KONSTRUKSI GELANGGANG MCCOY DAN ARMENDARIZ MENGGUNAKAN GELANGGANG MATRIKS SEGITIGA FORMAL

OLEH :

AIDAH NABILAH ANWAR

H022202006

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

KONSTRUKSI GELANGGANG MCCOY DAN ARMENDARIZ MENGGUNAKAN GELANGGANG MATRIKS SEGITIGA FORMAL

TESIS

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Magister Sains

pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

AIDAH NABILAH ANWAR

H022202006

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

LEMBAR PENGESAHAN

KONSTRUKSI GELANGGANG MCCOY DAN ARMENDARIZ MENGGUNGAKAN GELANGGANG MATRIKS SEGITIGA FORMAL

Disusun dan diajukan oleh

AIDAH NABILAH ANWAR
H022202006

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 7 Desember 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pendamping,
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si**
NIP. 19680803 199202 1 001	**NIP. 19700807 200003 1 002**

Ketua Program Studi Magister Matematika,	Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin,
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1 013	**NIP. 19720515 199702 1 002**

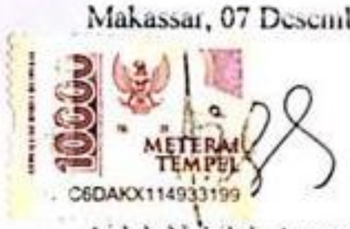
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Konstruksi Gelanggang McCoy dan Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. sebagai Pembimbing Utama dan Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi sebagai artikel dengan judul "Konstruksi Gelanggang Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal".

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 07 Desember 2022



Aidah Nabilah Anwar
NIM. H022202006

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada **Allah SWT** atas segala nikmat hidup, kesehatan, rejeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul "**Konstruksi Gelanggang McCoy dan Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal".** Tak lupa pula salam dan shalawat kepada baginda **Rasulullah Nabiullah Muhammad SAW,** sosok yang menjadi suri tauladan bagi penulis dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Penyusunan tesis ini tentunya tak lepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kepada Ayahanda tercinta **Anwar Zainuddin** dan Ibunda tersayang **Sunarti** yang telah mendidik penulis dengan penuh kesabaran, cinta dan kasih sayang yang tulus. Serta kakak-kakakku tersayang **Prihartini Amalia Anwar, Puspita Hardianti Anwar, dan Reskiati Wiradhika Anwar** yang senantiasa selalu memberikan dukungan dan motivasi kepada adik bungsunya ini.

Pengharagaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada :

1. Bapak **Rektor Universitas Hasanuddin** beserta jajarannya, Bapak **Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** beserta jajarannya dan semua pihak birokrasi atas ilmu dan kemudahan-kemudahan yang diberikan, baik dibidang akademik maupun dibidang kemahasiswaan.
2. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si** selaku ketua prodi program pasca sarjana matematika.
3. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku pembimbing utama serta Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing pertama yang selalu sabar dalam membimbing penulis dan telah bersedia meluangkan waktunya di sela-sela kesibukan demi membimbing penulis dan memberikan masukan serta koreksi yang dibutuhkan selama pengerjaan tesis ini.

4. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku ketua tim penguji, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si** dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku anggota tim penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan kritikan yang membangun kepada penulis dalam penyusanan tesis ini.
5. Bapak dan Ibu seluruh **Dosen Program PascaSarjana Matematika** serta **Staf Jurusan Matematika** yang telah memberikan banyak masukan dan arahan dalam pengurusan Administrasi.
6. Untuk semua teman-teman seperjuangan Pasca Matematika yang senantiasa memberikan motivasi dan dorongan agar penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Terimakasih untuk waktu singkat yang sangat berharganya.
7. Teruntuk semua pihak yang tak sempat disebutkan satu persatu. Terimakasih banyak telah membantu penulis dalam pembuatan tesis ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan tangan terbuka demi perbaikan lebih lanjut.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak yang membacanya.

Amin Yaa Rabbal Alamin.

Makassar, 22 November 2022

Penulis

ABSTRAK

Bilangan Trinion dan bilangan Quaternion adalah salah satu jenis dari bilangan *hypercomplex* yang merupakan perluasan dari bilangan *complex*. Bilangan *hypercomplex* sendiri merupakan bilangan yang terdiri dari satu bilangan riil dan memiliki lebih dari satu bilangan imajiner. Dikarenakan bilangan Trinion dan bilangan Quaternion adalah Gelanggang, maka dari kedua bilangan tersebut dapat dibentuk suatu modul yang disebut sebagai bimodul Trinion dan Quaternion. Bimodul ini merupakan modul yang terdiri dari modul kiri Trinion dan modul kanan Quaternion. Selanjutnya, bilangan Trinion, bilangan Quaternion dan Bimodulnya dikemas kedalam bentuk Matriks Segitiga Formal yang berordo 2×2.

Matriks segitiga formal atau yang lebih dikenal sebagai matriks segitiga atas merupakan matriks yang semua elemen dibawah diagonal utamanya bernilai nol. Matriks segitiga formal yang elemen didalamnya berupa bilangan Trinion, bilangan Quaternion dan bimodulnya juga dapat disebut sebagai Gelanggang Polinom Miring Matriks Segitiga Formal dikarenakan bilangan Trinion, bilangan Quaternion dan Bimodulnya merupakan suatu gelanggang polinom miring dimana aturan perkaliannya mengikut ke aturan perkalian masing-masing bilangan. Selanjutnya, gelanggang polinom miring matriks segitiga formal tersebut akan di modifikasi sedemikian rupa sehingga dapat memenuhi syarat dari Gelanggang McCoy dan Gelanggang Armendariz yang merupakan perluasan dari Gelanggang Polinom Miring. Penelitian ini akan menunjukkan pengkonstruksian Gelanggang McCoy dan Gelanggang Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal yang elemen didalamnya berupa bilangan Trinion, bilangan Quaternion, dan Bimodulnya.

Kata Kunci : Trinion, Quaternion, Bimodul, Matriks Segitiga Formal, Gelanggang, Gelanggang Polinom Miring, Gelanggang McCoy, Gelanggang Armendariz.

ABSTRACT

Trinion number and Quaternion number are one of the hypercomplex numbers which is an extensions of the complex number. Hypercomplex number is a number that consists of one real number and have more than one imaginary numbers. Because Trinion number and Quaternion number are a rings, then from both of that numbers can be formed a module called bimodule of Trinion and Quaternion. Bimodule of Trinion and Quaternion consists a left module Trinion and right module Quaternion. Furthermore, Trinion number, Quaternion number and their bimodule can be formed into a 2×2 Formal Triangular Matrix.

Formal Triangular Matrix or better known as Upper Triangular Matrix is a Matrix that all entries below the main diagonal are zero. Formal Triangular Matrix that have Trinion number, Quaternion number and their bimodule as their entries is also called Formal Triangular Matrix Skew Polynomial Ring because all of that numbers are a Skew Polynomial Rings where their multiplication rule is follows the multiplication rule for each number. Furthermore, the formal triangular matrix ring will be modified so that it can meet the requirements of McCoy Ring and Armendariz Ring which are a generalized of Skew Polynomial Ring. The aims of this research is to show the constuction of McCoy Ring and Armendariz Ring Using Formal Triangular Matrix Ring that have Trinion number, Quaternion number and their bimodule as their entries.

Keywords : Trinion, Quaternion, Bimodule, Formal Triangular Matrix, Ring, Skew Polynomial Ring, McCoy Ring, Armendariz Ring.

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN iii

KATA PENGANTAR v

ABSTRAK vii

ABSTRACT viii

DAFTAR ISI ix

BAB I PENDAHULUAN 1

1. 1. Latar Belakang 1

1. 2. Rumusan Masalah 2

1. 3. Tujuan Penelitian 3

1. 4. Batasan Masalah 3

1. 5. Manfaat Penelitian 3

1. 6. Sistematika Penulisan 3

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5

2.1. Matriks Segitiga Formal 5

2.2. Gelanggang 5

2.2.1. Endomorfisma Gelanggang 6

2.2.2. Gelanggang Polinom Miring 7

2.3. Trinion 8

2.3.1. Operasi Pada Trinion 8

2.3.2. Gelanggang Trinion 9

2.4. Quaternion 11

2.4.1. Operasi Pada Quaternion 12

2.4.2. Gelanggang Quaternion 12

2.5. Modul dan Bimodul 16
2.5.1. Modul 16
2.5.2. Bimodul 16
2.6. Gelanggang McCoy 17
2.6.1. Gelanggang McCoy Miring 17
2.7. Gelanggang Armendariz 19
2.7.1. Gelanggang Armendariz Miring 19
BAB III METODE PENELITIAN 21
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 22
4.1. Modul dan Bimodul dari Trinion dan Quaternion 22
4.1.1. Modul Kiri Trinion 22
4.1.2. Modul Kanan Quaternion 25
4.1.3. Bimodul Trinion dan Quaternion 29
4.2. Gelanggang Matriks Segitiga Formal 29
4.3. Endomorfisma Gelanggang Matriks Segitiga Formal 33
4.3.1. Endomorfisma Gelanggang Trinion 33
4.3.2. Endomorfisma Gelanggang Quaternion 34
4.3.3. Endomorfisma Bimodul Trinion dan Quaternion 35
4.4. Pengkonstruksian Gelanggang Matriks Segitiga Formal 36
4.4.1. Gelanggang σ-Skew McCoy dan Gelanggang σ-Skew Armendariz 36
4.4.2. Gelanggang σ-Skew π-McCoy dan Gelanggang σ-Skew π-Armendariz 56
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 58
5.1. Kesimpulan 58
5.2. Saran 59

DAFTAR PUSTAKA 60

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

1. 1. Latar Belakang

Secara umum matriks dikenal sebagai sekumpulan bilangan yang disusun sedemikian rupa berdasarkan baris dan kolom sehingga membentuk bangun persegi. Bilangan-bilangan yang disusun dalam baris dan kolom ini dinamakan elemen matriks. Dalam aljabar linear terdapat berbagai macam bentuk dan jenis matriks, diantaranya ialah matriks segitiga.

Matriks segitiga merupakan salah satu bentuk matriks persegi yang berordo $n \times n$. Matriks segitiga dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Dalam beberapa penelitian, matriks segitiga atas juga dikenal sebagai matriks segitiga formal. Adapun bentuk dari matriks segitiga formal yang berordo 2×2 ialah sebagai berikut.

$$\mathcal{T}(R, M, S) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \middle| \, r \in R, m \in M, s \in S \right\}$$

Sama halnya dengan matriks pada umumnya, elemen-elemen pada matriks segitiga formal juga dapat berupa bilangan bulat, bilangan asli, bilangan real, bilangan rasional, maupun bilangan kompleks. Namun, pada tesis ini akan berfokus pada bilangan *hypercomplex* yang merupakan perluasan dari bilangan kompleks.

Jika bilangan kompleks merupakan pasangan terurut dari satu bagian real dan satu bagian imajiner, maka lain halnya dengan bilangan *hypercomplex*. Bilangan *hypercomplex* merupakan bilangan yang memiliki lebih dari satu bagian imajiner. Diantaranya, terdapat bilangan Quaternion ($\mathbb{H}$) yang diperkenalkan oleh Sir William Rowan Hamilton. Bilangan Quaternion merupakan pasangan terurut dari satu bagian real dan tiga bagian imajiner. Selain Quaternion, terdapat pula bilangan *hypercomplex* lainnya yaitu, Trinion ($\mathbb{T}$) yang terdiri dari satu bagian real dan dua bagian imajiner.

Seperti bilangan pada umumnya, bilangan Quaternion dan Trinion juga memiliki modul. Modul merupakan salah satu bentuk struktur aljabar yang merupakan perumuman dari suatu ruang vektor. Modul sendiri terbagi menjadi dua bagian yaitu modul kiri dan modul kanan. Dalam pembentukan modul melibatkan suatu gelanggang dengan elemen satuan. Apabila suatu modul M memiliki modul kiri R yang berbeda dengan modul kanan S, maka modul M disebut sebagai (R,S)-bimodul.

Dalam hal ini, apabila bilangan *hypercomplex* Trinion mempunyai modul kiri R dan Quaternion memiliki modul kanan S, maka dapat terbentuk suatu (R,S)-bimodul. Selanjutnya, bilangan *hypercomplex* Trnion dan Quaternion beserta bimodul dari kedua bilangan *hypercomplex* tersebut akan dikemas kedalam bentuk matriks segitiga formal. Karena Trinion dan Quaternion merupakan suatu gelanggang begitu pula dengan (R,S)-bimodulnya, maka matriks segitiga formal tersebut juga disebut sebagai gelanggang matriks segitiga formal.

Lebih lanjut, peneliti ingin mengkaji mengenai gelanggang matriks segitiga formal dan kaitannya dengan gelanggang McCoy miring dan gelanggang Armendariz miring yang merupakan perkhususan dari gelanggang polinom miring. Hasil-hasil penelitian akan ditata dan dirangkum dalam bentuk satu tulisan yang diberi judul :

“Konstruksi Gelanggang McCoy dan Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal”

1. 2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam tesis ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana mengkonstruksi suatu (R,S)-bimodul dengan R adalah Gelanggang Trinion dan S adalah Gelanggang Quaternion untuk membangun Gelanggang Matriks Segitiga Formal ?
2. Bagaimana mengkonstruksi :
   (i). Gelanggang σ -*skew* McCoy ?
   (ii). Gelanggang σ-*skew* π-McCoy ?
   (iii). Gelanggang σ-*skew* Armendariz ?
   (iv). Gelanggang σ-*skew* π-Armendariz ?

1. 3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan penelitian dalam tesis ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk memperoleh solusi dalam pengembangan Gelanggang Matriks Segitiga Formal dari hasil pengkonstruksian (R,S)-bimodul dengan R adalah Gelanggang Trinion dan S adalah Gelanggang Quaternion.
2. Untuk memperoleh solusi dari hasil pengkonstruksian :
   (i). Gelanggang σ-*skew* McCoy.
   (ii). Gelanggang σ-*skew* π-McCoy.
   (iii). Gelanggang σ-*skew* Armendariz.
   (iv). Gelanggang σ-*skew* π-Armendariz.

1. 4. Batasan Masalah

Pada penulisan tesis ini hanya akan dibatasi pada matriks segitiga formal yang berordo 2×2 dan σ derivatif yang digunakan bernilai 0.

1. 5. Manfaat Penelitian

Penulisan ini diharapkan bermanfaat sebagai bahan kajian di dalam mempelajari mengenai karakteristik bimodul pada Gelanggang Hypercomplex Trinion dan Quaternion, Gelanggang σ-*skew* McCoy, Gelanggang σ-*skew* π-McCoy, Gelanggang σ-*skew* Armendariz dan Gelanggang σ-*skew* π-Armendariz.

1. 6. Sistematika Penulisan

Agar penulisan tesis mudah dipahami maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari lima bab. Masing-masing bab dibagi kedalam subbab dengan rumusan sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Meliputi Matriks Segitiga, Gelanggang, Trinion, Quaternion, Modul dan Bimodul, Gelanggang McCoy, dan Gelanggang Armendariz.

BAB III METODE PENELITIAN

Meliputi tahapan dalam pengkonstruksian Gelanggang σ-*skew* McCoy, Gelanggang σ-*skew* π-McCoy, Gelanggang σ-*skew* Armendariz, dan Gelanggang σ-*skew* π-Armendariz.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Meliputi hasil penelitian yang diperoleh menggunakan teori dari tinjauan pustaka dan berisi alasan ulasan jawaban dari rumusan masalah.

BAB V PENUTUP

Meliputi kesimpulan dan saran yang berhubungan dengan topik pembahasan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dibahas mengenai Matriks Segitiga Formal, Gelanggang, Trinion, Quaternion, Modul dan Bimodul, Gelanggang McCoy dan Gelanggang Armendariz.

2.1. Matriks Segitiga Formal

Matriks segitiga merupakan salah satu bentuk dari matriks persegi. Matriks persegi dengan semua elemen diatas diagonal utama bernilai nol disebut matriks segitiga bawah. Sedangkan, matriks persegi dengan semua elemen dibawah diagonal utama bernilai nol disebut matriks segitiga atas.

Definisi 2.1. *Matriks segitiga formal juga dikenal sebagai matriks segitiga atas dimana semua elemen dibawah diagonal utamanya bernilai nol. Adapun bentuk umum dari matriks segitiga atas adalah sebagai berikut :*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

2.2. Gelanggang

Sistem bilangan yang telah dikenal seperti bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan kompleks maupun bilangan *hypercomplex* mempunyai dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian. Sistem aljabar dengan dua operasi tersebut termasuk dalam sistem aljabar yang dinamakan Gelanggang.

Definisi 2.2. *Gelanggang* $(R,+,\cdot)$ *adalah himpunan tak kosong* R *dengan dua operasi biner penjumlahan* $(+)$ *dan perkalian* $(\cdot)$ *yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.*

1. $(R,+)$ *membentuk grup komutatif,* $a+b=b+a$
2. $(R,\cdot)$ *berlaku sifat asosiatif,* $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
3. $(R,+,\cdot)$ *bersifat distributif,* $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$

untuk setiap $a,b,c\in R$.

Contoh 2.2. Misal diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian biasa. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ disebut gelanggang karena memenuhi 3 aksioma pada **Definisi 2.2.**

2.2.1. Endomorfisma Gelanggang

Endomorfisma merupakan homomorfisma yang pemetaannya dari suatu gelanggang ke gelanggang itu sendiri.

Definisi 2.2.1.a. *Pemetaan σ dari suatu gelanggang $(R, +, \cdot)$ ke dirinya sendiri yang memenuhi dua aksioma berikut disebut sebagai endomorfisma gelanggang. Untuk setiap $a, b \in R$, maka berlaku :*

1. $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$
2. $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$

Contoh 2.2.1.a. Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{c_0 + c_1\boldsymbol{i} \mid c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa merupakan suatu gelanggang dan mempunyai endomorfisma $\sigma(\boldsymbol{c}) = c_0 - c_1\boldsymbol{i}$. Jika $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}$, maka

1. Ruas kiri

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= \sigma[(a_0 + a_1\boldsymbol{i}) + (b_0 + b_1\boldsymbol{i})] \\ &= \sigma[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\boldsymbol{i}] \\ &= (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{a}) + \sigma(\boldsymbol{b}) &= \sigma(a_0 + a_1\boldsymbol{i}) + \sigma(b_0 + b_1\boldsymbol{i}) \\ &= (a_0 - a_1\boldsymbol{i}) + (b_0 - b_1\boldsymbol{i}) \\ &= (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa ruas kiri dan kanan bernilai sama, maka syarat pertama **Terpenuhi**.

2. Ruas kiri

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{ab}) &= \sigma[(a_0 + a_1\boldsymbol{i})(b_0 + b_1\boldsymbol{i})] \\ &= \sigma[(a_0b_0) + (a_0b_1\boldsymbol{i}) + (a_1b_0\boldsymbol{i}) - (a_1b_1)] \\ &= \sigma[(a_0b_0 - a_1b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0)\boldsymbol{i}] \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1) - (a_0b_1 + a_1b_0)\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{a})\sigma(\boldsymbol{b}) &= \sigma(a_0 + a_1\boldsymbol{i})\sigma(b_0 + b_1\boldsymbol{i}) \\ &= (a_0 - a_1\boldsymbol{i})(b_0 - b_1\boldsymbol{i}) \\ &= (a_0b_0 - a_0b_1\boldsymbol{i} - a_1b_0\boldsymbol{i} - a_1b_1) \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1) - (a_0b_1 + a_1b_0)\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

Dapat dilihat juga bahwa ruas kiri dan kanan bernilai sama, maka syarat kedua juga terpenuhi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\sigma(\boldsymbol{c}) = c_0 - c_1\boldsymbol{i}$ merupakan endomorfisma gelanggang pada bilangan kompleks.

Definisi 2.2.1.b. *Derivatif gelanggang atau yang biasa disimbolkan sebagai δ diperlukan dalam pembentukan gelanggang polinom miring dan bergantung pada endomorfisma gelanggang sehingga disebut σ-derivatif. Jika $a, b \in R$, maka $\delta(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \delta(b) + \delta(a) \cdot b$.*

2.2.2. Gelanggang Polinom Miring

Dalam pembentukan suatu gelanggang polinom miring diperlukan beberapa hal yaitu suatu gelanggang (disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring), endomorfisma gelanggang (endomorfisma biasanya disimbolkan dengan σ(sigma) dan δ(delta) yang merupakan σ-derivatif.

Definisi 2.2.2. *Gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$ merupakan gelanggang yang terbentuk dari gelanggang polinomial dengan variabel tak diketahui x dan mempunyai bentuk*

$$R[x; \sigma, \delta] = \{r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots + r_{n-1}x^{n-1} + r_nx^n \mid r_i \in R\}$$

dan operasi perkaliannya $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Aturan perkaliannya inilah yang membuat gelanggang $R[x; \sigma, \delta]$ bersifat tidak komutatif meskipun gelanggang tumpuan R adalah gelanggang komutatif.

Contoh 2.2.2. Misalkan $R[x; \sigma, \delta] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$. Endomorfisma $\sigma\left(a + b\sqrt{-5}\right) = a - b\sqrt{-5}$. Pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta\left(a + b\sqrt{-5}\right) = b$. Gelanggang ini tidak bersifat komutatif. Misal $f(x) = \left(4 - 2\sqrt{-5}\right)x$ dan $g(x) = \left(3 + 5\sqrt{-5}\right)x$.

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left[\left(4-2\sqrt{-5}\right)x\right]\left[\left(3+5\sqrt{-5}\right)x\right] \\
&= \left(4-2\sqrt{-5}\right)\left[x\left(3+5\sqrt{-5}\right)\right]x \\
&= \left(4-2\sqrt{-5}\right)\left[\sigma\left(3+5\sqrt{-5}\right)x+\delta\left(3+5\sqrt{-5}\right)\right]x \\
&= \left(4-2\sqrt{-5}\right)\left[\left(3-5\sqrt{-5}\right)x+5\right]x \\
&= \left(4-2\sqrt{-5}\right)\left[\left(3-5\sqrt{-5}\right)x^2+5x\right] \\
&= \left[\left(4-2\sqrt{-5}\right)\left(3-5\sqrt{-5}\right)x^2\right]+\left[\left(4-2\sqrt{-5}\right)5x\right] \\
&= \left(-38-26\sqrt{-5}\right)x^2+\left(20-10\sqrt{-5}\right)x \\
g(x)f(x) &= \left[\left(3+5\sqrt{-5}\right)x\right]\left[\left(4-2\sqrt{-5}\right)x\right] \\
&= \left(3+5\sqrt{-5}\right)\left[x\left(4-2\sqrt{-5}\right)\right]x \\
&= \left(3+5\sqrt{-5}\right)\left[\sigma\left(4-2\sqrt{-5}\right)x+\delta\left(4-2\sqrt{-5}\right)\right]x \\
&= \left(3+5\sqrt{-5}\right)\left[\left(4+2\sqrt{-5}\right)x^2-2x\right] \\
&= \left[\left(3+5\sqrt{-5}\right)\left(4+2\sqrt{-5}\right)x^2\right]-\left[\left(3+5\sqrt{-5}\right)2x\right] \\
&= \left(-38+26\sqrt{-5}\right)x^2-\left(6+10\sqrt{-5}\right)x
\end{aligned}
$$

2.3. Trinion

Bilangan Trinion yang disimbolkan oleh $\mathbb{T}$ merupakan perluasan umum dari aljabar kompleks.

Definisi 2.3. *Bilangan trinion t didefinisikan sebagai kombinasi linear dari suatu bagian real dan dua bagian imajiner yaitu* $t = t_0 + t_1\boldsymbol{i} + t_2\boldsymbol{j}$ *dimana* $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *dan memenuhi* $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = \boldsymbol{-1}, \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j^2} = \boldsymbol{-1}$.

2.3.1. Operasi Pada Trinion

Misalkan p dan q merupakan bilangan trinion dengan $p = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}$ dan $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j}$. Operasi penjumlahan dan perkalian pada Trinion didefiniskan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
p+q &= (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}) + (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j}) \\
&= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\boldsymbol{i} + (p_2 + q_2)\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

dan,

$$
\begin{aligned}
pq &= (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})(q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j}) \\
&= (p_0q_0 + p_0q_1\boldsymbol{i} + p_0q_2\boldsymbol{j}) + (p_1q_0\boldsymbol{i} + p_1q_1(\boldsymbol{i})^2 + p_1q_2\boldsymbol{ij}) \\
&\quad + (p_2q_0\boldsymbol{j} + p_2q_1\boldsymbol{ji} + p_2q_2(\boldsymbol{j})^2)
\end{aligned}
$$

Diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = \boldsymbol{-1}, \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j^2} = \boldsymbol{-1},$ sehingga

$$= (p_0q_0 + p_0q_1\boldsymbol{i} + p_0q_2\boldsymbol{j}) + (p_1q_0\boldsymbol{i} + p_1q_1\boldsymbol{j} + (-1)p_1q_2)$$
$$+ (p_2q_0\boldsymbol{j} + (-1)p_2q_1 + p_2q_2(-\boldsymbol{i}))$$
$$= (p_0q_0 - p_1q_2 - p_2q_1) + (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_2)\boldsymbol{i} + \ (p_0q_2 + p_1q_1 + p_2q_0)\boldsymbol{j}$$

2.3.2. Gelanggang Trinion

Untuk menunjukkan bahwa Trinion merupakan gelanggang berdasarkan **Definisi 2.2.**, maka dimisalkan $a, b, c \in \mathbb{T}$ dengan $a = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$, $b = b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$, $c = c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j}$.

(i). Akan ditunjukkan $(\mathbb{T}, +)$ adalah grup komutatif.

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) + (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)\boldsymbol{i} + (b_2 + a_2)\boldsymbol{j} \\ &= (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) \\ &= b + a. \end{aligned}$$

(ii). Akan ditunjukkan $(\mathbb{T}, \cdot)$ bersifat asosiatif $(ab)c = a(bc)$.

$$\begin{aligned} (ab)c &= [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j})]\ (c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j}) \\ &= [(a_0(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) + a_1\boldsymbol{i}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) \\ &\quad + a_2\boldsymbol{j}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}))]\ (c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j}) \\ &= [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j}) + (a_1b_0\boldsymbol{i} + a_1b_1\boldsymbol{j} - a_1b_2) \\ &\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1 - a_2b_2\boldsymbol{i})]\ (c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j}) \\ &= [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j}) + (a_1b_0\boldsymbol{i} + a_1b_1\boldsymbol{j} - a_1b_2) \\ &\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1 - a_2b_2\boldsymbol{i})]\ c_0 + \\ &\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j}) + (a_1b_0\boldsymbol{i} + a_1b_1\boldsymbol{j} - a_1b_2) \\ &\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1 - a_2b_2\boldsymbol{i})]\ c_1\boldsymbol{i} + \\ &\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j}) + (a_1b_0\boldsymbol{i} + a_1b_1\boldsymbol{j} - a_1b_2) \\ &\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1 - a_2b_2\boldsymbol{i})]\ c_2\boldsymbol{j} \\ &= [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})\ b_0c_0 + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_1c_0\boldsymbol{i} \\ &\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_2c_0\boldsymbol{j}] + \\ &\quad [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_0c_1\boldsymbol{i} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})\ b_1\boldsymbol{i}c_1\boldsymbol{i} \\ &\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_2\boldsymbol{j}c_1\boldsymbol{i}] + \\ &\quad [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_0c_2\boldsymbol{j} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})\ b_1\boldsymbol{i}c_2\boldsymbol{j} \\ &\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_2\boldsymbol{j}c_2\boldsymbol{j}] \end{aligned}$$

$$= [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})\, b_0c_0 + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_1c_0\boldsymbol{i}$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_2c_0\boldsymbol{j}] +$$
$$[(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_0c_1\boldsymbol{i} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})\, b_1c_1\boldsymbol{j}$$
$$- (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_2c_1] +$$
$$[(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_0c_2\boldsymbol{j} - (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})\, b_1c_2$$
$$- (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})b_2c_2\boldsymbol{i}]$$
$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})[(b_0c_0 + b_1c_0\boldsymbol{i} + b_2c_0\boldsymbol{j}) + (b_0c_1\boldsymbol{i}$$
$$+b_1c_1\boldsymbol{j} - b_2c_1) + (b_0c_2\boldsymbol{j} - b_1c_2 - b_2c_2\boldsymbol{i})]$$
$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})[(b_0c_0 - b_2c_1 - b_1c_2) + (b_1c_0$$
$$+b_0c_1 - b_2c_2)\boldsymbol{i} + (b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2)\boldsymbol{j}$$
$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})[(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j})(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j})]$$
$$= a(bc).$$

(iii). Akan ditunjukkan $(\mathbb{T}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif.

a. Distributif kanan $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

$$a(b + c) = (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})\,[(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j})$$
$$+ (c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j})]$$
$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\boldsymbol{i}$$
$$+ (b_2 + c_2)\boldsymbol{j}]$$
$$= (a_0[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\boldsymbol{i} + (b_2 + c_2)\boldsymbol{j}])$$
$$+ (a_1\boldsymbol{i}[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\boldsymbol{i} + (b_2 + c_2)\boldsymbol{j}])$$
$$+ (a_2\boldsymbol{j}[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\boldsymbol{i} + (b_2 + c_2)\boldsymbol{j}])$$
$$= [(a_0b_0) + (a_0c_0) + (a_0b_1)\boldsymbol{i} + (a_0c_1)\boldsymbol{i}$$
$$+ (a_0b_2)\boldsymbol{j} + (a_0c_2)\boldsymbol{j}] + [(a_1b_0)\boldsymbol{i} + (a_1c_0)\boldsymbol{i}$$
$$+ (a_1b_1)\boldsymbol{j} + (a_1c_1)\boldsymbol{j} - (a_1b_2) - (a_1c_2)]$$
$$+ [(a_2b_0)\boldsymbol{j} + (a_2c_0)\boldsymbol{j} - (a_2b_1) - (a_2c_1)$$
$$- (a_2b_2)\boldsymbol{i} - (a_2c_2)\boldsymbol{i}]$$
$$= [((a_0b_0) - (a_1b_2) - (a_2b_1)) + ((a_0b_1)$$
$$+ (a_1b_0) - (a_2b_2))\boldsymbol{i} + ((a_0b_2) + (a_1b_1)$$
$$+ (a_2b_0))\boldsymbol{j}] + [((a_0c_0) - (a_1c_2) - (a_2c_1))$$
$$+ ((a_0c_1) + (a_1c_0) - (a_2c_2))\boldsymbol{i} + ((a_0c_2)$$
$$+ (a_1c_1) + (a_2c_0))\boldsymbol{j}]$$
$$= (ab) + (ac).$$

b. Distributif kiri $(a+b)c=(ac)+(bc)$.

$$
\begin{aligned}
(a+b)c &= [(a_0+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j})+(b_0+b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})] \\
&\quad (c_0+c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}) \\
&= [(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}] \\
&\quad (c_0+c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}) \\
&= ([(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}]c_0) \\
&\quad +([(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}]c_1\boldsymbol{i}) \\
&\quad +([(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}]c_2\boldsymbol{j}) \\
&= [(a_0c_0)+(b_0c_0)+(a_1c_0)\boldsymbol{i}+(b_1c_0)\boldsymbol{i} \\
&\quad +(a_2c_0)\boldsymbol{j}+(b_2c_0)\boldsymbol{j}]+[(a_0c_1)\boldsymbol{i}+(b_0c_1)\boldsymbol{i} \\
&\quad +(a_1c_1)\boldsymbol{j}+(b_1c_1)\boldsymbol{j}-(a_2c_1)-(b_2c_1)] \\
&\quad +[(a_0c_2)\boldsymbol{j}+(b_0c_2)\boldsymbol{j}-(a_1c_2)-(b_1c_2) \\
&\quad -(a_2c_2)\boldsymbol{i}-(b_2c_2)\boldsymbol{i}] \\
&= ([(a_0c_0)-(a_1c_2)-(a_2c_1)]+[(a_0c_1) \\
&\quad +(a_1c_0)-(a_2c_2)]\boldsymbol{i}+[(a_0c_2)+(a_1c_1) \\
&\quad +(a_2c_0)]\boldsymbol{j})+([(b_0c_0)-(b_1c_2)-(b_2c_1)] \\
&\quad +[(b_0c_1)+(b_1c_0)-(b_2c_2)]\boldsymbol{i}+[(b_0c_2) \\
&\quad +(b_1c_1)+(b_2c_0)]\boldsymbol{j}) \\
&= (ac)+(bc).
\end{aligned}
$$

Karena ketiga syarat diatas terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa Trinion merupakan suatu gelanggang.

2.4. Quaternion

Himpunan bilangan quaternion yang disimbolkan oleh $\mathbb{H}$ merupakan bilangan *hypercomplex* pertama yang ditemukan setelah bilangan kompleks. Simbol quaternion $\mathbb{H}$ diambil dari nama matematikawan yang menemukannya, yaitu Sir Hamilton.

Definisi 2.4. *Himpunan bilangan quaternion didefinisikan sebagai kumpulan semua kombinasi linear dari satu bagian real dan tiga bagian imajiner yaitu* $\mathbb{H}=\{q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}\mid q_0,q_1,q_2,q_3\in\mathbb{R}\}$ *yang memenuhi* $\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-\mathbf{1}.$

2.4.1. Operasi Pada Quaternion

Misalkan p dan q merupakan bilangan quaternion dengan $p = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$ dan $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$. Operasi penjumlahan dan perkalian pada Quaternion didefiniskan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
p + q &= (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}) + (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\
&= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\boldsymbol{i} + (p_2 + q_2)\boldsymbol{j} + (p_3 + q_3)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

dan,

$$
\begin{aligned}
pq &= (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k})(q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\
&= p_0\,(q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) + p_1\boldsymbol{i}\,(q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\
&\quad + p_2\boldsymbol{j}\,(q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) + p_3\boldsymbol{k}\,(q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}).
\end{aligned}
$$

Diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -\boldsymbol{1},$ sehingga

$$
\begin{aligned}
&= (p_0q_0 + p_0q_1\boldsymbol{i} + p_0q_2\boldsymbol{j} + p_0q_3\boldsymbol{k}) + (p_1q_0\boldsymbol{i} - p_1q_1 + p_1q_2\boldsymbol{k} - p_1q_3\boldsymbol{j}) \\
&\quad + (p_2q_0\boldsymbol{j} - p_2q_1\boldsymbol{k} - p_2q_2 + p_2q_3\boldsymbol{i}) + (p_3q_0\boldsymbol{k} + p_3q_1\boldsymbol{j} - p_3q_2\boldsymbol{i} - p_3q_3) \\
&= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\boldsymbol{i} \\
&\quad + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)\boldsymbol{j} + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

2.4.2. Gelanggang Quaternion

Untuk menunjukkan bahwa Quaternion merupakan gelanggang berdasarkan **Definisi 2.2.**, maka dimisalkan $a, b, c \in \mathbb{H}$ dengan $a = a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, $b = b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$, $c = c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$.

(i). Akan ditunjukkan $(\mathbb{H}, +)$ adalah grup komutatif.

$$
\begin{aligned}
a + b &= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) + (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k} \\
&= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)\boldsymbol{i} + (b_2 + a_2)\boldsymbol{j} + (b_3 + a_3)\boldsymbol{k} \\
&= (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \\
&= b + a.
\end{aligned}
$$

(ii). Akan ditunjukkan $(\mathbb{H}, \cdot)$ bersifat asosiatif $(ab)c = a(bc)$.

$$
\begin{aligned}
(ab)c &= [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})] \\
&\quad (c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) \\
&= [a_0(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + a_1\boldsymbol{i}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\
&\quad + a_2\boldsymbol{j}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) + a_3\boldsymbol{k}(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})] \\
&\quad (c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\boldsymbol{i} - a_1b_1 + \ a_1b_2\boldsymbol{k} - a_1b_3\boldsymbol{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1\boldsymbol{k} - a_2b_2 + a_2b_3\boldsymbol{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i} - a_3b_3)]\,(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) \\
&= [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\boldsymbol{i} - a_1b_1 + \ a_1b_2\boldsymbol{k} - a_1b_3\boldsymbol{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1\boldsymbol{k} - a_2b_2 + a_2b_3\boldsymbol{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i} - a_3b_3)]\,c_0 + \\
&\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\boldsymbol{i} - a_1b_1 + \ a_1b_2\boldsymbol{k} - a_1b_3\boldsymbol{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1\boldsymbol{k} - a_2b_2 + a_2b_3\boldsymbol{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i} - a_3b_3)]\,c_1\boldsymbol{i} + \\
&\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\boldsymbol{i} - a_1b_1 + \ a_1b_2\boldsymbol{k} - a_1b_3\boldsymbol{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1\boldsymbol{k} - a_2b_2 + a_2b_3\boldsymbol{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i} - a_3b_3)]\,c_2\boldsymbol{j} + \\
&\quad [(a_0b_0 + a_0b_1\boldsymbol{i} + a_0b_2\boldsymbol{j} + a_0b_3\boldsymbol{k}) \\
&\quad + (a_1b_0\boldsymbol{i} - a_1b_1 + \ a_1b_2\boldsymbol{k} - a_1b_3\boldsymbol{j}) \\
&\quad + (a_2b_0\boldsymbol{j} - a_2b_1\boldsymbol{k} - a_2b_2 + a_2b_3\boldsymbol{i}) \\
&\quad + (a_3b_0\boldsymbol{k} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i} - a_3b_3)]\,c_3\boldsymbol{k} \\
&= [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\,b_0c_0 + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1c_0\boldsymbol{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\,b_2c_0\boldsymbol{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + \ a_3\boldsymbol{k})\,b_3c_0\boldsymbol{k}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\,b_0c_1\boldsymbol{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1\boldsymbol{i}c_1\boldsymbol{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\,b_2\boldsymbol{j}c_1\boldsymbol{i} \\
&\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + \ a_3\boldsymbol{k})\,b_3\boldsymbol{k}c_1\boldsymbol{i}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\,b_0c_2\boldsymbol{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1\boldsymbol{i}c_2\boldsymbol{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\,b_2\boldsymbol{j}c_2\boldsymbol{j} \\
&\quad + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + \ a_3\boldsymbol{k})\,b_3\boldsymbol{k}c_2\boldsymbol{j}] + \\
&\quad [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\,b_0c_3\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1\boldsymbol{i}c_3\boldsymbol{k}$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_2\boldsymbol{j}c_3\boldsymbol{k}$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_3\boldsymbol{k}c_3\boldsymbol{k}]$$
$$= [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_0c_0 + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1c_0\boldsymbol{i}$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_2c_0\boldsymbol{j}$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_3c_0\boldsymbol{k}] +$$
$$[(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_0c_1\boldsymbol{i}$$
$$- (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1c_1$$
$$- (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_2c_1\boldsymbol{k}$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_3c_1\boldsymbol{j}] +$$
$$[(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_0c_2\boldsymbol{j}$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1c_2\boldsymbol{k}$$
$$- (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_2c_2$$
$$- (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_3c_2\boldsymbol{i}] +$$
$$[(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_0c_3\boldsymbol{k}$$
$$- (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1c_3\boldsymbol{j}$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_2c_3\boldsymbol{i}$$
$$- (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\, b_3c_3]$$
$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})[b_0c_0 + b_1c_0\boldsymbol{i} + b_2c_0\boldsymbol{j} + b_3c_0\boldsymbol{k}]$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})[b_0c_1\boldsymbol{i} - b_1c_1 - b_2c_1\boldsymbol{k} + b_3c_1\boldsymbol{j}]$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})[b_0c_2\boldsymbol{j} + b_1c_2\boldsymbol{k} - b_2c_2 - b_3c_2\boldsymbol{i}]$$
$$+ (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})[b_0c_3\boldsymbol{k} - b_1c_3\boldsymbol{j} + b_2c_3\boldsymbol{i} - b_3c_3]$$
$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})[(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3)$$
$$+ (b_1c_0 + b_0c_1 - b_3c_2 + b_2c_3)\boldsymbol{i} + (b_2c_0 + b_3c_1 + b_0c_2$$
$$- b_1c_3)\boldsymbol{j} + (b_3c_0 - b_2c_1 + b_1c_2 + b_0c_3)\boldsymbol{k}]$$
$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})[(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})$$
$$(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})]$$
$$= a(bc).$$

(iii). Akan ditunjukkan $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif.

a. Distributif kanan $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

$$a(b + c) = (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})[(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})$$
$$+ (c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})]$$

$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\boldsymbol{i} + (b_2 + c_2)\boldsymbol{j} + (b_3 + c_3)\boldsymbol{k}]$$

$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_0 + c_0) + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_1 + c_1)\boldsymbol{i} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_2 + c_2)\boldsymbol{j} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_3 + c_3)\boldsymbol{k}$$

$$= [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_0 + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_1\boldsymbol{i} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_2\boldsymbol{j} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})b_3\boldsymbol{k}] + [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})c_0 + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})c_1\boldsymbol{i} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})c_2\boldsymbol{j} + (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})c_3\boldsymbol{k}]$$

$$= [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})] + [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})]$$

$$= (ab) + (ac).$$

b. Distributif kiri $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

$$(a + b)c = [(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) + (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})]\,(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})$$

$$= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k}]\,(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})$$

$$= (a_0 + b_0)(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) + (a_1 + b_1)\boldsymbol{i}\,(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j}\,(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k}\,(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})$$

$$= (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) + (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})(c_0 + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})$$

$$= (ac) + (bc).$$

Karena ketiga syarat diatas terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa Quaternion merupakan suatu gelanggang.

2.5. Modul dan Bimodul

Dalam pembentukan modul perlu melibatkan suatu ring atau gelanggang dengan elemen satuan. Berikut akan dijelaskan mengenai perbedaan antara modul dan bimodul.

2.5.1. Modul

Modul adalah salah satu bentuk struktur aljabar yang melibatkan suatu gelanggang dengan elemen satuan. Modul terbagi menjadi dua bagian yaitu modul kiri dan modul kanan.

Definisi 2.5.1.a. *Misalkan R adalah gelanggang dan 1 merupakan identitas perkaliannya. M disebut modul kiri atas R jika memenuhi :*

(i). $(M, +)$ *merupakan grup komutatif.*

(ii). *Untuk setiap* $a, b \in R$ *dan* $x, y \in M$ *dengan operasi perkalian* $\cdot\ : R \times M \rightarrow M$ *, maka berlaku :*

1. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
2. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
3. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

Definisi 2.5.1.b. *Misalkan S adalah gelanggang dan 1 merupakan identitas perkaliannya. M disebut modul kanan atas S jika memenuhi :*

(i). $(M, +)$ *merupakan grup komutatif.*

(ii). *Untuk setiap* $a, b \in S$ *dan* $x, y \in M$ *dengan operasi perkalian* $\cdot\ : M \times R \rightarrow M$ *, maka berlaku :*

1. $(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$
2. $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$
3. $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$

2.5.2. Bimodul

Dalam aljabar abstrak, bimodul adalah suatu grup komutatif yang memiliki modul kiri R dan modul kanan S, sedemikian sehingga perkalian dari kanan dan kiri memiliki sifat kompatibilitas yaitu untuk setiap $r \in R, m \in M$, dan $s \in S$ memenuhi sifat $r(ms) = (rm)s$. Suatu (R, R)-bimodul juga diketahui sebagai R-bimodul.

Definisi 2.5.2. *Jika R dan S adalah dua gelanggang, maka (R, S)-bimodul adalah suatu grup komutatif $(M, +)$ sedemikian sehingga :*

1. *M adalah modul kiri R dan modul kanan S.*
2. *Untuk setiap $r \in R, s \in S$ dan $m \in M$ maka $(rm)s = r(ms)$.*

2.6. Gelanggang McCoy

Secara umum, Gelanggang polinom R atau biasa disimbolkan sebagai $R[x]$ disebut gelanggang McCoy, jika terdapat dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x]\backslash\{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)\, g(x) = 0$, maka terdapat $r \in R\backslash\{0\}$ yang memenuhi $f(x)r = 0$. Dengan aturan perkalian yang berlaku adalah aturan perkalian secara umum.

2.6.1. Gelanggang McCoy Miring

Gelanggang McCoy miring adalah salah satu bentuk dari gelanggang polinom miring sehingga aturan perkaliannya juga mengikuti aturan perkalian dari gelanggang polinom miring yaitu $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Definisi 2.6.1.a. *Misalkan $R[x; \sigma]$ adalah suatu gelanggang polinom miring dengan σ adalah endomorfisma gelanggang. Gelanggang R disebut sebagai* ***σ - skew McCoy*** *jika terdapat dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x; \sigma]\backslash\{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka terdapat $c \in R\backslash\{0\}$ yang memenuhi $f(x)c = 0$.*

Contoh 2.6.1.a. Misalkan $\mathbb{Z}_4$ adalah gelanggang bilangan bulat positif modulo 4 dengan bentuk sebagai berikut :

$$R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_4\right\}$$

Misalkan $\sigma : R \to R$ adalah suatu endomorfisma yang didefinisikan sebagai :

$$\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Misalkan, pilih

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \text{ dan } g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2$$

Sedemikian sehingga,

$$f(x)g(x) = \left[\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}x\right]\left[\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}x^2\right]$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\sigma\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}x^2$$

$$+ \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\sigma\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}x^3$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}x^3$$

$$= 0$$

Maka, terdapat $c = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$ yang memenuhi

$$f(x)\ c = \left[\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}x\right]\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\sigma\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}x$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}x$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}x$$

$$= 0$$

Maka, disimpulkan bahwa $R[x;\sigma]$ dengan $R = \mathbb{Z}_4$ merupakan gelanggang σ – skew McCoy.

Definisi 2.6.1.b. *Misalkan $R[x;\sigma]$ adalah suatu gelanggang polinom miring dengan σ adalah endomorfisma gelanggang. Gelanggang R disebut gelanggang* ***Gelanggang σ - skew π - McCoy*** *jika terdapat dua polinomial $f(x)$ dan $g(x) \in R[x;\sigma]\backslash\{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) \in N(R[x;\sigma])$ dimana $N(R[x;\sigma])$ adalah himpunan semua elemen nilpoten dari $R[x;\sigma]$. Maka terdapat $c \in R\backslash\{0\}$ yang memenuhi $f(x)c \in N(R[x;\sigma])$.*

Contoh 2.6.1.b. mengikut pada **Contoh 2.6.1.a.** dimana dimisalkan $R = \mathbb{Z}_4$ dengan

$$f(x) = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}x \text{ dan } g(x) = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}x^2$$

Selanjutnya akan dicari semua elemen nilpoten dari $\mathbb{Z}_4$. Elemen $a \in \mathbb{Z}_4$ disebut elemen nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = 0$.

Dalam gelanggang bilangan bulat positif modulo 4 ($\mathbb{Z}_4$) hanya terdapat dua elemen nilpoten yang memenuhi syarat yaitu 0 dan 2. Sehingga,

$$f(x)g(x) \in N(R[x;\sigma])$$

$$f(x)g(x) \in 0$$

berdasarkan **Contoh 2.6.1.a.** maka dapat disimpulkan bahwa Gelanggang bilangan bulat positif modulo 4 ($\mathbb{Z}_4$) merupakan Gelanggang σ - skew π – McCoy.

2.7. Gelanggang Armendariz

Secara umum, Gelanggang $R[x]$ disebut gelanggang armendariz jika terdapat dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x]\backslash\{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap $i, j \in \mathbb{R}$. Dengan aturan perkalian yang berlaku adalah aturan perkalian secara umum.

2.7.1. Gelanggang Armendariz Miring

Gelanggang Armendariz Miring merupakan salah satu bentuk dari gelanggang polinom miring sehingga aturan perkaliannya juga mengikuti aturan perkalian gelanggang polinom miring yaitu $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Definisi 2.7.1.a. *Suatu gelanggang polinom miring* $R[x;\sigma]$ *disebut sebagai gelanggang* ***σ - skew Armendariz*** *jika dua polinomial* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ *dan* $g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x;\sigma]\backslash\{0\}$ *sedemikian sehingga* $f(x)g(x) = 0$, *maka* $f_i g_j = 0$ *untuk setiap* $0 \leq i \leq n$ *dan* $0 \leq j \leq m$.

Contoh 2.7.1.a. Misalkan, $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$ dengan $\sigma : R \to R$ adalah suatu endomorfisma yang didefinisikan sebagai:

$$\sigma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Misalkan, pilih

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \text{ dan } g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x^2$$

Sedemikian sehingga,

$$f(x)g(x) = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x\right]\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x^2\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x^2$$

$$+ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x^3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^3$$

$$= 0$$

Dapat dilihat bahwa untuk setiap f_i dan g_j dimana $i = 0, 1$ dan $j = 0, 1$ memenuhi syarat $f_i g_j = 0$. Maka, dapat disimpulkan bahwa $R[x; \sigma]$ dengan $R = \mathbb{Z}_6$ merupakan gelanggang σ – skew Armendariz.

Definisi 2.7.1.b. *Misalkan* $R[x; \sigma, \delta]$ *adalah suatu gelanggang polinom mirng dengan* σ *adalah endomorfisma gelanggang dan* δ *adalah* σ *- derivatif. Gelanggang R disebut sebagai* ***Gelanggang σ - skew π - Armendariz*** *jika dua polinomial* $f(x)$ *dan* $g(x) \in R[x; \sigma, \delta]\backslash\{0\}$ *sedemikian sehingga* $f(x)g(x) \in N(R[x; \sigma, \delta])$*, maka* $f_i g_j \in N(R)$ *untuk setiap* $0 \le i \le n$ *dan* $0 \le j \le m$.