PELABELAN TIDAK TERATUR MODULAR PADA GRAF LENGKAP

MODULAR IRREGULAR LABELING ON COMPLETE GRAPHS

INDAH CHAIRUN NISA

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
SEKOLAH PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022

PELABELAN TIDAK TERATUR MODULAR PADA GRAF LENGKAP

Tesis

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

INDAH CHAIRUN NISA

H022211001

kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

TESIS

PELABELAN TIDAK TERATUR MODULAR PADA GRAF LENGKAP

INDAH CHAIRUN NISA
H022211001

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 21 Oktober 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pendamping,
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.**
NIP. 19700807 200003 1 002	**NIP. 19641231 199003 2 007**
Ketua Program Studi Magister Matematika,	Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin,
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1 013	**NIP. 19720515 199702 1 002**

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS HASANUDDIN

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Pelabelan Tidak Teratur Modular Pada Graf Lengkap" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing (Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Utama dan Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah diterima dan akan dipublikasikan di Jurnal (Daya Matematis, Vol 10, No 3 (2022): Desember) sebagai artikel dengan judul "Modular Irregular Labeling On Complete Graphs".

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 21 Oktober 2022

METERAI TEMPEL
7335AKX113777182

Indah Chairun Nisa
NIM. H022211001

Ucapan Terima Kasih

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan laporan tesis yang berjudul:

“**PELABELAN TIDAK TERATUR MODULAR PADA GRAF LENGKAP**”

Laporan tesis ini merupakan salah satu syarat yang harus ditempuh untuk menyelesaikan Program Magister pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Kedua orang tua Bapak **H. Mansurdin** dan Ibu **Hj. Sunarti,** serta Adik **Muhammad Yusuf Hafidzul Alim** yang senantiasa mendoakan, memberikan dukungan, serta menjadi motivasi dalam menyelesaikan studi magister.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing pertama yang telah meluangkan banyak waktunya serta pikirannya untuk memberikan saran, nasihat, motivasi dan dengan sabar membimbing penulis dalam menyelesaikan tesis ini.
3. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku pembimbing kedua yang telah meluangkan banyak waktunya serta pikirannya untuk memberikan saran, nasihat, motivasi dan dengan sabar membimbing penulis dalam menyelesaikan tesis ini.
4. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.**, Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku penguji yang telah memberikan banyak saran dan masukan dalam penyempurnaan tesis ini.
5. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** Ketua Program Studi Magister Matematika yang senantiasa memberikan bimbingan dan semangat dalam menyelesaikan tesis ini.
6. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
7. Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin, seluruh dosen, dan staf administrasi pada Program Studi S2 Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.

8. Teman-Teman terdekat penulis Febryela Alda F, S.T., Safhira Sekar E, S.Mat. dan Reza Andriani Megawati EP, S.E. yang tidak pernah bosan memberikan semangat dan dukungannya, serta sebagai pendengar cerita terbaik penulis.
9. Kepada Husnul Hatima, S.Mat. dan Chrisaria P, S.Pd. terima kasih karena selalu saling mendukung, memberikan bantuan dan semangat kepada penulis selama perkuliahan.
10. Teman teman seperjuangan Magister Matematika 2021, serta kakak kakak Seperjuangan S2 Matematika Sri Muslihah Bakhtiar, S.Mat., M.Si., Sri Nurwahyuni, S.Mat., Nurul Aulia Bohari, S.Si., M.Si., Musdalifa Pagga, S.Si., M.Si., Aidah Nabila Anwar, S.Si, Putri Amalia., S.Si., M.Si., Dwi Meldya Lestari, S.Pd., M.Si. atas segala bantuan dan semangatnya kepada penulis.
11. Kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan, telah membersamai disetiap momen yang ada, memberikan doa, bantuan dan semangat untuk menyelesaikan tesis ini.

Penulis menyadari bahwa penyusunan laporan tugas akhir ini masih jauh dari sempurna, karena itu penulis mengharapkan segala kritik dan saran yang membangun. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Atas perhatiannya penulis ucapkan terima kasih.

Makassar, 21 Oktober 2022

Indah Chairun Nisa

ABSTRAK

INDAH CHAIRUN NISA. **Pelabelan Tidak Teratur Modular pada Graf Lengkap** (dibimbing oleh Nurdin dan Hasmawati)

Pelabelan tidak teratur modular merupakan suatu jenis pelabelan hasil modifikasi dari pelabelan tidak teratur. Pelabelan– k sisi $\psi : E(G) \to \{1,2,3, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan$-k$ tidak teratur modular pada graf G jika terdapat pemetaan bijektif pada suatu bobot fungsi $\sigma : V(G) \to Z_n$ yang didefinisikan dengan $\sigma(x) = \sum_{(y \in N(x))} \psi(xy)$ dimana $N(x)$ merupakan simpul yang bertetangga dengan x. Penentuan nilai ketidakteraturan modular masih dilakukan pada beberapa jenis graf. Selanjutnya, penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai ketidakteraturan modular dari salah satu jenis graf regular, yaitu graf lengkap. Selain itu, juga akan dibentuk algoritma sebagai fungsi pelabelan tidak teratur modular pada graf lengkap. Penentuan nilai ketidakterataturan modular pada graf lengkap dilakukan dalam beberapa tahap. Pertama, ditentukan batas bawah dengan menggunakan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya. Kemudian, ditentukan batas atas dengan cara mengkonstruksi suatu algoritma sebagai fungsi pelabelan untuk memberikan label pada sisi-sisi graf hingga diperoleh nilai k terbesar. Terakhir, dihitung bobot simpul guna memastikan setiap simpul memiliki bobot yang berbeda. Adapun hasil dari penelitian ini, ialah diperoleh algoritma pelabelan tidak teratur modular pada graf lengkap dengan nilai ketidakteraturan modular, yaitu $ms(K_n) = 3,\ n \not\equiv 2 \ mod \ 4$.

Kata Kunci: graf lengkap, nilai ketidakteraturan modular, pelabelan tidak teratur modular

ABSTRACT

INDAH CHAIRUN NISA. **Modular Irregular Labeling on Complete Graphs** (supervised by Nurdin and Hasmawati)

Modular irregular labeling is a type of labeling that is modified by irregular labeling. The k −labeling edges $\psi : E(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,k\}$ is said modular irregular k −labeling on graph G if there is a bijective mapping on a defined weight function $\sigma : V(G) \rightarrow Z_n$ with $\sigma(x) = \sum_{(y \in N(x))} \psi(xy)$ where $N(x)$ is a point adjacent to x. The determination of the modular irregularity strength is still carried out on several types of graphs. Furthermore, this research aims to determine modular irregularity strength of one type of regular graph, namely a complete graph. In addition, an algorithm will also be formed as a modular irregular labeling function on a complete graph. Determination of the modular irregularity strength in the complete graph is carried out in several stages. First, the lower bound is determined by using the graph properties and other supporting theorems. Then, the upper bound is determined by constructing an algorithm as a labeling function to label the edges of the graph until the largest k is obtained. Finally, the vertex weights are calculated to ensure that each vertex has a different weight. The result of this research is that a modular irregular labeling algorithm is obtained on a complete graph with a modular irregularity strength, $ms(K_n) = 3,\ n \not\equiv 2 \ mod\ 4$.

Keywords: complete graph; modular irregular labeling; modular irregularity strength

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Nomor Urut Halaman

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti dan Penjelasan
$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$	Himpunan simpul graf G
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})$	Himpunan sisi graf G
$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G})$	Orde graf G
$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{G})$	Size graf G
$\boldsymbol{deg}(\boldsymbol{G})$	Derajat simpul graf G
$\Delta(\boldsymbol{G})$	Derajat simpul maksimum graf G
$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{G})$	Derajat simpul minimum graf G
$\boldsymbol{P_n}$	Graf lintasan
$\boldsymbol{C_n}$	Graf siklus
$\boldsymbol{Gr_n}$	Graf gir
$\boldsymbol{S_n}$	Graf bintang
$\boldsymbol{F_n}$	Graf persahabatan
$\boldsymbol{K_n}$	Graf lengkap
$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{G})$	Nilai ketidakteraturan graf G
$\boldsymbol{ms}(\boldsymbol{G})$	Nilai ketidakteraturan modular graf G
$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v_i v_j})$	Pelabelan sisi $v_i v_j$
$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v_i})$	Bobot simpul v_i

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, serta manfaat dari penelitian.

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan pasangan himpunan (V, E), dimana V merupakan himpunan diskrit yang elemen-elemennya disebut simpul, dan E merupakan himpunan pasangan dari simpul-simpul V yang disebut sisi. Dengan demikian, himpunan V disebut sebagai himpunan simpul *(vertex set),* sedangkan himpunan E disebut himpunan sisi *(edge set)*. Dua simpul pada graf disebut bertetangga apabila kedua simpul tersebut dikaitkan oleh suatu sisi dan derajat suatu simpul adalah banyaknya sisi yang terkait dengan simpul tersebut. Sangat banyak jenis-jenis graf yang telah diketahui, namun beberapa diantaranya yang paling sering dibahas adalah: graf lintasan, graf siklus, graf bintang, graf roda, graf lengkap, graf gir dan graf triangular, graf bintang ganda regular serta graf persahabatan. Graf lintasan adalah graf yang himpunan simpul dan sisinya dapat diurutkan menjadi $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ dengan $e_i = v_{i-1}v_i, i = 1,2, \dots, k$. Jadi, lintasan diawali dan diakhiri oleh suatu simpul. Apabila pada graf, setiap dua simpulnya termuat pada suatu lintasan, maka graf tersebut dikatakan graf terhubung. Graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua disebut siklus, sedangkan graf terhubung yang memiliki $k-1$ simpul berderajat satu dan satu simpul berderajat $k-1$ disebut graf bintang. Graf roda adalah graf yang memiliki k simpul berderajat 3 dan satu simpul berderajat k. Jenis graf yang memuat semua jenis graf lain sebagai subgraf adalah graf lengkap yakni graf yang memilki n simpul, dengan masing-masing simpul berderajat $n-1$. Pengertian jenis-jenis graf lain yang ada kaitannya dengan materi bahasan Tesis ini dibahas pada Bab 2 Tinjauan Pustaka.

Pada graf terdapat beberapa topik bahasan, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf diperkenalkan pertama kali pada pertengahan 1960-an, oleh Rosa pada tahun 1967, kemudian dilanjutkan juga oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980. Pelabelan adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan simpul dan/ atau sisi ke suatu himpunan yang berisi bilangan bulat positif tertentu. Pelabelan yang memetakan simpul dinamakan pelabelan simpul (vertex labeling), sedangkan pelabelan yang memetakan sisi disebut pelabelan sisi (edge labeling). Jika pelabelan memetakan keduanya, yaitu simpul dan sisi maka pelabelan tersebut merupakan pelabelan total (total labeling) (Masyitoh, 2019). Hingga saat ini, pelabelan graf telah banyak berkembang, diantaranya terdapat pelabelan *gracefull,* pelabelan harmoni, pelabelan total tidak teratur, pelabelan ajaib *(magic labeling)*, pelabelan anti ajaib *(anti-magic labeling)* serta pelabelan modular (Gallian, 2020).

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai topik pelabelan tidak teratur modular. Pelabelan tidak teratur dijelaskan pertama kali oleh Chartrand et al. pada tahun 1986. Pelabelan tidak teratur *(irregular labeling)* pada graf G didefisinisikan sebagai pemetaan yang memetakan himpunan sisi e dari G ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,\dots,w\}$ sedemikian hingga semua simpul v memiliki bobot yang berbeda. Bobot suatu simpul x merupakan jumlah dari semua label sisi yang terkait dengan x, selanjutnya bobot simpul x biasanya dinotasikan dengan $wt(x)$. Nilai ketidakteraturan *(irregularity strength)* dari graf G yang dinotasikan dengan $s(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian hingga graf G memiliki suatu pelabelan k tidak teratur. Beberapa penelitian mengenai pelabelan tidak teratur telah banyak dikaji. Contohnya yaitu, Baca et al. (2007) memperkenalkan pelabelan tidak teratur lainnya berdasarkan pada pelabelan total, yaitu pelabelan total tidak teratur simpul dan pelabelan tidak teratur sisi.

Selanjutnya, Baca et al. (2020) memperkenalkan mengenai pelabelan tidak teratur modular dari beberapa jenis graf. Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf berorde n tanpa komponen ber orde 2. Pelabelan$-k$ sisi $\varphi : E(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,k\}$ dikatakan pelabelan$-k$ tidak teratur modular pada graf G jika terdapat pemetaan bijektif pada suatu bobot fungsi $\sigma : V(G) \rightarrow Z_n$ yang didefinisikan dengan

$$\sigma(x) = \sum_{x,y \in V} \varphi(xy) \ \ (mod\ n).$$

Selanjutnya σ merupakan bobot modular dari simpul x. Nilai k minimum dari graf G yang merupakan pelabelan$-k$ tidak teratur modular disebut nilai ketidakteraturan modular dari G yang dinotasikan dengan $ms(G)$. Apabila tidak terdapat pelabelan$-k$ tidak teratur modular pada suatu graf G, maka $ms(G) = \infty$. Dalam penelitiannya, Baca et al. (2020) menetapkan batas bawah nilai ketidakteraturan modular dan menentukan nilai ketidakteraturan modular dari 5 jenis graf, yaitu graf lintasan, graf bintang, graf triangular, graf siklus, dan graf gir. Kemudian, pada tahun 2021, Sugeng et al. menetapkan nilai ketidakteraturan dari 2 jenis graf, yaitu graf bintang ganda regular dan graf persahabatan.

Dalam penelitiannya, Baca et al. (2020) memberikan *open problem,* terkait penentuan k terbaik dalam pelabelan tidak teratur modular dari graf lengkap $K_n, n \geq 3$. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji mengenai nilai ketidakteraturan modular dari graf lengkap $K_n, n \geq 3$. , Berdasarkan keterangan tersebut , maka dilakukan suatu penelitian yang berjudul "Pelabelan Tidak Teratur Modular pada Graf Lengkap".

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana prosedur pemberian label pada sisi graf lengkap dalam masalah pelabelan tidak teratur modular.
2. Berapa nilai ketidakteraturan modular terbaik dari graf lengkap.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui nilai ketidakteraturan modular terbaik dari graf lengkap.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu dalam bidang teori graf, sehingga kedepannya dapat digunakan sebagai rujukan para peneliti lain dalam menentukan nilai

ketidakteraturan modular pada suatu graf ataupun pada operasi dari dua buah graf.

2. Menambah pengetahuan penulis mengenai nilai ketidakteraturan modular pada suatu graf.
3. Memberikan motivasi dan referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait dengan nilai ketidakteraturan modular pada suatu graf.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang digunakan guna menunjang proses pengerjaan penelitian. Tinjauan pustaka berisi penjelasan mengenai graf, pelabelan tidak teratur graf, beserta pelabelan tidak teratur modular graf. Pengertian dasar tentang graf, notasi dan beberapa istilah, banyak merujuk ke buku “Pengantar dan Jenis-Jenis Graf” oleh Hasmawati tahun 2020.

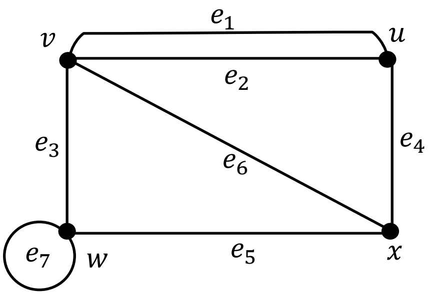
2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Teori graf dikenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss yaitu Leonhard Euler. Hasmawati (2020) menjelaskan bahwa teori graf merupakan teori yang menjelaskan mengenai hal diskrit berupa simpul dan sisi yang dilengkapi dengan sifat-sifat dan aturan-aturan tertentu. Pengertian graf secara umum diberikan pada Definisi 2.1.1.

Definisi 2.1.1 Graf merupakan pasangan himpunan (V, E), dimana V merupakan himpunan diskrit yang elemen-elemennya disebut simpul, dan E merupakan himpunan pasangan dari simpul-simpul V yang disebut sisi. Dengan demikian, Himpunan V disebut sebagai himpunan simpul *(vertex set),* sedangkan himpunan E disebut himpunan sisi *(edge set)*.

Apabila suatu graf (V, E) dinotasikan dengan G, maka $G = (V, E)$. Himpunan simpul V dapat ditulis $V(G)$ dan himpunan sisi E dapat ditulis $E(G)$. Pada graf G, banyaknya anggota dari himpunan $V(G)$ disebut orde *(order)*, dan banyaknya anggota dari himpunan $E(G)$ disebut ukuran *(size)*. Orde pada graf G dinyatakan dengan p atau $p(G)$, sedangkan size dinyatakan dengan q atai $q(G)$. Diketahui $p(G)$ adalah orde dari graf G, maka kardinalitas dari simpul graf G atau yang disimbolkan "| |" dapat dituliskan $p(G) = |V(G)|$, begitu pula dengan ukuran dari graf G dapat dituliskan $q(G) = |E(G)|$.

Sisi pada graf digambarkan sebagai garis dengan kedua ujungnya merupakan simpul. Sisi pada graf biasanya dinotasikan dengan $e = uv$. Pasangan $uv \in E(G)$ bisa saja berarti $u = v, uv = vu$, dan $uv \neq vu$. Hal ini memungkinkan anggota dari $E(G)$ memiliki simbol yang sama. Seperti halnya, $x_1 = uv, x_2 = uv$, dan seterusnya, namun $x_1 \neq x_2$. Sisi x_1 dan x_2 ini yang disebut dengan sisi paralel. Selanjutnya, jika diketahui sisi $x = uv \in E(G)$ dengan $u = v$, maka x disebut lup. Graf G dikatakan graf trivial jika $q(G) = 0$, atau dengan kata lain graf hanya terdiri dari himpunan simpul $V(G)$.



Gambar 2. 1 Graf G_1

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa graf G_1 memiliki himpunan simpul, yaitu $V(G_1) = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi yaitu, $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Diketahui juga, bahwa graf G_1 memiliki orde 4 dengan ukurannya adalah 7. Terlihat, bahwa $e_1 = e_2 = uv$, namun $e_1 \neq e_2$, maka e_1 dan e_2 merupakan sisi paralel. Selanjutnya, e_7 disebut dengan lup.

Definisi 2.1.2 Graf sederhana *(simple graph)* merupakan pasangan himpunan simpul berhingga dan tidak kosong $V(G)$ dengan himpunan sisi tak berurut dan berbeda dari anggota simpul $V(G)$ yang disebut sisi $E(G)$.

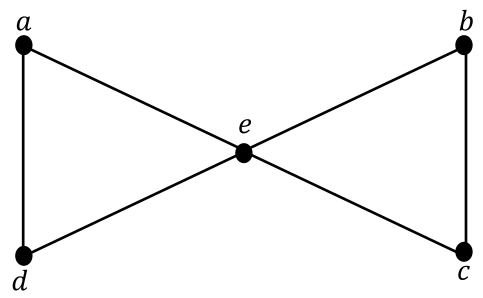
Selain itu, di dalam graf terdapat terminologi untuk mempermudah penjelasan mengenai graf, dan akan digunakan pada penelitian ini (Hasmawati, 2020).

Definisi 2.1.3 Diketahui suatu graf $G = (V, E)$ dengan simpul $v_i, v_j \in V(G)$ dan sisi $v_i v_j \in E(G)$. Simpul v_i dikatakan bertetangga *(adjacent)* dengan simpul v_j, karena simpul v_i dan v_j dihubungkan oleh sisi $v_i v_j$.

Definisi 2.1.4 Diketahui suatu graf $G = (V, E)$ dengan simpul $v_i, v_j \in V(G)$ dan sisi $v_iv_j \in E(G)$. Sisi v_iv_j dikatakan terkait *(incident)* dengan simpul v_i dan v_j, karena kedua ujung sisinya merupakan simpul v_i dan v_j.

Definisi 2.1.5 Derajat dari suatu simpul v pada graf G merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan simpul v. Derajat simpul v pada graf G dinotasikan dengan $deg(v)$. Selanjutnya, derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimum dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Apabila suatu graf memiliki $\delta(G) = \Delta(G)$, maka graf tersebut disebut graf regular.

Definisi 2.1.6 Misalkan suatu graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_i: e_i = v_iv_j\}$ untuk suatu i, j. Dikatakan lintasan apabila $v_i \neq v_j$ untuk setiap $i, j \in \{0,1,2, \ldots, k\}$. Lintasan dengan n simpul dinotasikan dengan P_n.



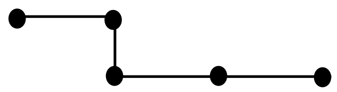
Gambar 2. 2 Graf G_2

Dari Gambar 2.2, terlihat bahwa a bertengga dengan e dan d, namun tidak bertetangga dengan b. Kemudian, sisi bc hanya terkait dengan simpul b dan c. Dapat dilihat juga, bahwa derajat dari masing-masing simpul graf G_2 adalah sebagai berikut, $deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) = 2$, sedangkan $\deg(e) = 4$. Diperoleh $\Delta(G_2) = 4$ dan $\delta(G_2) = 2$, karena $\Delta(G_2) \neq \delta(G_2)$, maka G_2 bukan merupakan graf regular. Lintasan pada Gambar 2.2 adalah $P \coloneqq a, d, e, b, c$.

2.2 Jenis-Jenis Graf

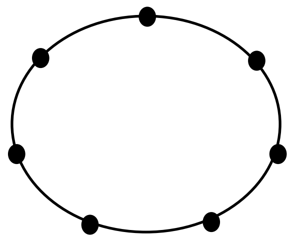
Graf dikelompokkan dalam beberapa jenis, berdasarkan ciri khusus dari masing-masing graf. Beberapa jenis graf akan dipaparkan pada subbab ini, berdasarkan penelitian terdahulu dan graf yang akan digunakan pada penelitian ini (Hasmawati, 2020).

Defini 2.2.1 Graf Lintasan P_n merupakan graf yang hanya terdiri dari satu lintasan dengan orde n. Simpul awal dan akhir graf lintasan P_n masing-masing berderajat 1 dan simpul lainnya berderajat 2. Graf lintasan P_n berukuran $n-1$.



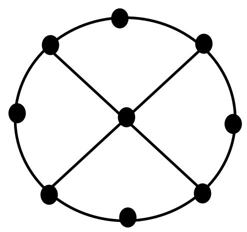
Gambar 2. 3 Graf Lintasan P_5

Definisi 2.2.2 Graf Siklus C_n merupakan jenis graf berorde $n, n \geq 3$. Misalkan $C_n \coloneqq v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$. Graf siklus C_n memiliki ukuran n dengan derajat tiap simpulnya 2 dan himpunan simpulnya yaitu $V(C_n)$ serta himpunan sisinya yaitu $E(C_n) \cup \{v_n v_1\}$.



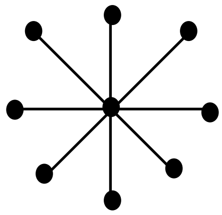
Gambar 2. 4 Graf Siklus C_7

Definisi 2.2.3 Graf Gir Gr_n merupakan jenis graf berorde $2n+1$ yang merupakan hasil penambahan satu simpul pada setiap siklus C_n pada roda W_n.



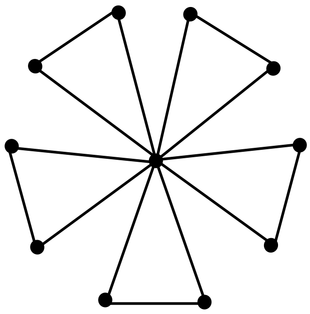
Gambar 2. 5 Graf Gir Gr_4

Definisi 2.2.4 Graf Bintang S_n merupakan jenis graf yang berorde n dengan 1 simpulnya berderajat $n-1$ dan simpul lainnya berderajat 1.



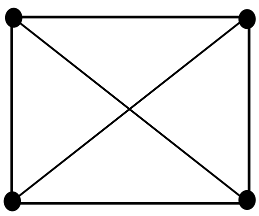
Gambar 2. 6 Graf Bintang S_9

Definisi 2.2.5 Graf Persahabatan F_n merupakan jenis graf dengan himpunan simpul $\{m, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dan himpunan sisi $\{mx_1, mx_2, \dots, mx_n, my_1, my_2, \dots, my_n, x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n\}$ yang berorde $2n+1$ dan berukuran $3n$.



Gambar 2. 7 Graf Persahabatan F_5

Definisi 2.2.6 Graf Lengkap K_n merupakan jenis graf regular yang berorde n dengan semua simpulnya berderajat $n-1$.



Gambar 2. 8 Graf Lengkap K_4

2.3 Bilangan Modulo

Modulo merupakan suatu metode dalam ilmu matematika yang menyatakan nilai sisa dari suatu bilangan bulat, jika bilangan bulat tersebut dibagi dengan bilangan bulat lainnya.

Definisi 2.3.1 (Handayanto, 2010) Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$, dengan m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo m, atau dapat ditulis $a \equiv b\ (\,mod\ m)$, dengan syarat m habis membagi $(a - b)$.

Contoh:
$36 \equiv 1\ mod\ 5$ dibaca 36 kongruen dengan 1 modulo 5 yang artinya 5 habis membagi $36 - 1$.

Berdasarkan definisi diatas, diperoleh teorema sebagai berikut.
Teorema 2.3.1 $a \equiv b(mod\ m)$ jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat k sedemikian sehingga $a = mk + b$.

2.4 Pelabelan Graf

Pada graf terdapat beberapa topik bahasan, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan unsur pada graf (simpul dan sisi) ke suatu bilangan bulat positif (Gallian, 2020). Fungsi merupakan suatu relasi yang memetakan setiap anggota dari suatu himpunan yang disebut dengan domain atau daerah asal ke tepat satu anggota himpunan lain yang disebut kodomain atau daerah kawan (Rosen, 2012).

Definisi 2.4.1 Jika f merupakan suatu fungsi yang memetakan setiap anggota domain A ke anggota kodomain B, maka f dapat dinotasikan dengan

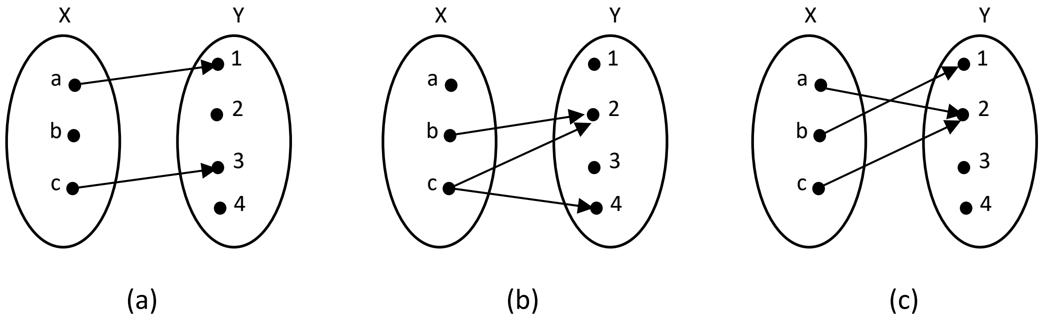
$$f: A \to B$$

Adapun sifat-sifat dari suatu fungsi, yaitu sebagai berikut.

1. Setiap anggota domain harus memiliki pasangan tepat satu di kodomain.
2. Anggota kodomain tidak harus berpasangan dengan domain dan dapat memiliki lebih dari satu pasangan di domain.

Contoh: (Siang, 2019)

Manakah diantara relasi yang digambarkan pada Gambar 2.9 yang merupakan fungsi dari $X = \{a, b, c\}$ ke $Y = \{1,2,3,4\}$?



Gambar 2. 9 Fungsi

Penyelesaian:
Untuk menentukan apakah suatu relasi yang ditunjukkan dengan diagram panah merupakan suatu fungsi, harus memenuhi kedua sifat fungsi.

a. Bukan fungsi karena ada $b \in X$ yang tidak memiliki kawan di Y (tidak ada garis yang keluar dari $b \in X$. Jadi, tidak memenuhi syarat (1)).
b. Bukan fungsi karena $c \in X$ memiliki lebih dari satu kawan di Y (ada 2 garis yang keluar dari $c \in X$. Jadi, tidak memenuhi syarat (2)).
c. Merupakan fungsi karena ada suatu garis yang keluar dari setiap elemen $x \in X$. Perhatikan bahwa $f(a) = f(c) = 2$. Meskipun ada anggota Y yang memiliki lebih dari satu kawan di X, hal itu tidak akan memengaruhi.

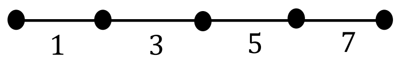
Definisi 2.4.2 Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf, yaitu simpul dan sisi ke suatu bilangan bilangan positif.

Bilangan positif yang merupakan nilai pemetaan pada setiap unsur di graf disebut label. Selain itu, juga terdapat istilah bobot yang merupakan jumlah label yang terkait dengan elemen graf yang dinotasikan dengan wt. Suatu pelabelan dikatakan pelabelan simpul, apabila domain dari fungsinya merupakan himpunan simpul. Begitu halnya dengan pelabelan sisi. Sedangkan, pelabelan total merupakan pelabelan dengan domainnya merupakan gabungan himpunan simpul dan himpunan sisi.

Definisi 2.4.3 Pada suatu pelabelan sisi φ, bobot simpul v yang dinotasikan dengan $wt(v)$ merupakan jumlahan semua label sisi yang terkait dengan simpul v. Sehingga, $wt(v)$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$wt(v) = \sum_{u,v \in V} \varphi(uv)$$

Misalkan, diberikan contoh suatu pelabelan sisi seperti pada Gambar 2.10.



Gambar 2. 10 Pelabelan Sisi P_5

Berdasarkan Gambar 2.10, maka diperoleh hasil bobot simpul sebagai berikut.

$wt(v_1) = \varphi(v_1v_2) = 1$

$wt(v_2) = \varphi(v_1v_2) + \varphi(v_2v_3) = 4$

$wt(v_3) = \varphi(v_2v_3) + \varphi(v_3v_4) = 8$

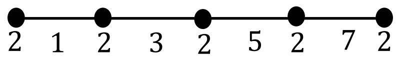
$wt(v_4) = \varphi(v_3v_4) + \varphi(v_4v_5) = 12$

$wt(v_5) = \varphi(v_4v_5) = 7$

Definisi 2.4.4 Pada suatu pelabelan total φ, bobot simpul v yang dinotasikan dengan $wt(v)$ merupakan jumlahan semua label sisi yang terkait dengan simpul v ditambah dengan label simpul v. Sehingga, $wt(v)$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$wt(v) = \varphi(v) + \sum_{u,v \in V} \varphi(uv)$$

Misalkan, diberikan contoh suatu pelabelan total seperti pada Gambar 2.11.



Gambar 2. 11 Pelabelan Total P_5

Berdasarkan Gambar 2.11, maka diperoleh hasil bobot simpul sebagai berikut.

$wt(v_1) = \varphi(v_1v_2) + \varphi(v_1) = 3$

$wt(v_2) = \varphi(v_1v_2) + \varphi(v_2v_3) + \varphi(v_2) = 6$

$wt(v_3) = \varphi(v_2v_3) + \varphi(v_3v_4) + \varphi(v_3) = 10$
$wt(v_4) = \varphi(v_3v_4) + \varphi(v_4v_5) + \varphi(v_4) = 14$
$wt(v_5) = \varphi(v_4v_5) + \varphi(v_5) = 9$

2.5 Jenis-Jenis Pelabelan

Pelabelan pada graf dapat dilakukan dengan berbagai cara, seperti dengan melabeli elemen-elemen graf dengan bilangan bulat positif. Selain itu, pelabelan graf juga semakin berkembang dan memiliki berbagai jenis pelabelan.

2.5.1 Pelabelan Tidak Teratur

Pelabelan tidak teratur merupakan jenis pelabelan yang diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 1988. Pada penjelasannya tersebut, diperoleh beberapa definisi dan teorema mengenai pelabelan tidak teratur.

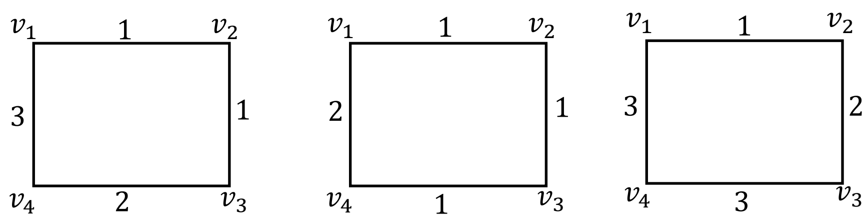
Definisi 2.5.1 Misalkan $G = (V, E)$ merupakan suatu graf dengan setiap sisinya diberikan label $\varphi: E \to \{1,2,3, \dots, k\}$. Berdasarkan pelabelan sisi tersebut, diperoleh bobot simpul $v \in V$ adalah total label sisi yang terhubung dengan v, atau dapat ditulis

$$wt(v) = \sum_{u,v \in V} \varphi(uv)$$

Selanjutnya, pelabelan dikatakan suatu pelabelan$-k$ tidak teratur jika pada suatu graf $G = (V, E)$ dengan graf yang tidak memiliki sisi terisolasi dan dua buah simpul terisolasi, diberikan pelabelan sisi $\varphi: E \to \{1,2,3, \dots, k\}$ jika untuk setiap simpul berbeda memiliki bobot yang berbeda, atau dapat ditulis

$$\sum_{x,y \in V} \varphi(xy) \neq \sum_{u,v \in V} \varphi(uv)$$

Misalkan, diberikan contoh suatu pelabelan sisi seperti pada Gambar 2.12.



(i) **(ii)** **(iii)**

Gambar 2. 12 Pelabelan Sisi C_4

Berdasarkan Gambar 2.12, diperoleh bahwa Gambar 2.12 (i) dan Gambar 2.12 (iii) merupakan pelabelan-3 tidak teratur simpul pada graf C_4. Gambar 2.12 (ii) bukan merupakan pelabelan tidak teratur simpul, karena terdapat dua simpul dengan bobot yang sama, yaitu simpul v_2 dan v_3 memiliki bobot 2 serta v_1 dan v_4 memiliki bobot 3. Karena C_4 tidak memiliki pelabelan-1 tidak teratur simpul dan pelabelan-2 tidak teratur simpul, maka diperoleh k terkecil yaitu 3. Sehingga, diperoleh nilai ketidakteraturan simpul pada C_4 adalah 3.

Chartrand et al. (1986) juga memperkenalkan teorema mengenai batas bawah pada nilai ketidakteraturan pada graf regular$-d$, sebagai berikut.

Teorema 2.5.1 Misalkan G merupakan suatu graf regular$-d$ dengan orde n, maka nilai ketidakteraturan graf G adalah sebagai berikut

$$s(G) \geq \frac{n+d-1}{d}.$$

Proposisi 2.5.2 Untuk setiap $n \geq 3$, nilai ketidakteraturan graf lengkap $s(K_n) = 3$.

Selain itu, pada penelitian Faudree et al. (1989) juga diberikan suatu proposisi mengenai graf regular sebagai berikut,

Proposisi 2.5.3 Untuk setiap graf regular dengan orde n, $n \geq 3$, maka nilai ketidakteraturan graf $s(G) \geq 3$.

2.5.2 Pelabelan Total Tidak Teratur Simpul

Pada tahun 2007, Martin Baca et al. juga memperkenalkan mengenai pelabelan total tidak teratur simpul. Berdasarkan penjelasannya tersebut, diperoleh beberapa definisi dan teorema mengenai pelabelan tidak teratur.

Definisi 2.5.2 Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan pelabelan total $\varphi: V \cup E \to \{1,2,3, \dots, k\}$. Bobot simpul $v \in V$ pada pelabelan φ merupakan jumlahan bobot dari label simpul v dan label sisi uv yang terhubung dengan v, atau dapat disimbolkan dengan

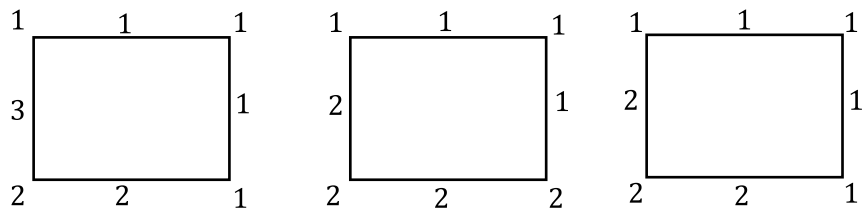
$$wt(v) = \varphi(v) + \sum_{u,v \in V} \varphi(uv)$$

Suatu pelabelan dikatakan pelabelan$-k$ total tidak teratur simpul pada graf $G = (V, E)$ yang diberikan pelabelan $\varphi: V \cup E \to \{1,2,3, \dots, k\}$, jika untuk setiap dua simpul u dan v yang berbeda memiliki bobot yang berbeda pula, atau dapat disimbolkan

$$wt(u) \neq wt(v)$$

Nilai total ketidakteraturan simpul dari graf G, dinotasikan dengan $tvs(G)$, merupakan nilai bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga graf G memiliki suatu pelabelan$-k$ total tidak teratur simpul.

Misalkan, diberikan contoh suatu pelabelan total seperti pada Gambar 2.13.



(i) **(ii)** **(iii)**

Gambar 2. 13 Pelabelan Total C_4

Berdasarkan Gambar 2.13, diperoleh bahwa Gambar 2.13 (i) merupakan pelabelan-3 total tidak teratur simpul pada C_4 dan Gambar 2.13 (ii) merupakan pelabelan-2 total tidak teratur simpul pada graf C_4. Gambar 2.13 (iii) bukan merupakan pelabelan total tidak teratur simpul, karena terdapat dua simpul dengan bobot yang sama. Karena C_4 tidak memiliki pelabelan-1 total tidak teratur simpul, maka diperoleh k terkecil yaitu 2. Sehingga, diperoleh nilai ketidak-teraturan simpul pada C_4 adalah 2.

2.5.3 Pelabelan Tidak Teratur Modular

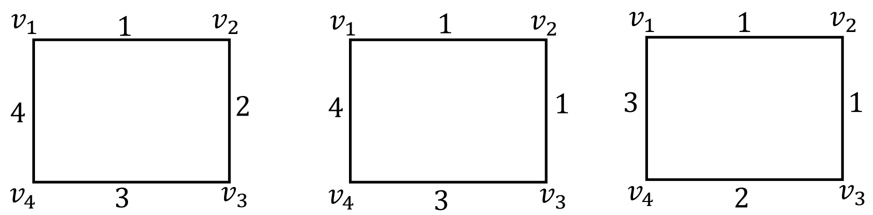
Pada tahun 2020, Martin Baca dkk memperkenalkan mengenai pelabelan tidak teratur modular pada graf. Berdasarkan penjelasannya tersebut, diperoleh beberapa definisi dan teorema mengenai pelabelan tidak teratur modular.

Definisi 2.5.3 Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf ber orde n dan tidak memiliki komponen 2 buah simpul. Pelabelan$-k$ sisi $\varphi: E \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan$-k$ tidak teratur modular jika terdapat pemetaan bijektif $\sigma: V \rightarrow \mathbb{Z}_n$ yang didefinisikan dengan

$$\sigma(x) = \sum_{x,y \in V} \varphi(xy) \ \ (mod\, n).$$

Selanjutnya σ merupakan bobot modular dari simpul x. Bilangan bulat k minimum dari graf G pada pelabelan$-k$ tidak teratur modular disebut nilai ketidakteraturan modular dari graf G yang dinotasikan dengan $ms(G)$. Apabila tidak terdapat pelabelan$-k$ tidak teratur modular untuk G, maka $ms(G) = \infty$.

Misalkan, diberikan contoh suatu pelabelan sisi seperti pada Gambar 2.14.



(i) **(ii)** **(iii)**

Gambar 2. 14 Pelabelan Sisi C_4

Berdasarkan Gambar 2.14, diperoleh bahwa Gambar 2.14 (i) bukan merupakan pelabelan tidak teratur modular pada C_4 karena tidak terdapat pemetaan bijektif. Diketahui bahwa dua simpul memilki bobot yang sama yaitu, simpul v_1 dan simpul v_3 memiliki bobot dalam modular bernilai 1 serta simpul v_2

dan v_4 memiliki bobot dalam modular bernilai 3. Sedangkan, Gambar 2.14 (ii) merupakan pelabelan-4 tidak teratur modular pada graf C_4 dan Gambar 2.14 (iii) merupakan pelabelan-3 tidak teratur modular pada graf C_4. Karena C_4 tidak memiliki pelabelan-1 tidak teratur modular dan pelabelan-2 tidak teratur modular, maka diperoleh k terkecil yaitu 3. Sehingga, diperoleh nilai ketidakteraturan modular pada C_4 adalah 3.

Beberapa penelitian terdahulu telah membahas mengenai nilai ketidakteraturan modular pada berbagai jenis graf. Baca et al. (2020) memperkenalkan nilai ketidakteraturan dari 5 jenis graf sebagai berikut. Misalkan suatu graf $G = (V, E)$ adalah graf tanpa komponen berorde ≤ 2, maka

$$s(G) \leq ms(G)$$

Selanjunya, pada graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$, diperoleh

$$ms(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & jika\ n \not\equiv 2\ (mod\ 4) \\ \infty, & jika\ n \equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Pada penelitian yang sama, juga diperoleh hasil pelabelan$-\,k$ tidak teratur modular pada graf bintang S_n dengan orde $n,$ graf triangular T_n dengan orde $2n-1, n \geq 2$, graf siklik C_n dengan orde $n, n \geq 2$ serta graf gir Gr_n dengan orde $2n+1, n \geq 3$.

Dengan hasil yang diperoleh, berurut sebagai berikut.

$$ms(S_n) = \begin{cases} n, & jika\ n \equiv 0{,}2\ (mod\ 4) \\ n+1, & jika\ n \equiv 2\ (mod\ 4) \\ \infty, & jika\ n \equiv 1\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$ms(T_n) = \begin{cases} \frac{n+4}{2}, & jika\ n\ genap \\ \frac{n+3}{2}, & jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

$$ms(C_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & jika\ n \equiv 1\ (mod\ 4) \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, & jika\ n \equiv 0{,}3\ (mod\ 4) \\ \infty, & jika\ n \equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$ms(Gr_n) = \begin{cases} \frac{n+2}{2}, & jika\ n\ genap \\ \infty, & jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

Selanjutnya, pada tahun 2021, Sugeng et al. juga memberikan nilai ketidakteraturan modular pada 2 jenis graf, yaitu graf bintang ganda regular dan graf persahabatan. Berdasarkan hasil penelitiannya, diperoleh nilai ketidakteraturan modular graf bintang ganda regular, yaitu $ms(S_{n,n}) = 2k, k \geq 1$ dan k ganjil. Sedangkan, untuk graf persahabatan diperoleh nilai ketidakteraturan modular sebagai berikut $ms(F_n) = n + 1$.