf{i})] \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
= & [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j}) + (a_1b_0\mathbf{i} + a_1b_1\mathbf{j} - a_1b_2) \\
& + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1 - a_2b_2\mathbf{i})] \cdot x_0 + \\
& [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j}) + (a_1b_0\mathbf{i} + a_1b_1\mathbf{j} - a_1b_2) \\
& + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1 - a_2b_2\mathbf{i})] \cdot x_1\mathbf{i} + \\
& [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j}) + (a_1b_0\mathbf{i} + a_1b_1\mathbf{j} - a_1b_2) \\
& + (a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1 - a_2b_2\mathbf{i})] \cdot x_2\mathbf{j} \\
= & [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0 \cdot x_0 + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1\mathbf{i} \cdot x_0 \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2\mathbf{j} \cdot x_0] + \\
& [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0 \cdot x_1\mathbf{i} + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1\mathbf{i} \cdot x_1\mathbf{i} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2\mathbf{j} \cdot x_1\mathbf{i}] + \\
& [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0 \cdot x_2\mathbf{j} + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1\mathbf{i} \cdot x_2\mathbf{j} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2\mathbf{j} \cdot x_2\mathbf{j}] \\
= & [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0 \cdot x_0 + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1 \cdot x_0\mathbf{i} \\
& + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2 \cdot x_0\mathbf{j}] + \\
& [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0 \cdot x_1\mathbf{i} + (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1 \cdot x_1\mathbf{j} \\
& - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2 \cdot x_1] + \\
& [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_0 \cdot x_2\mathbf{j} - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_1 \cdot x_2 \\
& - (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})b_2 \cdot x_2\mathbf{i}] \\
= & (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot [(b_0 \cdot x_0 + b_1 \cdot x_0\mathbf{i} + b_2 \cdot x_0\mathbf{j}) \\
& + (b_0 \cdot x_1\mathbf{i} + b_1 \cdot x_1\mathbf{j} - b_2 \cdot x_1) \\
& + (b_0 \cdot x_2\mathbf{j} - b_1 \cdot x_2 - b_2 \cdot x_2\mathbf{i})] \\
= & (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot [(b_0 \cdot x_0 - b_2 \cdot x_1 - b_1 \cdot x_2) \\
& + (b_1 \cdot x_0 + b_0 \cdot x_1 - b_2 \cdot x_2)\mathbf{i} \\
& + (b_2 \cdot x_0 + b_1 \cdot x_1 + b_0 \cdot x_2)\mathbf{j}] \\
= & (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot [(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j})] \\
= & a \cdot (b \cdot x).
\end{aligned}$$

Karena semua syarat terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa modul kiri atas gelanggang Trinion adalah dirinya sendiri.

4.1.2. Modul Kanan Quaternion

Sama halnya dengan Modul Kiri atas Trinion pada 4.1.1., modul kanan atas Quaternion yang digunakan adalah gelanggang Quaternion itu sendiri. Agar memudahkan perhitungan, gelanggang Quaternion disimbolkan sebagai S dan modul kanan atas Quaternion disimbolkan sebagai M^S . Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa Quaternion M^S merupakan modul kanan atas Quaternion, maka harus memenuhi beberapa syarat seperti yang dijelaskan pada **Definisi 2.5.1.b.**

(i). Akan ditunjukkan $(M^S, +)$ merupakan grup komutatif.

$$\begin{aligned}
 x + y &= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) + (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\
 &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k} \\
 &= (y_0 + x_0) + (y_1 + x_1)\mathbf{i} + (y_2 + x_2)\mathbf{j} + (y_3 + x_3)\mathbf{k} \\
 &= (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \\
 &= y + x.
 \end{aligned}$$

(ii). Untuk setiap $a, b \in S$ dan $x, y \in M^S$ dengan operasi perkalian $\cdot : M^S \times R \rightarrow M^S$, akan ditunjukkan :

$$\begin{aligned}
 1. (x + y) \cdot a &= [(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) + (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})] \\
 &\quad \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &= [(x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k}] \\
 &\quad \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &= (x_0 + y_0) \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + (x_1 + y_1)\mathbf{i} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + (x_2 + y_2)\mathbf{j} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + (x_3 + y_3)\mathbf{k} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &= [x_0 \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + x_1\mathbf{i} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + x_2\mathbf{j} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + x_3\mathbf{k} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})] + \\
 &\quad [y_0 \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + y_1\mathbf{i} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + y_2\mathbf{j} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
 &\quad + y_3\mathbf{k} \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
&= x \cdot a + y \cdot a.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad x \cdot (a + b) &= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})] \\
&= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}] \\
&= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (a_0 + b_0) \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (a_1 + b_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (a_2 + b_2)\mathbf{j} \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (a_3 + b_3)\mathbf{k} \\
&= [(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot a_0 \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot a_1\mathbf{i} \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot a_2\mathbf{j} \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot a_3\mathbf{k}] + \\
&\quad [(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot b_0 \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot b_1\mathbf{i} \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot b_2\mathbf{j} \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot b_3\mathbf{k}] \\
&= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= x \cdot a + x \cdot b.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad x \cdot (ab) &= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot \\
&\quad [(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})] \\
&= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot \\
&\quad [a_0(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + a_1\mathbf{i}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + a_2\mathbf{j}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + a_3\mathbf{k}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})] \\
&= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot \\
&\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\mathbf{i} - a_1b_1 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_2 b_0 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{k} - a_2 b_2 + a_2 b_3 \mathbf{i}) \\
& + (a_3 b_0 \mathbf{k} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i} - a_3 b_3) \\
= & x_0 \cdot [(a_0 b_0 + a_0 b_1 \mathbf{i} + a_0 b_2 \mathbf{j} + a_0 b_3 \mathbf{k}) \\
& + (a_1 b_0 \mathbf{i} - a_1 b_1 + a_1 b_2 \mathbf{k} - a_1 b_3 \mathbf{j}) \\
& + (a_2 b_0 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{k} - a_2 b_2 + a_2 b_3 \mathbf{i}) \\
& + (a_3 b_0 \mathbf{k} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i} - a_3 b_3)] + \\
& x_1 \mathbf{i} \cdot [(a_0 b_0 + a_0 b_1 \mathbf{i} + a_0 b_2 \mathbf{j} + a_0 b_3 \mathbf{k}) \\
& + (a_1 b_0 \mathbf{i} - a_1 b_1 + a_1 b_2 \mathbf{k} - a_1 b_3 \mathbf{j}) \\
& + (a_2 b_0 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{k} - a_2 b_2 + a_2 b_3 \mathbf{i}) \\
& + (a_3 b_0 \mathbf{k} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i} - a_3 b_3)] + \\
& x_2 \mathbf{j} \cdot [(a_0 b_0 + a_0 b_1 \mathbf{i} + a_0 b_2 \mathbf{j} + a_0 b_3 \mathbf{k}) \\
& + (a_1 b_0 \mathbf{i} - a_1 b_1 + a_1 b_2 \mathbf{k} - a_1 b_3 \mathbf{j}) \\
& + (a_2 b_0 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{k} - a_2 b_2 + a_2 b_3 \mathbf{i}) \\
& + (a_3 b_0 \mathbf{k} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i} - a_3 b_3)] + \\
& x_3 \mathbf{k} \cdot [(a_0 b_0 + a_0 b_1 \mathbf{i} + a_0 b_2 \mathbf{j} + a_0 b_3 \mathbf{k}) \\
& + (a_1 b_0 \mathbf{i} - a_1 b_1 + a_1 b_2 \mathbf{k} - a_1 b_3 \mathbf{j}) \\
& + (a_2 b_0 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{k} - a_2 b_2 + a_2 b_3 \mathbf{i}) \\
& + (a_3 b_0 \mathbf{k} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i} - a_3 b_3)] \\
= & [x_0 \cdot a_0 (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_0 \cdot a_1 \mathbf{i} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_0 \cdot a_2 \mathbf{j} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_0 \cdot a_3 \mathbf{k} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})] + \\
& [x_1 \mathbf{i} \cdot a_0 (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_1 \mathbf{i} \cdot a_1 \mathbf{i} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_1 \mathbf{i} \cdot a_2 \mathbf{j} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_1 \mathbf{i} \cdot a_3 \mathbf{k} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})] + \\
& [x_2 \mathbf{j} \cdot a_0 (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_2 \mathbf{j} \cdot a_1 \mathbf{i} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_2 \mathbf{j} \cdot a_2 \mathbf{j} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_2 \mathbf{j} \cdot a_3 \mathbf{k} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})] + \\
& [x_3 \mathbf{k} \cdot a_0 (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_3 \mathbf{k} \cdot a_1 \mathbf{i} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_3 \mathbf{k} \cdot a_2 \mathbf{j} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_3 \mathbf{k} \cdot a_3 \mathbf{k} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})] \\
= & [x_0 \cdot a_0 (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_0 \cdot a_1 \mathbf{i} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_0 \cdot a_2 \mathbf{j} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_0 \cdot a_3 \mathbf{k} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})] + \\
& [x_1 \cdot a_0 \mathbf{i} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& - x_1 \cdot a_1 (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_1 \cdot a_2 \mathbf{k} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& - x_1 \cdot a_3 \mathbf{j} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})] + \\
& [x_2 \cdot a_0 \mathbf{j} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& - x_2 \cdot a_1 \mathbf{k} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& - x_2 \cdot a_2 (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_2 \cdot a_3 \mathbf{i} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})] + \\
& [x_3 \cdot a_0 \mathbf{k} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& + x_3 \cdot a_1 \mathbf{j} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& - x_3 \cdot a_2 \mathbf{i} (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
& - x_3 \cdot a_3 (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})] \\
= & [(x_0 \cdot a_0 + x_0 \cdot a_1 \mathbf{i} + x_0 \cdot a_2 \mathbf{j} + x_0 \cdot a_3 \mathbf{k}) \\
& + (x_1 \cdot a_0 \mathbf{i} - x_1 \cdot a_1 + x_1 \cdot a_2 \mathbf{k} - x_1 \cdot a_3 \mathbf{j}) \\
& + (x_2 \cdot a_0 \mathbf{j} - x_2 \cdot a_1 \mathbf{k} - x_2 \cdot a_2 + x_2 \cdot a_3 \mathbf{i}) \\
& + (x_3 \cdot a_0 \mathbf{k} + x_3 \cdot a_1 \mathbf{j} - x_3 \cdot a_2 \mathbf{i} - x_3 \cdot a_3)] \\
& \cdot (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
= & [(x_0 \cdot a_0 - x_1 \cdot a_1 - x_2 \cdot a_2 - x_3 \cdot a_3) \\
& + (x_0 \cdot a_1 + x_1 \cdot a_0 + x_2 \cdot a_3 - x_3 \cdot a_2) \mathbf{i} \\
& + (x_0 \cdot a_2 - x_1 \cdot a_3 + x_2 \cdot a_0 + x_3 \cdot a_1) \mathbf{j} \\
& + (x_0 \cdot a_3 + x_1 \cdot a_2 - x_2 \cdot a_1 + x_3 \cdot a_0) \mathbf{k}] \\
& \cdot (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
= & [(x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}) \cdot (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k})] \\
& \cdot (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
= & (x \cdot a) \cdot b.
\end{aligned}$$

Karena semua syarat terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa modul kanan atas gelanggang Quaternion adalah dirinya sendiri.

4.1.3. Bimodul Trinion dan Quaternion

Setelah memperoleh modul kiri Trinion pada 4.1.1. dan modul kanan Quaternion pada 4.1.2., selanjutnya akan dibentuk suatu (R, S) -Bimodul dimana R merupakan gelanggang Trinion yang mempunyai modul kiri dengan bentuk Trinion secara umum dan S merupakan gelanggang Quaternion yang mempunyai modul kanan dengan bentuk Quaternion secara umum. Agar memudahkan perhitungan, (R, S) -Bimodul dapat disimbolkan sebagai M .

Teorema 4.1.3. *Himpunan M merupakan sekumpulan Bimodul antara Trinion dan Quaternion dengan bentuk :*

$$M = \{ (r, s) | r \in \mathbb{T}, s \in \mathbb{H} \}$$

dimana operasi penjumlahan dan perkaliannya mengikut pada operasi penjumlahan dan perkalian dalam Trinion dan Quaternion. Untuk setiap $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in M$, maka berlaku :

1. $(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$.
2. $(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 \cdot r_2, s_1 \cdot s_2)$.

4.2. Gelanggang Matriks Segitiga Formal

Pada subbab 2.1. telah dijelaskan mengenai bentuk umum dari Matriks Segitiga Formal. Dalam tesis ini, matriks segitiga formal yang digunakan berordo 2×2 dengan bentuk sebagai berikut :

$$\mathcal{T}(R, M, S) = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \middle| r \in R, m \in M, s \in S \right\}.$$

Dalam tesis ini, elemen-elemen dalam matriks segitiga formal yang digunakan ialah R yang merupakan Trinion, S adalah Quaternion, dan M adalah (R, S) -Bimodul.

Teorema 4.2. *Misalkan \mathcal{T} adalah matriks segitiga formal yang berbentuk :*

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} (r_0 + r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j}) & (m_0 + m_1 \mathbf{i} + m_2 \mathbf{j}, n_0 + n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right\}$$

dengan aturan penjumlahan dan perkaliannya mengikut pada aturan perkalian Trinion dan Quaternion. Maka, \mathcal{T} merupakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal.

Bukti :

Untuk menunjukkan bahwa Matriks Segitiga Formal \mathcal{T} merupakan gelanggang berdasarkan **Definisi 2.2.**, maka $a, b, c \in \mathcal{T}$ dengan

$$a = \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) & (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_a,$$
$$b = \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) & (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_b,$$
$$c = \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) & (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_c.$$

(i). Akan ditunjukkan $(\mathcal{T}, +)$ adalah grup komutatif.

$$a + b = \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) & (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_a$$
$$+ \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) & (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_b.$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka penjumlahan matriks diatas akan dipisah berdasarkan elemen matriks.

$$\mathbf{a}_{11} = \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a\} + \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_b\}.$$

Berdasar pada **2.3.2.**, maka dapat diperoleh hasil :

$$= \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_b\} + \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a\}.$$

$$\mathbf{a}_{22} = \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a\} + \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_b\}.$$

Berdasar pada **2.4.2.**, maka dapat diperoleh hasil :

$$= \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_b\} + \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a\}.$$

$$\mathbf{a}_{12} = \{(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a\}$$
$$+ \{(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b\}.$$

Berdasar pada **Teorema 4.1.3.**, maka diperoleh

$$= [(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_a + (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_b]$$
$$, [(n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a + (n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b].$$

Sehingga,

$$= [(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_b + (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_a]$$
$$, [(n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b + (n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a].$$

Karena semua elemen dalam matriks memenuhi $a + b = b + a$, maka terbukti bahwa $(\mathcal{T}, +)$ merupakan grup komutatif.

(ii). Akan ditunjukkan (\mathcal{T}, \cdot) bersifat asosiatif $(ab)c = a(bc)$.

$$(ab)c = \left[\left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_a \right. \\ \left. \left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_b \right] \\ \left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_c.$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka perkalian matriks diatas akan dipisah berdasarkan elemen matriks.

$$\mathbf{a}_{11} = \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_b\} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_c.$$

Berdasar pada **2.3.2.**, maka dapat diperoleh hasil :

$$= (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_b (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_c\}.$$

$$\mathbf{a}_{22} = \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_b\} \\ (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_c.$$

Berdasar pada **2.4.2.**, maka dapat diperoleh hasil :

$$= (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a \\ \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_b (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_c\}.$$

$$\mathbf{a}_{12} = \{(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a \\ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b\} \\ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_c.$$

Berdasar pada **Teorema 4.1.3.**, maka diperoleh

$$= [\{(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_a (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_b\} (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_c] \\ , [(n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a (n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b \\ (n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_c].$$

Sehingga,

$$= [(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_a \{(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_b (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j})_c\}] \\ , [(n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a \\ (n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b (n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_c].$$

Karena semua elemen dalam matriks memenuhi $(ab)c = a(bc)$, maka terbukti bahwa $(\mathcal{T}, +)$ bersifat asosiatif.

(iii). Akan ditunjukkan $(\mathcal{T}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif.

1. Distributif Kanan $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

$$a(b + c) = \left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_a$$

$$\left[\left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_b \right.$$

$$\left. + \left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_c \right].$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka perkalian matriks diatas akan dipisah berdasarkan elemen matriks.

$$\mathbf{a}_{11} = (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a \{ (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_b + (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_c \}.$$

Berdasar pada **2.3.2.**, maka dapat diperoleh hasil :

$$= \{ (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_b \} + \{ (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_c \}.$$

$$\mathbf{a}_{22} = (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a$$

$$\{ (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_b + (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_c \}.$$

Berdasar pada **2.4.2.**, maka dapat diperoleh hasil :

$$= \{ (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_b \}$$

$$+ \{ (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_c \}.$$

$$\mathbf{a}_{12} = (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a$$

$$\{ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b$$

$$+ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_c \}.$$

Berdasar pada **Teorema 4.1.3.**, maka diperoleh :

$$= \{ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a$$

$$(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b \}$$

$$+ \{ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a$$

$$(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_c \}.$$

2. Distributif Kiri $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

$$(a + b)c = \left[\left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_a \right.$$

$$\left. + \left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_b \right]$$

$$\left(\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right)_c.$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka perkalian matriks diatas akan dipisah berdasarkan elemen matriks.

$$\mathbf{a}_{11} = \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a + (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_b\}(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_c.$$

Berdasar pada **2.3.2.**, maka dapat diperoleh hasil :

$$= \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_a(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_c\} + \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_b(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_c\}.$$

$$\mathbf{a}_{22} = \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a + (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_b\} \\ (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_c.$$

Berdasar pada **2.4.2.**, maka dapat diperoleh hasil :

$$= \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_a(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_c\} \\ + \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_b(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_c\}.$$

$$\mathbf{a}_{12} = \{(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a \\ + (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b\} \\ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_c.$$

Berdasar pada **Teorema 4.1.3.**, maka diperoleh

$$= \{(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_a \\ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_c\} \\ + \{(m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_b \\ (m_0 + m_1\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}, n_0 + n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})_c\}.$$

Karena semua elemen dalam matriks memenuhi hukum distributif kanan dan distributif kiri, maka terbukti bahwa $(\mathcal{T}, +)$ bersifat distributif.

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa matriks segitiga formal \mathcal{T} adalah gelanggang yang juga dapat disebut sebagai Gelanggang Matriks Segitiga Formal.

4.3. Endomorfisma Gelanggang Matriks Segitiga Formal

Endomorfisma merupakan salah satu syarat wajib dalam pembentukan gelanggang polinom miring. Untuk membuktikan kebenaran suatu endomorfisma, maka perlu memenuhi beberapa syarat seperti yang dijelaskan pada **Definisi 2.2.1.a.**

4.3.1. Endomorfisma Gelanggang Trinion

Berikut adalah endomorfisma pada gelanggang Trinion.

Teorema 4.3.1. *Jika $\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ dan $\mathbf{b} = b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ merupakan Trinion dengan $\alpha(\mathbf{a}) = (a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j})$ dan $\alpha(\mathbf{b}) = (b_0 - b_2\mathbf{i} - b_1\mathbf{j})$, maka berlaku dua syarat, yaitu :*

1. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}) + \alpha(\mathbf{b})$.
2. $\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}) \cdot \alpha(\mathbf{b})$.

Bukti :

Ambil \mathbf{a} dan \mathbf{b} sebarang.

1.
$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \alpha((a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})) \\ &= \alpha((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}) \\ &= (a_0 + b_0) - (a_2 + b_2)\mathbf{i} - (a_1 + b_1)\mathbf{j} \\ &= (a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j}) + (b_0 - b_2\mathbf{i} - b_1\mathbf{j}) \\ &= \alpha(\mathbf{a}) + \alpha(\mathbf{b}). \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \alpha((a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})) \\ &= \alpha((a_0 \cdot b_0 - a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \\ &\quad + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 - a_2 \cdot b_2)\mathbf{i} \\ &\quad + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0)\mathbf{j}) \\ &= (a_0 \cdot b_0 - a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \\ &\quad - (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0)\mathbf{i} \\ &\quad - (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 - a_2 \cdot b_2)\mathbf{j} \\ &= (a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j}) \cdot (b_0 - b_2\mathbf{i} - b_1\mathbf{j}) \\ &= \alpha(\mathbf{a}) \cdot \alpha(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Karena kedua syarat terpenuhi, maka $\alpha(\mathbf{a}) = (a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j})$ dan $\alpha(\mathbf{b}) = (b_0 - b_2\mathbf{i} - b_1\mathbf{j})$ merupakan suatu endomorfisma pada gelanggang Trinion.

4.3.2. Endomorfisma Gelanggang Quaternion

Berikut adalah salah satu endomorfisma pada gelanggang Quaternion.

Teorema 4.3.2. *Jika $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{y} = y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$ merupakan salah satu bilangan Quaternion dengan $\beta(\mathbf{x}) = (x_0 - x_3\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_1\mathbf{k})$ dan $\beta(\mathbf{y}) = (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k})$, maka berlaku dua syarat, yaitu :*

1. $\beta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \beta(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{y})$.
2. $\beta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \beta(\mathbf{x}) \cdot \beta(\mathbf{y})$.

Bukti :

Ambil \mathbf{x} dan \mathbf{y} sebarang.

1.
$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \beta((x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) + (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})) \\ &= \beta((x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_0 + y_0) - (x_3 + y_3)\mathbf{i} - (x_2 + y_2)\mathbf{j} - (x_1 + y_1)\mathbf{k} \\
&= (x_0 - x_3\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_1\mathbf{k}) + (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k}) \\
&= \beta(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \beta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= \beta((x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})) \\
&= \beta((x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3) \\
&\quad + (x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0 + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2)\mathbf{i} \\
&\quad + (x_0 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_0 + x_3 \cdot y_1)\mathbf{j} \\
&\quad + (x_0 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_0)\mathbf{k}) \\
&= (x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3) \\
&\quad - (x_0 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_0)\mathbf{i} \\
&\quad - (x_0 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_0 + x_3 \cdot y_1)\mathbf{j} \\
&\quad - (x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0 + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2)\mathbf{k} \\
&= (x_0 - x_3\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_1\mathbf{k}) \cdot (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k}) \\
&= \beta(\mathbf{x}) \cdot \beta(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Karena kedua syarat terpenuhi, maka $\beta(\mathbf{x}) = (x_0 - x_3\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_1\mathbf{k})$ dan $\beta(\mathbf{y}) = (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k})$ merupakan suatu endomorfisma pada gelanggang Quaternion.

4.3.3. Endomorfisma Bimodul Trinion dan Quaternion

Karena Bimodul M merupakan gabungan dari modul kiri Trinion dan modul kanan Quaternion, maka endomorfisma yang digunakan juga merupakan gabungan dari endomorfisma Trinion dan endomorfisma Quaternion.

Teorema 4.3.3. *Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{T}$ dimana $\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ dengan $\alpha(\mathbf{a}) = (a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j})$, $\alpha(\mathbf{b}) = (b_0 - b_2\mathbf{i} - b_1\mathbf{j})$, dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$ dimana $\mathbf{x} = (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k})$, $\mathbf{y} = (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})$ dengan $\beta(\mathbf{x}) = (x_0 - x_3\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_1\mathbf{k})$ dan $\beta(\mathbf{y}) = (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k})$, maka berlaku dua syarat, yaitu :*

1. $\gamma((\mathbf{a}, \mathbf{x}) + (\mathbf{b}, \mathbf{y})) = \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{b}, \mathbf{y})$
2. $\gamma((\mathbf{a}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{y})) = \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \cdot \gamma(\mathbf{b}, \mathbf{y})$

dimana, $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = (\alpha(\mathbf{a}), \beta(\mathbf{x}))$ dan $\gamma(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = (\alpha(\mathbf{b}), \beta(\mathbf{y}))$.

4.4. Pengkonstruksian Gelanggang Matriks Segitiga Formal

Gelanggang Matriks Segitiga Formal selanjutnya akan dikonstruksi menjadi Gelanggang McCoy Miring dan Gelanggang Armendariz Miring dengan menggunakan endomorfisma yang telah diperoleh pada **subbab 4.3**.

4.4.1. Gelanggang σ -Skew McCoy dan Gelanggang σ -Skew Armendariz

Berikut adalah hasil pengkonstruksian Gelanggang Matriks Segitiga Formal menjadi Gelanggang σ -Skew McCoy dan Gelanggang σ -Skew Armendariz.

Teorema 4.4.1. *Misalkan*

$$\begin{aligned} \sigma \left(\begin{pmatrix} (r_0 + r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j}) & (p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j}, q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right) \\ = \left(\begin{pmatrix} (r_0 - r_2 \mathbf{i} - r_1 \mathbf{j}) & (p_0 - p_2 \mathbf{i} - p_1 \mathbf{j}, q_0 - q_3 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_1 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 - s_3 \mathbf{i} - s_2 \mathbf{j} - s_1 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

merupakan suatu endomorfisma gelanggang dari $\mathcal{T}[x; \sigma]$, maka

$$\mathcal{T}[x; \sigma] = \sum_k \left(\begin{pmatrix} (r_0 + r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j}) & (p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j}, q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right)_k x^k$$

termasuk bagian dari Gelanggang σ -Skew McCoy dan Gelanggang σ -Skew Armendariz.

Bukti :

Ambil,

$$u(x), v(x) \in \mathcal{T}[x; \sigma] \setminus \{0\}.$$

Kasus 1

Misalkan,

$u(x) = u_0 + u_1 x$, dimana

$$u_i = \left(\begin{pmatrix} (r_0 + r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j}) & (p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j}, q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right)_i$$

dan $v(x) = v_0 + v_1 x$, dimana

$$v_j = \left(\begin{pmatrix} (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) & (x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}, y_0 + y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right)_j$$

untuk setiap $\mathbf{i}, \mathbf{j} = 0$ dan 1 .

Maka, hasil perkalian $u(x)v(x)$ harus bernilai $\mathbf{0}$ dengan $\mathbf{0}$ berbentuk matriks segitiga formal, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} u(x)v(x) &= (u_0 + u_1 x)(v_0 + v_1 x) \\ &= u_0 v_0 + u_0 v_1 x + u_1 \sigma(v_0) x + u_1 \sigma(v_1) x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 \sigma(v_0)) x + u_1 \sigma(v_1) x^2 \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Dari perkalian $u(x)v(x)$ diperoleh tiga hal, yaitu

1. $u_0 v_0 = \mathbf{0}$.
2. $u_0 v_1 + u_1 \sigma(v_0) = \mathbf{0}$.
3. $u_1 \sigma(v_1) = \mathbf{0}$.

Tiga hal diatas akan menjadi modal dalam penentuan bentuk umum $u(x), v(x)$. Selanjutnya, dari modal pertama akan diperoleh nilai dari u_0 dan v_0 . Begitu pula dengan modal ketiga akan diperoleh nilai dari u_1 dan v_1 . Sehingga untuk modal kedua akan dibuktikan kebenaran nilai yang diperoleh dari modal pertama dan modal ketiga.

1. Akan ditunjukkan $u_0 v_0 = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}
u_0 v_0 &= \left[\begin{pmatrix} (r_0 + r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j}) & (p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j}, q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_0 \\
&\quad \left[\begin{pmatrix} (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) & (x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}, y_0 + y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_0.
\end{aligned}$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka perkalian matriks diatas akan dipisah berdasarkan elemen matriks.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{11} &= \{(r_0 + r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j})_0\} \{(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j})_0\} \\
&= r_0(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) + r_1 \mathbf{i}(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) + r_2 \mathbf{j}(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) \\
&= r_0 a_0 + r_0 a_1 \mathbf{i} + r_0 a_2 \mathbf{j} + r_1 \mathbf{i} a_0 + r_1 \mathbf{i} a_1 \mathbf{i} + r_1 \mathbf{i} a_2 \mathbf{j} + r_2 \mathbf{j} a_0 + r_2 \mathbf{j} a_1 \mathbf{i} \\
&\quad + r_2 \mathbf{j} a_2 \mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Karena diketahui bahwa $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = -1, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}, \mathbf{j}^2 = -1$, maka

$$\begin{aligned}
&= r_0 a_0 + r_0 a_1 \mathbf{i} + r_0 a_2 \mathbf{j} + r_1 a_0 \mathbf{i} + r_1 a_1 \mathbf{j} - r_1 a_2 + r_2 a_0 \mathbf{j} - r_2 a_1 - r_2 a_2 \mathbf{i} \\
&= (r_0 a_0 - r_1 a_2 - r_2 a_1) + (r_0 a_1 + r_1 a_0 - r_2 a_2) \mathbf{i} + (r_0 a_2 + r_1 a_1 + r_2 a_0) \mathbf{j} \\
&= 0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Atau,

$$\left. \begin{aligned}
(i). \quad r_0 a_0 - r_1 a_2 - r_2 a_1 &= 0 \\
(ii). \quad r_0 a_1 + r_1 a_0 - r_2 a_2 &= 0 \\
(iii). \quad r_0 a_2 + r_1 a_1 + r_2 a_0 &= 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Sehingga dari persamaan (1) diperoleh,

$$a_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ r_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Karena diantara a_0, a_1, a_2 ada yang tidak nol, maka vektor-vektor

$$\left\{ \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ r_0 \end{pmatrix} \right\}$$

tidak bebas linear (bergantung linear). Oleh karena itu,

$$\det \begin{pmatrix} r_0 & -r_2 & -r_1 \\ r_1 & r_0 & -r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Atau,

$$r_0^3 - r_1^3 + r_2^3 + 3r_0r_1r_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Karena diketahui bahwa,

$$r_0^3 - r_1^3 + r_2^3 + 3r_0r_1r_2 = (r_0 - r_1 + r_2)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2).$$

Maka,

$$\begin{aligned} -3r_0r_1r_2 + 3r_0r_1r_2 &= (r_0 - r_1 + r_2)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2) \\ 0 &= (r_0 - r_1 + r_2)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2). \end{aligned}$$

Jika suatu perkalian menghasilkan nol maka salah satu atau keduanya bernilai nol. Untuk hal ini, kita akan membuktikan bahwa $0 = (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2)$.

$$\text{Maka, } r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2 = 0$$

$$2r_0^2 + 2r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_0r_1 + 2r_1r_2 - 2r_0r_2 = 0$$

$$r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2 = 0$$

$$(r_0^2 + r_1^2 + r_0r_1) + (r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2) + (r_0^2 + r_2^2 - r_0r_2) = 0$$

$$(r_0 + r_1)^2 + (r_1 + r_2)^2 + (r_0 - r_2)^2 = 0$$

Sehingga dari persamaan (2) dapat disimpulkan $r_0 = -r_1 = r_2$.

Selanjutnya, apabila nilai $r_0 = -r_1 = r_2$ disubstitusikan ke persamaan (1), maka diperoleh $-a_0 + a_1 - a_2 = 0$ sehingga disimpulkan $a_1 = a_0 + a_2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{22} &= \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_0\}\{(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})_0\} \\ &= s_0(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + s_1\mathbf{i}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &\quad + s_2\mathbf{j}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + s_3\mathbf{k}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= s_0b_0 + s_0b_1\mathbf{i} + s_0b_2\mathbf{j} + s_0b_3\mathbf{k} + s_1ib_0 + s_1ib_1\mathbf{i} + s_1ib_2\mathbf{j} + s_1ib_3\mathbf{k} \\ &\quad + s_2jb_0 + s_2jb_1\mathbf{i} + s_2jb_2\mathbf{j} + s_2jb_3\mathbf{k} + s_3kb_0 + s_3kb_1\mathbf{i} + s_3kb_2\mathbf{j} \\ &\quad + s_3kb_3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Karena diketahui bahwa $ij = k, jk = i, ki = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$, maka

$$\begin{aligned}
&= s_0b_0 + s_0b_1i + s_0b_2j + s_0b_3k + s_1b_0i - s_1b_1 + s_1b_2k - s_1b_3j + s_2b_0j \\
&\quad - s_2b_1k - s_2b_2 + s_2b_3i + s_3b_0k + s_3b_1j - s_3b_2i - s_3b_3 \\
&= (s_0b_0 - s_1b_1 - s_2b_2 - s_3b_3) + (s_0b_1 + s_1b_0 + s_2b_3 - s_3b_2)i \\
&\quad + (s_0b_2 - s_1b_3 + s_2b_0 + s_3b_1)j + (s_0b_3 + s_1b_2 - s_2b_1 + s_3b_0)k \\
&= 0 + 0i + 0j + 0k.
\end{aligned}$$

Atau,

$$\left. \begin{aligned}
(i). \quad & s_0b_0 - s_1b_1 - s_2b_2 - s_3b_3 = 0 \\
(ii). \quad & s_0b_1 + s_1b_0 + s_2b_3 - s_3b_2 = 0 \\
(iii). \quad & s_0b_2 - s_1b_3 + s_2b_0 + s_3b_1 = 0 \\
(iv). \quad & s_0b_3 + s_1b_2 - s_2b_1 + s_3b_0 = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Sehingga dari persamaan (3) diperoleh,

$$s_0 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_3 \\ b_0 \\ -b_1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -b_3 \\ -b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Karena diantara s_0, s_1, s_2, s_3 ada yang tidak nol, maka vektor-vektor

$$\left\{ \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_3 \\ b_0 \\ -b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_3 \\ -b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} \right\}$$

tidak bebas linear (bergantung linear). Oleh karena itu,

$$\det \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Atau,

$$b_0^4 - b_1^4 + b_2^4 - b_3^4 + 2b_0^2b_2^2 - 2b_1^2b_3^2 = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$(b_0^4 + b_2^4 + 2b_0^2b_2^2) - (b_1^4 + b_3^4 - 2b_1^2b_3^2) = 0$$

Misalkan, $b_0^2 = x, b_2^2 = y, b_1^2 = u$ dan $b_3^2 = v$, maka diperoleh

$$(x^2 + y^2 + 2xy) - (u^2 + v^2 + 2uv) = 0$$

$$(x + y)^2 - (u + v)^2 = 0$$

$$(x + y + u + v)(x + y - u - v) = 0$$

$$(b_0^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_3^2)(b_0^2 + b_2^2 - b_1^2 - b_3^2) = 0.$$

Jika suatu perkalian menghasilkan nol maka salah satu atau keduanya bernilai nol. Persamaan (4) mempunyai banyak solusi, sehingga satu solusi yang dipilih yaitu $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ dengan s_0, s_1, s_2, s_3 sebarang.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{12} &= \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_0\} \{(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}), (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})_0\} \\
&\quad + \{(p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})_0\} \{(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})_0\} \\
&= \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}), (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})\} \\
&\quad + \{(p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\} \\
&= \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j})\} \\
&\quad , \{(y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) + (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\} \\
&= (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}), (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}).
\end{aligned}$$

Untuk lebih memudahkan perhitungan, bagian Trinion dan Quaternion akan dipisah sementara.

1. Trinion

$$\begin{aligned}
&= (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}) \\
&= r_0(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) + r_1\mathbf{i}(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) + r_2\mathbf{j}(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \\
&\quad + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}) \\
&= r_0x_0 + r_0x_1\mathbf{i} + r_0x_2\mathbf{j} + r_1\mathbf{i}x_0 + r_1\mathbf{i}x_1\mathbf{i} + r_1\mathbf{i}x_2\mathbf{j} + r_2\mathbf{j}x_0 + r_2\mathbf{j}x_1\mathbf{i} \\
&\quad + r_2\mathbf{j}x_2\mathbf{j} + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}).
\end{aligned}$$

Karena diketahui bahwa $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = -1, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}, \mathbf{j}^2 = -1$, maka

$$\begin{aligned}
&= r_0x_0 + r_0x_1\mathbf{i} + r_0x_2\mathbf{j} + r_1x_0\mathbf{i} + r_1x_1\mathbf{j} - r_1x_2 + r_2x_0\mathbf{j} - r_2x_1 - r_2x_2\mathbf{i} \\
&\quad + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}) \\
&= (r_0x_0 - r_1x_2 - r_2x_1 + p_0) + (r_0x_1 + r_1x_0 - r_2x_2 + p_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (r_0x_2 + r_1x_1 + r_2x_0 + p_2)\mathbf{j} \\
&= 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Atau,

$$(i). \quad r_0x_0 - r_1x_2 - r_2x_1 = -p_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$(ii). \quad r_0x_1 + r_1x_0 - r_2x_2 = -p_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$(iii). \quad r_0x_2 + r_1x_1 + r_2x_0 = -p_2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

Pada \mathbf{a}_{11} telah diketahui bahwa $r_0 = -r_1 = r_2$, maka

$$(i). \quad -r_1x_0 - r_1x_2 + r_1x_1 = -p_0.$$

$$(ii). \quad -r_1x_1 + r_1x_0 + r_1x_2 = -p_1.$$

$$(iii). \quad -r_1x_2 + r_1x_1 - r_1x_0 = -p_2.$$

Atau,

$$(i). \quad r_1(-x_0 + x_1 - x_2) = -p_0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$(ii). \quad r_1(x_0 - x_1 + x_2) = -p_1 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$(iii). \quad r_1(-x_0 + x_1 - x_2) = -p_2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

Dari pers. (8), pers. (9) dan pers. (10) diperoleh $p_0 = -p_1 = p_2$. Dimana $p_1 = -r_1(x_0 - x_1 + x_2)$.

Karena diketahui $p_0 = -p_1$, maka dari pers. (5) dan pers. (6) diperoleh $x_1 = x_0 + x_2$ sehingga disimpulkan $p_0 = p_1 = p_2 = 0$.

2. Quaternion

$$\begin{aligned} &= (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ &\quad + (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) + q_0(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &\quad + q_1\mathbf{i}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + q_2\mathbf{j}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &\quad + q_3\mathbf{k}(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) + q_0b_0 + q_0b_1\mathbf{i} + q_0b_2\mathbf{j} + q_0b_3\mathbf{k} + q_1\mathbf{i}b_0 \\ &\quad + q_1\mathbf{i}b_1\mathbf{i} + q_1\mathbf{i}b_2\mathbf{j} + q_1\mathbf{i}b_3\mathbf{k} + q_2\mathbf{j}b_0 + q_2\mathbf{j}b_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j}b_2\mathbf{j} + q_2\mathbf{j}b_3\mathbf{k} \\ &\quad + q_3\mathbf{k}b_0 + q_3\mathbf{k}b_1\mathbf{i} + q_3\mathbf{k}b_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}b_3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Karena diketahui bahwa $\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, maka

$$\begin{aligned} &= (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) + q_0b_0 + q_0b_1\mathbf{i} + q_0b_2\mathbf{j} + q_0b_3\mathbf{k} + q_1b_0\mathbf{i} \\ &\quad - q_1b_1 + q_1b_2\mathbf{k} - q_1b_3\mathbf{j} + q_2b_0\mathbf{j} - q_2b_1\mathbf{k} - q_2b_2 + q_2b_3\mathbf{i} + q_3b_0\mathbf{k} \\ &\quad + q_3b_1\mathbf{j} - q_3b_2\mathbf{i} - q_3b_3 \\ &= (q_0b_0 - q_1b_1 - q_2b_2 - q_3b_3 + y_0) + (q_0b_1 + q_1b_0 + q_2b_3 - q_3b_2 + y_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (q_0b_2 - q_1b_3 + q_2b_0 + q_3b_1 + y_2)\mathbf{j} + (q_0b_3 + q_1b_2 - q_2b_1 + q_3b_0 + y_3)\mathbf{k} \\ &= 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Atau,

$$(i). \quad q_0b_0 - q_1b_1 - q_2b_2 - q_3b_3 = -y_0.$$

$$(ii). \quad q_0b_1 + q_1b_0 + q_2b_3 - q_3b_2 = -y_1.$$

$$(iii). \quad q_0b_2 - q_1b_3 + q_2b_0 + q_3b_1 = -y_2.$$

$$(iv). \quad q_0b_3 + q_1b_2 - q_2b_1 + q_3b_0 = -y_3,$$

Pada \mathbf{a}_{22} telah diketahui bahwa $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, sehingga dapat disimpulkan $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ dan $q_0, q_1, q_2, q_3 \neq 0$.

Selanjutnya, apabila dituliskan kembali kedalam bentuk matriks, maka matriks u_0 dan v_0 adalah sebagai berikut

$$u_0 = \left[\begin{array}{c} (r_0 - r_0\mathbf{i} + r_0\mathbf{j}) \quad (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right]_0$$

$$v_0 = \left[\begin{array}{c} (a_0 + (a_0 + a_2)\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \quad (x_0 + (x_0 + x_2)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 \quad 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{array} \right]_0.$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil perkalian $u_0 v_0$ akan bernilai $\mathbf{0}$ jika bentuk matriks u_0 dan v_0 seperti diatas.

2. Akan ditunjukkan $u_1 \sigma(v_1) = \mathbf{0}$.

$$u_1 \sigma(v_1) = \left[\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right]_1$$

$$\sigma \left[\begin{array}{c} (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \quad (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}), (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \end{array} \right]_1$$

$$= \left[\begin{array}{c} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) \quad (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 \quad (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{array} \right]_1$$

$$\left[\begin{array}{c} (a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j}) \quad (x_0 - x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{j}), (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k}) \\ 0 \quad (b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) \end{array} \right]_1.$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka perkalian matriks diatas akan dipisah berdasarkan elemen matriks.

$$a_{11} = \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_1\} \{(a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j})_1\}$$

$$= r_0(a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j}) + r_1\mathbf{i}(a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j}) + r_2\mathbf{j}(a_0 - a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j})$$

$$= r_0a_0 - r_0a_2\mathbf{i} - r_0a_1\mathbf{j} + r_1\mathbf{i}a_0 - r_1\mathbf{i}a_2\mathbf{i} - r_1\mathbf{i}a_1\mathbf{j} + r_2\mathbf{j}a_0 - r_2\mathbf{j}a_2\mathbf{i}$$

$$- r_2\mathbf{j}a_1\mathbf{j}.$$

Karena diketahui bahwa $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = -1, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}, \mathbf{j}^2 = -1$, maka

$$= r_0a_0 - r_0a_2\mathbf{i} - r_0a_1\mathbf{j} + r_1a_0\mathbf{i} - r_1a_2\mathbf{j} + r_1a_1 + r_2a_0\mathbf{j} + r_2a_2 + r_2a_1\mathbf{i}$$

$$= (r_0a_0 + r_1a_1 + r_2a_2) + (r_1a_0 - r_0a_2 + r_2a_1)\mathbf{i} + (r_2a_0 - r_0a_1 - r_1a_2)\mathbf{j}$$

$$= 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}.$$

Atau,

$$\left. \begin{array}{l} (i). \quad r_0a_0 + r_1a_1 + r_2a_2 = 0 \\ (ii). \quad r_1a_0 - r_0a_2 + r_2a_1 = 0 \\ (iii). \quad r_2a_0 - r_0a_1 - r_1a_2 = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

Sehingga dari persamaan (11) diperoleh,

$$a_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -r_0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_0 \\ -r_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Karena diantara a_0, a_1, a_2 ada yang tidak nol, maka vektor-vektor

$$\left\{ \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -r_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_0 \\ -r_1 \end{pmatrix} \right\}$$

tidak bebas linear (bergantung linear). Oleh karena itu,

$$\det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_2 & -r_0 \\ r_2 & -r_0 & -r_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Atau,

$$r_0^3 - r_1^3 + r_2^3 + 3r_0r_1r_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

Karena diketahui bahwa,

$$r_0^3 - r_1^3 + r_2^3 + 3r_0r_1r_2 = (r_0 - r_1 + r_2)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2)$$

maka,

$$-3r_0r_1r_2 + 3r_0r_1r_2 = (r_0 - r_1 + r_2)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2)$$

$$0 = (r_0 - r_1 + r_2)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2).$$

Jika suatu perkalian menghasilkan nol maka salah satu atau keduanya bernilai nol. Untuk hal ini, kita akan membuktikan bahwa $0 = (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2)$.

$$\text{Maka, } r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2 = 0$$

$$2r_0^2 + 2r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_0r_1 + 2r_1r_2 - 2r_0r_2 = 0$$

$$r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_0r_1 + r_1r_2 - r_0r_2 = 0$$

$$(r_0^2 + r_1^2 + r_0r_1) + (r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2) + (r_0^2 + r_2^2 - r_0r_2) = 0$$

$$(r_0 + r_1)^2 + (r_1 + r_2)^2 + (r_0 - r_2)^2 = 0$$

Sehingga dari persamaan (12) dapat disimpulkan $r_0 = -r_1 = r_2$. Selanjutnya, apabila nilai $r_0 = -r_1 = r_2$ disubstitusikan ke persamaan (11), maka diperoleh $-a_0 + a_1 - a_2 = 0$ sehingga disimpulkan $a_1 = a_0 + a_2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{22} &= \{(s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k})_1\} \{(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k})_1\} \\ &= s_0 (b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) + s_1\mathbf{i} (b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) \\ &\quad + s_2\mathbf{j} (b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) + s_3\mathbf{k} (b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s_0b_0 - s_0b_3i - s_0b_2j - s_0b_1k + s_1ib_0 - s_1ib_3i - s_1ib_2j - s_1ib_1k \\
&\quad + s_2jb_0 - s_2jb_3i - s_2jb_2j - s_2jb_1k + s_3kb_0 - s_3kb_3i - s_3kb_2j \\
&\quad - s_3kb_1k.
\end{aligned}$$

Karena diketahui bahwa $ij = k, jk = i, ki = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$, maka

$$\begin{aligned}
&= s_0b_0 - s_0b_3i - s_0b_2j - s_0b_1k + s_1b_0i + s_1b_3 - s_1b_2k + s_1b_1j + s_2b_0j \\
&\quad + s_2b_3k + s_2b_2 - s_2b_1i + s_3b_0k - s_3b_3j + s_3b_2i + s_3b_1 \\
&= (s_0b_0 + s_1b_3 + s_2b_2 + s_3b_1) + (s_1b_0 - s_0b_3 - s_2b_1 + s_3b_2)i \\
&\quad + (s_1b_1 - s_0b_2 + s_2b_0 - s_3b_3)j + (s_3b_0 - s_0b_1 - s_1b_2 + s_2b_3)k \\
&= 0 + 0i + 0j + 0k.
\end{aligned}$$

Atau,

$$\left. \begin{aligned}
(i). \quad & s_0b_0 + s_1b_3 + s_2b_2 + s_3b_1 = 0 \\
(ii). \quad & s_1b_0 - s_0b_3 - s_2b_1 + s_3b_2 = 0 \\
(iii). \quad & s_1b_1 - s_0b_2 + s_2b_0 - s_3b_3 = 0 \\
(iv). \quad & s_3b_0 - s_0b_1 - s_1b_2 + s_2b_3 = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

Sehingga dari persamaan (13) diperoleh,

$$s_0 \begin{pmatrix} b_0 \\ -b_3 \\ -b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} b_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ b_0 \\ b_3 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_3 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Karena diantara s_0, s_1, s_2, s_3 ada yang tidak nol, maka vektor-vektor

$$\left\{ \begin{pmatrix} b_0 \\ -b_3 \\ -b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ b_0 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_3 \\ b_0 \end{pmatrix} \right\}$$

tidak bebas linear (bergantung linear). Oleh karena itu,

$$\det \begin{pmatrix} b_0 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -b_3 & b_0 & -b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 & b_0 & -b_3 \\ -b_1 & -b_2 & b_3 & b_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Atau,

$$b_0^4 - b_1^4 + b_2^4 - b_3^4 + 2b_0^2b_2^2 - 2b_1^2b_3^2 = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$(b_0^4 + b_2^4 + 2b_0^2b_2^2) - (b_1^4 + b_3^4 - 2b_1^2b_3^2) = 0$$

Misalkan, $b_0^2 = x, b_2^2 = y, b_1^2 = u$ dan $b_3^2 = v$, maka diperoleh

$$(x^2 + y^2 + 2xy) - (u^2 + v^2 + 2uv) = 0$$

$$(x + y)^2 - (u + v)^2 = 0$$

$$(x + y + u + v)(x + y - u - v) = 0$$

$$(b_0^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_3^2)(b_0^2 + b_2^2 - b_1^2 - b_3^2) = 0.$$

Jika suatu perkalian menghasilkan nol maka salah satu atau keduanya bernilai nol. Persamaan (14) mempunyai banyak solusi, sehingga satu solusi yang dipilih yaitu $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ dengan s_0, s_1, s_2, s_3 sebarang.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{12} &= \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})_1\} \{(x_0 - x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{j}), (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k})_1\} \\ &\quad + \{(p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})_1\} \{(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k})_1\} \\ &= \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})(x_0 - x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{j}), (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k})\} \\ &\quad + \{(p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k})\} \\ &= \{(r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})(x_0 - x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{j}) + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j})\} \\ &\quad , \{(y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k}) + (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k})\} \\ &= (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Untuk lebih memudahkan perhitungan, bagian Trinion dan Quaternion akan dipisah sementara.

1. Trinion

$$\begin{aligned} &= (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j})(x_0 - x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{j}) + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}) \\ &= r_0(x_0 - x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{j}) + r_1\mathbf{i}(x_0 - x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{j}) + r_2\mathbf{j}(x_0 - x_2\mathbf{i} - x_1\mathbf{j}) \\ &\quad + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}) \\ &= r_0x_0 - r_0x_2\mathbf{i} - r_0x_1\mathbf{j} + r_1ix_0 - r_1ix_2\mathbf{i} - r_1ix_1\mathbf{j} + r_2jx_0 - r_2jx_2\mathbf{i} \\ &\quad - r_2jx_1\mathbf{j} + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Karena diketahui bahwa $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = -1, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}, \mathbf{j}^2 = -1$, maka

$$\begin{aligned} &= r_0x_0 - r_0x_2\mathbf{i} - r_0x_1\mathbf{j} + r_1x_0\mathbf{i} - r_1x_2\mathbf{j} + r_1x_1 + r_2x_0\mathbf{j} + r_2x_2 + r_2x_1\mathbf{i} \\ &\quad + (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}) \\ &= (r_0x_0 + r_1x_1 + r_2x_2 + p_0) + (r_1x_0 - r_0x_2 + r_2x_1 + p_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (r_2x_0 - r_0x_1 - r_1x_2 + p_2)\mathbf{j} \\ &= 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Atau,

$$(i). \quad r_0x_0 + r_1x_1 + r_2x_2 = -p_0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$(ii). \quad r_1x_0 - r_0x_2 + r_2x_1 = -p_1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$(iii). \quad r_2x_0 - r_0x_1 - r_1x_2 = -p_2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

Pada \mathbf{a}_{11} telah diketahui bahwa $r_0 = -r_1 = r_2$, maka

$$(i). \quad -r_1x_0 - r_1x_2 + r_1x_1 = -p_0.$$

$$(ii). -r_1x_1 + r_1x_0 + r_1x_2 = -p_1.$$

$$(iii). -r_1x_2 + r_1x_1 - r_1x_0 = -p_2.$$

Atau,

$$(i). r_1(-x_0 + x_1 - x_2) = -p_0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$(ii). r_1(x_0 - x_1 + x_2) = -p_1 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$(iii). r_1(-x_0 + x_1 - x_2) = -p_2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

Dari pers. (18), pers. (19) dan pers. (20) diperoleh $p_0 = -p_1 = p_2$.
Dimana $p_1 = -r_1(x_0 - x_1 + x_2)$. Karena diketahui $p_0 = -p_1$, maka dari pers. (15) dan pers. (16) diperoleh $x_1 = x_0 + x_2$ sehingga disimpulkan $p_0 = p_1 = p_2 = 0$.

2. Quaternion

$$\begin{aligned} &= (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k}) \\ &\quad + (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) \\ &= (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k}) + q_0(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) \\ &\quad + q_1\mathbf{i}(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) + q_2\mathbf{j}(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) \\ &\quad + q_3\mathbf{k}(b_0 - b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_1\mathbf{k}) \\ &= (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k}) + q_0b_0 - q_0b_3\mathbf{i} - q_0b_2\mathbf{j} - q_0b_1\mathbf{k} + q_1\mathbf{i}b_0 \\ &\quad - q_1\mathbf{i}b_3\mathbf{i} - q_1\mathbf{i}b_2\mathbf{j} - q_1\mathbf{i}b_1\mathbf{k} + q_2\mathbf{j}b_0 - q_2\mathbf{j}b_3\mathbf{i} - q_2\mathbf{j}b_2\mathbf{j} - q_2\mathbf{j}b_1\mathbf{k} \\ &\quad + q_3\mathbf{k}b_0 - q_3\mathbf{k}b_3\mathbf{i} - q_3\mathbf{k}b_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}b_1\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Karena diketahui bahwa $\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, maka

$$\begin{aligned} &= (y_0 - y_3\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_1\mathbf{k}) + q_0b_0 - q_0b_3\mathbf{i} - q_0b_2\mathbf{j} - q_0b_1\mathbf{k} + q_1b_0\mathbf{i} \\ &\quad + q_1b_3 - q_1b_2\mathbf{k} + q_1b_1\mathbf{j} + q_2b_0\mathbf{j} + q_2b_3\mathbf{k} + q_2b_2 - q_2b_1\mathbf{i} + q_3b_0\mathbf{k} \\ &\quad - q_3b_3\mathbf{j} + q_3b_2\mathbf{i} + q_3b_1 \\ &= (q_0b_0 + q_1b_3 + q_2b_2 + q_3b_1 + y_0) + (q_1b_0 - q_0b_3 - q_2b_1 + q_3b_2 + y_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (q_1b_1 - q_0b_2 + q_2b_0 - q_3b_3 + y_2)\mathbf{j} + (q_2b_3 - q_0b_1 - q_1b_2 + q_3b_0 + y_3)\mathbf{k} \\ &= 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Atau,

$$(i). q_0b_0 + q_1b_3 + q_2b_2 + q_3b_1 = -y_0.$$

$$(ii). q_1b_0 - q_0b_3 - q_2b_1 + q_3b_2 = -y_1.$$

$$(iii). q_1b_1 - q_0b_2 + q_2b_0 - q_3b_3 = -y_2.$$

$$(iv). q_2b_3 - q_0b_1 - q_1b_2 + q_3b_0 = -y_3.$$

Pada \mathbf{a}_{22} telah diketahui bahwa $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, sehingga dapat disimpulkan $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ dan $q_0, q_1, q_2, q_3 \neq 0$.

Selanjutnya, apabila dituliskan kembali kedalam bentuk matriks, maka matriks u_1 dan v_1 adalah sebagai berikut

$$u_1 = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\mathbf{i} + r_0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_1$$

$$v_1 = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix} \right]_1.$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil perkalian $u_1 v_1$ akan bernilai $\mathbf{0}$ jika bentuk matriks u_1 dan v_1 seperti diatas.

Dapat dilihat bahwa matriks u_0 dan u_1 mempunyai bentuk yang sama. Begitu pula dengan v_0 dan v_1 yang mempunyai bentuk yang sama. Sehingga dapat disimpulkan bahwa modal kedua yang merupakan perkalian $u_0 v_1$ dan $u_1 v_0$ juga bernilai $\mathbf{0}$.

Sehingga untuk $u(x) = u_0 + u_1 x$ dan $v(x) = v_0 + v_1 x$ mempunyai bentuk umum u_i dan v_i dengan $i = 0, 1$ sebagai berikut.

$$u_i = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\mathbf{i} + r_0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_i$$

$$v_i = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix} \right]_i.$$

Kasus 2

Misalkan,

$u(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2$, dimana

$$u_i = \left(\begin{pmatrix} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) & (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right)_i$$

dan,

$v(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2$, dimana

$$v_j = \left(\begin{pmatrix} (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}), (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right)_j$$

untuk setiap $\mathbf{i}, \mathbf{j} = 0, 1, \text{ dan } 2$.

Maka, hasil perkalian $u(x)v(x)$ harus bernilai $\mathbf{0}$ dengan $\mathbf{0}$ berbentuk matriks segitiga formal, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
u(x)v(x) &= (u_0 + u_1x + u_2x^2)(v_0 + v_1x + v_2x^2) \\
&= u_0 v_0 + u_0 v_1 x + u_0 v_2 x^2 + u_1 \sigma(v_0) x + u_1 \sigma(v_1) x^2 \\
&\quad + u_1 \sigma(v_2) x^3 + u_2 v_0 x^2 + u_2 v_1 x^3 + u_2 v_2 x^4 \\
&= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 \sigma(v_0))x + (u_0 v_2 + u_1 \sigma(v_1) + u_2 v_0)x^2 \\
&\quad + (u_1 \sigma(v_2) + u_2 v_1)x^3 + u_2 v_2 x^4 \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Dari perkalian $u(x)v(x)$ diperoleh lima modal, yaitu

1. $u_0 v_0 = \mathbf{0}$
2. $u_0 v_1 + u_1 \sigma(v_0) = \mathbf{0}$
3. $u_0 v_2 + u_1 \sigma(v_1) + u_2 v_0 = \mathbf{0}$
4. $u_1 \sigma(v_2) + u_2 v_1 = \mathbf{0}$
5. $u_2 v_2 = \mathbf{0}$

Berdasar pada *Kasus 1* diatas, maka dari modal pertama dan modal kelima dapat disimpulkan bahwa bentuk dari u_0 dan u_2 sama. Begitu pula dengan bentuk dari v_0 dan v_2 . Maka pada modal ketiga yang merupakan perkalian antara $u_0 v_2$ dan $u_2 v_0$ juga akan bernilai $\mathbf{0}$. Sehingga, dari modal ketiga diperoleh

$$u_1 \sigma(v_1) = \mathbf{0}.$$

Kembali berdasar pada *Kasus 1*, maka nilai dari u_1 dan v_1 adalah

$$\begin{aligned}
u_1 &= \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0 \mathbf{i} + r_0 \mathbf{j}) & (0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j}, q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_1 \\
v_1 &= \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2) \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2) \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}, 0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \end{pmatrix} \right]_1.
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa u_0, u_1, u_2 mempunyai bentuk matriks yang sama. Begitu pula dengan v_0, v_1, v_2 yang mempunyai bentuk matriks yang sama. Sehingga untuk $u(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2$ dan $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2$ mempunyai bentuk umum u_i dan v_i dengan $i = 0,1,2$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
u_i &= \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0 \mathbf{i} + r_0 \mathbf{j}) & 0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j}, (q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_i \\
v_i &= \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2) \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2) \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}, 0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \end{pmatrix} \right]_i.
\end{aligned}$$

Kasus 3

Misalkan, $u(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3$, dimana

$$u_i = \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) & (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_i$$

dan, $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3$, dimana

$$v_j = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}), (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_j$$

untuk setiap $\mathbf{i}, \mathbf{j} = 0, 1, 2, \text{ dan } 3$.

Maka, hasil perkalian $u(x)v(x)$ harus bernilai $\mathbf{0}$ dengan $\mathbf{0}$ berbentuk matriks segitiga formal, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} u(x)v(x) &= (u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3)(v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3) \\ &= u_0 v_0 + u_0 v_1 x + u_0 v_2 x^2 + u_0 v_3 x^3 + u_1 \sigma(v_0) x + u_1 \sigma(v_1) x^2 \\ &\quad + u_1 \sigma(v_2) x^3 + u_1 \sigma(v_3) x^4 + u_2 v_0 x^2 + u_2 v_1 x^3 + u_2 v_2 x^4 \\ &\quad + u_2 v_3 x^5 + u_3 \sigma(v_0) x^3 + u_3 \sigma(v_1) x^4 + u_3 \sigma(v_2) x^5 \\ &\quad + u_3 \sigma(v_3) x^6 \\ &= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 \sigma(v_0))x + (u_0 v_2 + u_1 \sigma(v_1) + u_2 v_0)x^2 \\ &\quad + (u_0 v_3 + u_1 \sigma(v_2) + u_2 v_1 + u_3 \sigma(v_0))x^3 \\ &\quad + (u_1 \sigma(v_3) + u_2 v_2 + u_3 \sigma(v_1))x^4 \\ &\quad + (u_2 v_3 + u_3 \sigma(v_2))x^5 + u_3 \sigma(v_3) x^6 \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dari perkalian $u(x)v(x)$ diperoleh tujuh modal, yaitu

1. $u_0 v_0 = \mathbf{0}$
2. $u_0 v_1 + u_1 \sigma(v_0) = \mathbf{0}$
3. $u_0 v_2 + u_1 \sigma(v_1) + u_2 v_0 = \mathbf{0}$
4. $u_0 v_3 + u_1 \sigma(v_2) + u_2 v_1 + u_3 \sigma(v_0) = \mathbf{0}$
5. $u_1 \sigma(v_3) + u_2 v_2 + u_3 \sigma(v_1) = \mathbf{0}$
6. $u_2 v_3 + u_3 \sigma(v_2) = \mathbf{0}$
7. $u_3 \sigma(v_3) = \mathbf{0}$

Berdasar pada *Kasus 1*, maka dari modal pertama dan modal ketujuh diperoleh bentuk dari u_0, u_3, v_0 dan v_3 . Karena u_0, v_0 telah diketahui, maka dari modal kedua dapat diperoleh nilai dari u_1 dan v_1 yaitu sebagai berikut.

$$u_1 = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\mathbf{i} + r_0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_1$$

$$v_1 = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix} \right]_1.$$

Selanjutnya karena u_3, v_3 telah diketahui, maka dari modal keenam dapat diperoleh nilai dari u_2 dan v_2 yaitu sebagai berikut.

$$u_2 = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\mathbf{i} + r_0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_2$$

$$v_2 = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix} \right]_2.$$

Dapat dilihat bahwa bentuk dari u_0, u_1, u_2, u_3 sama dan begitu pula dengan v_0, v_1, v_2, v_3 juga mempunyai bentuk yang sama. Sehingga untuk $u(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3$ dan $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3$ mempunyai bentuk umum u_i dan v_i dengan $i = 0, 1, 2, 3$ sebagai berikut.

$$u_i = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\mathbf{i} + r_0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right]_i$$

$$v_i = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix} \right]_i.$$

Kasus 4

Misalkan, $u(x) = \sum_{i=0}^n u_n x^n$, dimana

$$u_i = \left(\begin{pmatrix} (r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j}) & (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}), (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right)_i$$

dan, $v(x) = \sum_{j=0}^m v_m x^m$, dimana

$$v_j = \left(\begin{pmatrix} (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}), (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \end{pmatrix} \right)_j$$

untuk setiap $0 \leq i \leq n$ dan $0 \leq j \leq m$.

Maka, hasil perkalian $u(x)v(x)$ harus bernilai $\mathbf{0}$ dengan $\mathbf{0}$ berbentuk matriks segitiga formal, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} u(x)v(x) &= (u_0 + u_1x + \dots + u_nx^n)(v_0 + v_1x + \dots + v_mx^m) \\ &= u_0v_0 + u_0v_1x + \dots + u_nv_mx^{n+m} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dari perkalian $u(x)v(x)$, diperoleh sebanyak $n + m + 1$ modal. Masing-masing modal memiliki jumlahan index yang berbeda dan berada pada interval $0 \leq i + j \leq n + m$.

Karena gelanggang matriks segitiga formal merupakan gelanggang polinom miring, maka :

1. Untuk i ganjil, perkalian antara $u_i v_j$ menjadi $u_i \sigma(v_j)$.
2. Untuk i genap, perkalian antara $u_i v_j$ tetap.

Maka dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $u(x), v(x) \in \mathcal{T}[x; \sigma] \setminus \{0\}$ dengan

$$u(x) = \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} (r_0 - r_0 \mathbf{i} + r_0 \mathbf{j}) & (0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j}, q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}) \end{pmatrix}_i x^i$$

$$v(x) = \sum_{j=0}^m \begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2) \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2) \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}, 0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \end{pmatrix}_j x^j$$

sedemikian sehingga $u(x)v(x) = \mathbf{0}$, maka $u_i v_j = \mathbf{0}$, untuk setiap $0 \leq i \leq n$ dan $0 \leq j \leq m$. Maka Gelanggang Matriks Segitiga Formal merupakan Gelanggang σ -Skew Armendariz.

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa gelanggang matriks segitiga formal merupakan gelanggang σ -skew McCoy, yaitu dengan menunjukkan terdapat $c \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ yang memenuhi $u(x)c = \mathbf{0}$.

Kasus 1

Pilih $c = v_0 v_1$, maka

$$\begin{aligned} u(x)c &= (u_0 + u_1 x)(v_0 v_1) \\ &= u_0 v_0 v_1 + u_1 \sigma(v_0) \sigma(v_1) x. \end{aligned}$$

Pada modal pertama dan modal kedua dalam *kasus 1* sebelumnya telah diketahui $u_0 v_0 = \mathbf{0}$ dan $u_1 \sigma(v_0) = \mathbf{0}$. Sehingga dapat disimpulkan $u(x)c = \mathbf{0}$. Maka terdapat $c = v_0 v_1$, sedemikian sehingga Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x; \sigma]$ merupakan Gelanggang σ -Skew McCoy.

Kasus 2

Pilih $c = v_0v_1 + v_1v_2$, maka

$$\begin{aligned} u(x)c &= (u_0 + u_1x + u_2x^2)(v_0v_1 + v_1v_2) \\ &= u_0v_0v_1 + u_0v_1v_2 + u_1\sigma(v_0)\sigma(v_1)x + u_1\sigma(v_1)\sigma(v_2)x \\ &\quad + u_2v_0v_1x^2 + u_2v_1v_2x^2. \end{aligned}$$

Pada modal dalam *kasus 2* telah diketahui beberapa hal yaitu $u_0v_0 = \mathbf{0}$, $u_0v_1 = \mathbf{0}$, $u_1\sigma(v_0) = \mathbf{0}$, $u_1\sigma(v_1) = \mathbf{0}$, $u_2v_0 = \mathbf{0}$, dan $u_2v_1 = \mathbf{0}$. Sehingga dapat disimpulkan $u(x)c = \mathbf{0}$. Maka terdapat $c = v_0v_1 + v_1v_2$, sedemikian sehingga Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x; \sigma]$ merupakan Gelanggang σ -Skew McCoy.

Kasus 3

Pilih $c = v_0v_1 + v_1v_2 + v_2v_3$, maka

$$\begin{aligned} u(x)c &= (u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3)(v_0v_1 + v_1v_2 + v_2v_3) \\ &= u_0v_0v_1 + u_0v_1v_2 + u_0v_2v_3 + u_1\sigma(v_0)\sigma(v_1)x + u_1\sigma(v_1)\sigma(v_2)x \\ &\quad + u_1\sigma(v_2)\sigma(v_3)x + u_2v_0v_1x^2 + u_2v_1v_2x^2 + u_2v_2v_3x^2 \\ &\quad + u_3\sigma(v_0)\sigma(v_1)x^3 + u_3\sigma(v_1)\sigma(v_2)x^3 + u_3\sigma(v_2)\sigma(v_3)x^3. \end{aligned}$$

Pada modal dalam *kasus 3* telah diketahui beberapa hal yaitu $u_0v_0 = \mathbf{0}$, $u_0v_1 = \mathbf{0}$, $u_0v_2 = \mathbf{0}$, $u_1\sigma(v_0) = \mathbf{0}$, $u_1\sigma(v_1) = \mathbf{0}$, $u_1\sigma(v_2) = \mathbf{0}$, $u_2v_0 = \mathbf{0}$, $u_2v_1 = \mathbf{0}$, $u_2v_2 = \mathbf{0}$, $u_3\sigma(v_0) = \mathbf{0}$, $u_3\sigma(v_1) = \mathbf{0}$, dan $u_3\sigma(v_2) = \mathbf{0}$. Sehingga dapat disimpulkan $u(x)c = \mathbf{0}$. Maka terdapat $c = v_0v_1 + v_1v_2 + v_2v_3$, sedemikian sehingga Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x; \sigma]$ merupakan Gelanggang σ -Skew McCoy.

Dari ketiga kasus diatas dapat disimpulkan, $\forall u(x), v(x) \in \mathcal{T}[x; \sigma] \setminus \{0\}$ sedemikian sehingga $u(x)v(x) = \mathbf{0}$, maka terdapat

$$c = \sum_{j=0}^m v_j v_{j+1} \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$$

dimana, $v_j \in v(x)$ yang memenuhi $u(x)c = \mathbf{0}$. Maka Gelanggang Matriks Segitiga Formal merupakan Gelanggang σ -Skew McCoy.

Contoh 4.4.1.

$$\text{Misalkan } f(x) = \begin{pmatrix} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{pmatrix} x$$

$$\text{dan } g(x) = \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + 2i + 31j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} x$$

dimana $f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x; \sigma]$. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{T}[x; \sigma]$ merupakan Gelanggang σ -skew McCoy, Gelanggang σ -Skew π -McCoy, Gelanggang σ -Skew Armendariz dan Gelanggang σ -skew π -Armendariz.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa $f(x) g(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) g(x) &= \left[\begin{pmatrix} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{pmatrix} x \right] \\ &\quad \left[\begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + 2i + 31j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} x \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \left[\begin{pmatrix} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + 2i + 31j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} x \right] \\ &\quad + \left[\begin{pmatrix} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \left[\begin{pmatrix} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + 2i + 31j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} x \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cc} -1 + 2i + 31j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{array} \right) x \Big] \\
= & \left[\left(\begin{array}{cc} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{array} \right) \right. \\
& \left. \left(\begin{array}{cc} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{array} \right) \right] \\
& + \left[\left(\begin{array}{cc} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{array} \right) \right. \\
& \left. \left(\begin{array}{cc} -1 + 2i + 3j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{array} \right) x \right] \\
& + \left[\left(\begin{array}{cc} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{array} \right) \right. \\
& \left. \sigma \left(\begin{array}{cc} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{array} \right) x \right] \\
& + \left[\left(\begin{array}{cc} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{array} \right) \right. \\
& \left. \sigma \left(\begin{array}{cc} -1 + 2i + 3j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{array} \right) x^2 \right] \\
= & \left(\begin{array}{cc} (0 - 0i + 0j) & (0 + 0i + 0j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & (0 + 0i + 0j + 0k) \end{array} \right) \\
& + \left(\begin{array}{cc} (0 - 0i + 0j) & (0 + 0i + 0j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & (0 + 0i + 0j + 0k) \end{array} \right) x \\
& + \left(\begin{array}{cc} (0 - 0i + 0j) & (0 + 0i + 0j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & (0 + 0i + 0j + 0k) \end{array} \right) x \\
& + \left(\begin{array}{cc} (0 - 0i + 0j) & (0 + 0i + 0j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & (0 + 0i + 0j + 0k) \end{array} \right) x^2 \\
= & \left(\begin{array}{cc} (0 - 0i + 0j) & (0 + 0i + 0j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & (0 + 0i + 0j + 0k) \end{array} \right) \\
& + \left(\begin{array}{cc} (0 - 0i + 0j) & (0 + 0i + 0j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & (0 + 0i + 0j + 0k) \end{array} \right) x \\
& + \left(\begin{array}{cc} (0 - 0i + 0j) & (0 + 0i + 0j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & (0 + 0i + 0j + 0k) \end{array} \right) x^2
\end{aligned}$$

Dari perkalian diatas dapat dilihat bahwa $f(x)g(x)$ akan bernilai 0. Begitupun dengan hasil perkalian $f_i g_j$ dimana $f_i \in f(x)$ dan $g_j \in g(x)$ yang menghasilkan 0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa Gelanggang Matriks Segitiga Formal merupakan Gelanggang σ -Skew Armendariz.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa terdapat $c \in \mathcal{T}$ sehingga memenuhi

$$f(x)c = 0.$$

$$\text{Pilih } c = \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 + 2i + 3j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } f(x)c &= \left[\begin{pmatrix} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{pmatrix} x \right] \\ &\quad \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} -1 + 2i + 3j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} -1 + 2i + 3j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \left[\begin{pmatrix} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{pmatrix} x \right. \\ &\quad \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} -1 + 2i + 3j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} (2 - 2i + 2j) & (0 + 0i + 0j, 1 + 2i + 3j + 4k) \\ 0 & (4 + 3i + 2j + 1k) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} -1 + 2i + 3j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \left[\begin{pmatrix} (1 - 1i + 1j) & (0 + 0i + 0j, 2 + 2i + 1j + 3k) \\ 0 & (2 + 1i + 3j + 1k) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \sigma \begin{pmatrix} 2 + 3i + 1j & (1 - 1i - 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} \\ &\quad \left. \sigma \begin{pmatrix} -1 + 2i + 3j & (1 + 3i + 2j, 0 + 0i + 0j + 0k) \\ 0 & 0 + 0i + 0j + 0k \end{pmatrix} x \right] \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (0 - 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0 - 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \end{pmatrix} x$$

Dapat dilihat bahwa untuk

$$c = \begin{pmatrix} 2 + 3\mathbf{i} + 1\mathbf{j} & (1 - 1\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} & (1 + 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix}$$

memenuhi $f(x)c = 0$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa Gelanggang Matriks Segitiga Formal merupakan Gelanggang σ -Skew McCoy. Selanjutnya, karena Matriks Segitiga Formal hanya memiliki satu bilangan nilpotent maka, untuk pembuktian diatas juga berlaku untuk membuktikan bahwa Gelanggang Matriks Segitiga Formal juga merupakan Gelanggang σ -Skew π -McCoy dan Gelanggang σ -Skew π -Armendariz.

4.4.2. Gelanggang σ -Skew π -McCoy dan Gelanggang σ -Skew π -Armendariz

Berikut adalah hasil pengkonstruksian Gelanggang Matriks Segitiga Formal menjadi Gelanggang σ -Skew π -McCoy dan Gelanggang σ -Skew π -Armendariz.

Teorema 4.4.2. *Satu-satunya elemen nilpoten dari $\mathcal{T}[x; \sigma]$ adalah $\mathbf{0}$, sehingga $f(x)g(x) = \mathbf{0} \in N(\mathcal{T}[x; \sigma])$. Maka Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x; \sigma]$ termasuk salah satu bagian dari gelanggang σ -Skew π -McCoy dan gelanggang σ -Skew π -Armendariz dengan σ adalah endomorfisma gelanggang.*

Bukti :

Elemen a disebut elemen nilpoten dari satu gelanggang jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a = 0$. Dalam gelanggang matriks segitiga formal, hanya memiliki satu elemen nilpoten yaitu $\mathbf{0}$. Sehingga untuk gelanggang σ -Skew π -McCoy, terdapat

$$c = \sum_{j=0}^m g_j g_{j+1} \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$$

yang memenuhi $f(x)c \in N(\mathcal{T}[x; \sigma])$ dimana elemen nilpotennya adalah $\mathbf{0}$ sehingga $f(x)c = \mathbf{0}$. Sedangkan untuk gelanggang σ -Skew π -Armendariz, untuk setiap $f_i \in f(x)$ dan $g_j \in g(x)$, maka $f_i g_j = \mathbf{0} \in N(\mathcal{T}[x; \sigma])$.

Jadi disimpulkan bahwa Gelanggang Matriks Segitiga Formal merupakan Gelanggang σ -Skew π -McCoy dan Gelanggang σ -Skew π -Armendariz.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai kesimpulan dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya dan saran untuk peneliti selanjutnya.

5.1. Kesimpulan

Dari pembahasan pada Bab IV, dapat disimpulkan bahwa :

1. Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x; \sigma]$ merupakan Gelanggang σ -Skew McCoy karena terdapat dua polinomial $f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x; \sigma] \setminus \{0\}$ dimana,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} (r_0 - r_0\mathbf{i} + r_0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^m \begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix}_j x^j$$

sedemikian sehingga, $f(x)g(x) = \mathbf{0}$. Dan terdapat

$$c = \sum_{j=0}^m g_j g_{j+1} \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$$

yang memenuhi $f(x)c = \mathbf{0}$.

2. Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x; \sigma]$ merupakan Gelanggang σ -Skew π -McCoy karena terdapat dua polinomial $f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x; \sigma] \setminus \{0\}$, sedemikian sehingga $f(x)g(x) \in N(\mathcal{T}[x; \sigma])$. Dan terdapat $c \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ yang memenuhi $f(x)c \in N(\mathcal{T}[x; \sigma])$ dimana elemen nilpoten pada Gelanggang Matriks Segitiga Formal hanya ada satu yaitu $\mathbf{0}$.
3. Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x; \sigma]$ merupakan Gelanggang σ -Skew Armendariz karena terdapat dua polinomial $f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x; \sigma] \setminus \{0\}$ dimana,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} (r_0 - r_0\mathbf{i} + r_0\mathbf{j}) & (0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) \end{pmatrix}_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^m \begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}, 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ 0 & 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{pmatrix}_j x^j$$

sedemikian sehingga, $f(x)g(x) = \mathbf{0}$, maka $f_i g_j = \mathbf{0}$.

4. Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x; \sigma, \pi]$ dengan $\pi = 0$ merupakan Gelanggang σ -Skew π -Armendariz karena terdapat dua polinomial $f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x; \sigma, \pi] \setminus \{0\}$, sedemikian sehingga $f(x)g(x) \in N(\mathcal{T}[x; \sigma, \pi])$. Maka, $f_i g_j = \mathbf{0} \in N(\mathcal{T}[x; \sigma, \pi])$ dimana elemen nilpoten pada Gelanggang Matriks Segitiga Formal hanya ada satu yaitu $\mathbf{0}$.

5.2. Saran

Sebagai salah satu bentuk matriks yang unik karena merupakan gabungan dari bilangan Trinion, bilangan Quaternion dan Bimodul diantara keduanya, Gelanggang $\mathcal{T}[x; \sigma]$ memiliki masih banyak hal yang dapat dikembangkan oleh peneliti selanjutnya, diantaranya ialah dengan mengembangkan ordo dari Matriks tersebut, juga dengan mengganti endomorfisma pada masing masing bilangan yang akan berpengaruh terhadap bentuk $f(x)$ dan $g(x)$. Selain itu, peneliti selanjutnya juga dapat mengganti bilangan c yang terdapat pada Definisi Gelanggang σ -Skew McCoy.

DAFTAR PUSTAKA

- Anwar, A. N. (2020). *Karakteristik Polinom yang Komutatif dengan Setiap Polinom dalam Gelanggang Polinom Miring dengan Gelanggang Tumpuan Trinion*. Makassar.
- Areej M. Abduldaim, S. C. (2013). α -skew π -McCoy Rings. *Hindawi*, Volume 2013.
- Armendariz, E. (1973). A note on Extensions of Baer and p.p.-rings,. *J. Austral Math Soc.*
- Ghahramani, H. (2011). Skew Polynomial Rings of Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Algebra*, 349 (2012) 201-216.
- Hardy, K. (2005). *Linear Algebra For Endgineers and Scientists Using Matlab*. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Howard Anton, C. R. (2011). *Elementary Linear Algebra with Supplemental Applications*.
- McCoy, N. H. (1942). Remarks on Divisors of Zero. *Amer Math Monthly*.
- Sims, C. C. (1984). *Abstract Algebra A Computational Approach*. Canada: Library of Congress Cataloging.
- Sri Wahyuni, Y. A. (t.thn.). Sifat-Sifat Pengembangan Ring Armendariz dan Ring McCoy. *Jurnal Matematika UNAND*, Vol.3 No.3 Hal.1-8.
- Yuwaningsih, D. A. (2020). Hasil Tambah Langsung Suatu (R,S) Modul. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, Vol 3 No.2.