PEMODELAN KONDUKSI PANAS STEADY DENGAN VARIABEL KONDUKTIVITAS TERMAL UNTUK KELAS BAHAN *INHOMOGEN* ISOTROPIK DENGAN METODE ELEMEN BATAS

`

STEADY HEAT CONDUCTION MODEL WITH VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY FOR A CLASS OF ISOTROPIC INHOMOGEN MATERIALS BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

AFIF BUDI ANDY. B

H022211004

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

PEMODELAN KONDUKSI PANAS STEADY DENGAN VARIABEL KONDUKTIVITAS TERMAL UNTUK KELAS BAHAN *INHOMOGEN* ISOTROPIK DENGAN METODE ELEMEN BATAS

`

TESIS

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Magister Sains

Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

AFIF BUDI ANDY. B

H022211004

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

TESIS

PEMODELAN KONDUKSI PANAS STEADY DENGAN VARIABEL KONDUKTIVITAS TERMAL UNTUK KELAS BAHAN INHOMOGEN ISOTROPIK DENGAN METODE ELEMEN BATAS

AFIF BUDI ANDY B.

NIM: H022211004

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 20 Oktober 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D.
NIP. 19641112 198703 1 002

Pembimbing Pendamping

Dr. Agustinus Ribal, S.Si, M.Sc.
NIP. 19750816 199903 1 001

Ketua Program Studi
Matematika S2

Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1013

Dekan Fakulras MIPA
Universitas Hasanuddin

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS HASANUDDIN FAKULTAS MIPA

Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.
NIP. 19720515 1997 02 1002

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan dibawah ini,

Nama	: Afif Budi Andy B.
Nomor Mahasiswa	: H022211004
Program Studi	: Magister Matematika

menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar - benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabula dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 22 Oktober 2023

Yang menyatakan,

Afif Budi Andy B

UCAPAN TERIMAKASIH

Bismillahirrahmanirrahim. Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada Allah Yang Maha kuasa atas segala nikmat hidup, kesehatan, rezeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul "Pemodelan Konduksi Panas Steady dengan Variabel Konduktivitas Termal untuk Kelas Bahan Inhomogen Isotropik dengan Metode Elemen Batas". Selajutnya, salam dan sholawat kepada baginda *Rasulullah Nabiullah Muhammad shallalahu Alaihi Wasallam,* sosok yang menjadi suri tauladan bagi penulis dalam menjalankan kehidupan dunia akhirat.

Penulisan tesis ini bertujuan untuk memenuhi syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Universitas Hasanuddin. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D**, selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si, M.Sc,** selaku pembimbing pendamping untuk segala waktu, ilmu serta kesabaran dalam membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan dan koreksi kepada penulis dalam pengerjaan tesis ini.
2. Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.,** Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.,** ibu **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.**, selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak dan ibu Dosen pengajar Departemen Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa Magister di Departemen Matematika.
4. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.,** Rektor Universitas Hasanuddin, dan Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.,** Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya dan seluruh pihak birokrasi atas pengurusan administrasi yang diberikan kepada penulis.

5. Bapak dan Ibu seluruh staf Departemen Matematika Universitas Hasanuddin atas segala bantuan dalam pengurusan administrasi akademik selama ini.
6. Kedua Orang tua tercinta Ayahanda H. Baharuddin, S.Pd, M.M., dan Ibunda Dra. Hj. Darmia, S., atas segala kasih saying, doa, dan dukungannya kepada penulis.
7. Istriku tercinta dan tersayang Kusnaeni, S.Si, M.Si dan anakku Nafisah A. D, atas segala dukungan. rasa cinta dan kasih sayangnya kepada penulis dalam penulisan tesis ini.
8. Kakak-kakakku Riska A, dan Agung B. F. terima kasih atas dukungan dan doanya.
9. Teman-teman seperjuangan dan seangkatan, Magister Matematika 2021 yang selalu bersama-sama dan saling mendukung dalam menyelesaikan studi.
10. Dan teruntuk semua pihak yang belum sempat penulis tuliskan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuannya selama ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan-kekurangan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima sebagai perbaikan kedepannnya.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak.

ABSTRAK

Masalah konduksi panas memiliki banyak penerapan didalam bidang sains dan *engineering*. Contohnya, desain dan efisiensi sistem pemanasan dan pendinginan. Pemahaman tentang konduksi panas sangat penting dalam merancang sistem pemanasan dan pendinginan yang efisien. Sifat konduktivitas termal suatu materi dapat mempengaruhi tingkat penghantaran panasnya. Dalam kehidupan sehari-hari banyak fenomena perpindahan panas pada kondisi materi yang *non-homogen*, yaitu perpindahan panas yang dipengaruhi oleh perbedaan konduktivitas termal di berbagai bagian atau lapisan materi. Dalam penelitian tugas akhir ini, akan diselesaikan permasalahan konduksi panas untuk materi dengan konduktivitas termal $(\alpha x + 1)^{2\beta}$ yang dapat didekati dengan pemodelan matematika menggunakan metode elemen batas. Metode elemen batas adalah solusi dari persamaan diferensial parsial (PDP) diekspresikan dalam persamaan integral batas yang mengandung solusi fundamental dari persamaan diferensial parsial. Adapun hasil yang diperoleh yaitu menemukan solusi fundamental dari persamaan konduksi panas untuk materi dengan konduktivitas termal $(\alpha x + 1)^{2\beta}$, dan kemudian menggunakan metode elemen batas untuk menentukan solusi dari persamaan konduksi panas. Beberapa simulasi diberikan untuk menguji hasil solusi persamaan konduksi panas dan hubungan antara distribusi temperatur dengan konduktivitas panas materi. Bagian materi yang memiliki konduktivitas termal lebih tinggi akan memiliki kemampuan perpindahan panas yang lebih efisien, sementara bagian dengan konduktivitas termal lebih rendah akan menghambat perpindahan panas.

Kata Kunci: Konduksi Panas, Konduktivitas Termal, Metode elemen batas, Persamaan Integral Batas

ABSTRACT

The problem of heat conduction has many applications in science and engineering. For example, the design and efficiency of heating and cooling systems. An understanding of heat conduction is essential in designing efficient heating and cooling systems. The nature of the thermal conductivity of a material can affect its level of heat conduction. In everyday life there are many heat transfer phenomena in non-homogeneous material conditions, namely heat transfer affected by differences in thermal conductivity in various parts or layers of materials. In this final research project, the heat conduction problem will be solved for materials with thermal conductivity $(\alpha x + 1)^{2\beta}$ which can be approached by mathematical modeling using the boundary element method. The boundary element method is a solution of partial differential equations (PDP) expressed in boundary integral equations containing fundamental solutions of partial differential equations. The results obtained are finding the fundamental solution to the heat conduction equation for materials with thermal conductivity $(\alpha x + 1)^{2\beta}$, and then using the boundary element method to determine the solution to the heat conduction equation. Several simulations are given to test the results of solutions to the heat conduction equation and the relationship between temperature distribution and the heat conductivity of the material. Parts of the material that have higher thermal conductivity will have more efficient heat transfer capabilities, while parts with lower thermal conductivity will inhibit heat transfer.

Keywords: Heat Conduction, Thermal Conductivity, Boundary element method, Boundary Integral Equation

DAFTAR ISI

UCAPAN TERIMAKASIH 2

ABSTRAK 5

ABSTRACT 6

BAB I PENDAHULUAN 8

1.1. Latar Belakang 8

1.2. Rumusan Masalah 9

1.3. Batasan Masalah 10

1.4. Tujuan Penelitian 10

1.5. Manfaat Penelitian 10

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 11

2.1 Konduksi Panas 11

2.2 Konduktivitas Termal 12

2.3 Persamaan Diferensial Parsial 12

2.4 Metode Elemen Batas 12

2.4.1. Teorema Gauss-Green 14

2.4.2. Identitas Kedua Green 17

2.4.3. Persamaan Laplace 18

2.4.4. Solusi Persamaan Laplace dengan Metode Elemen Batas 26

2.4.5. Relasi Resiprokal 27

2.4.6. Solusi Integral Batas 28

2.4.7. Solusi Elemen Batas dengan Elemen Konstan 28

BAB III METODOLOGI PENELITIAN 33

3.1 Metode Penelitian 33

3.2 Lokasi Penelitian 33

3.3 Diagram Alur Penelitian 33

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 34

4.1. Persamaan Konduksi Panas 34

4.3. Koefisien Konduktivitas Termal bentuk $(\alpha x + 1)^{2\beta}$ 38

4.4. Teorema Resiprokal 40

4.5. Persamaan Integral Batas 42

4.6. Metode Elemen Batas 47

4.7. Hasil Simulasi Numerik 52

KESIMPULAN DAN SARAN 61

5.1 Kesimpulan 61

5.2 Saran 62

DAFTAR PUSTAKA 63

BAB I PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Masalah konduksi panas memiliki banyak penerapan didalam bidang *sains* dan *engineering*. Contohnya, desain dan efisiensi sistem pemanasan dan pendinginan. Pemahaman tentang konduksi panas sangat penting dalam merancang sistem pemanasan dan pendinginan yang efisien. Dalam bidang teknik, seperti industri otomotif, energi, atau bangunan, pengetahuan tentang konduksi panas digunakan untuk mengembangkan material isolasi termal, sistem pipa, dan perangkat pengatur suhu yang efektif. Hal ini membantu dalam penghematan energi dan meningkatkan efisiensi sistem pemanasan dan pendinginan. Dalam bidang desain material konduksi panas memainkan peran penting dalam pemilihan dan pengembangan material. Sifat konduktivitas termal bahan dapat mempengaruhi kinerja dan aplikasi material tersebut. Misalnya dalam industri elektronik, konduktivitas termal yang baik diperlukan untuk memastikan pendinginan yang efisien dari komponen elektronik yang menghasilkan panas. Pemahaman tentang konduksi panas memungkinkan pengembangan material dengan konduktivitas termal yang optimal untuk berbagai aplikasi [1].

Telah banyak penelitian yang membahas mengenai aliran konduksi panas seperti: [6], [17], [18]. Penelitian-penelitian tersebut hanya membahas mengenai perpindahan panas pada media yang homongen. Padahal dalam kehidupan sehari-hari banyak fenomena perpindahan panas pada kondisi media yang *non-homogen*, perpindahan panas akan dipengaruhi oleh perbedaan konduktivitas termal di berbagai bagian atau lapisan. Bagian media yang memiliki konduktivitas termal lebih tinggi akan memfasilitasi perpindahan panas yang lebih efisien, sementara bagian dengan konduktivitas termal lebih rendah akan menghambat perpindahan panas. Akibatnya, perpindahan panas akan terjadi dengan laju yang berbeda di berbagai bagian media. Bagian dinding yang memiliki konduktivitas termal lebih tinggi akan mengalami perpindahan panas yang lebih cepat, sementara bagian dengan konduktivitas termal lebih rendah akan mengalami perpindahan panas yang lebih lambat. Permasalahan tersebut dapat di dekati dengan pemodelan matematika menggunakan metode elemen batas [2].

Ide utama metode elemen batas adalah solusi dari persamaan diferensial parsial (PDP) diekspresikan dalam persamaan integral batas yang mengandung solusi fundamental dari persamaan diferensial parsial, maka dari itu Teorema Gauss-Green dan Identitas Kedua Green berperan penting dalam metode ini. Metode ini dinamakan Metode Elemen Batas (MEB) karena diskritisasi dilakukan pada batas domain dengan membagi menjadi ruas-ruas atau segmen garis yang berhingga yang selanjutnya digunakan untuk mengevaluasi persamaan integralnya batasnya [12]. Beberapa kelebihan *Boundary Element Method* (BEM) dibandingkan metode numerik yang lainnya, seperti *Finite Element Method* (FEM) dan *Finite Diference Method* (FDM). Metode Elemen Batas dibandingkan dengan Metode Numerik lainnya adalah diskritisasi hanya dilakukan pada batas domain, sehingga membuat pemodelan numerik MEB lebih sederhana dan mereduksi jumlah titik kolokasi yang diperlukan. Metode Elemen Batas menggunakan satu himpunan titik kolokasi yang terletak pada batas-batas domain dapat digunakan untuk mencari solusi di semua titik pada domain. Berbeda dengan metode numerik lainnya yang solusinya diperoleh hanya dititik kolokasi. Serta MEB juga dapat menyelesaikan masalah dengan domain yung rumit seperti sebuah retakan [3].

Hal tersebut membuat penulis tertarik untuk mengetahui bagaimana menyelesaikan model matematika pada permasalahan aliran konduksi panas pada media *non-homogen* dengan koefisien variabel konduktivitas termal menggunakan metode elemen batas serta, untuk mengetahui bagaimana pengaruh koefisien variabel konduktivitas termal terhadap aliran konduksi panas.

1.2. Rumusan Masalah

1. Bagaimana menyelesaikan model matematika pada permasalahan aliran konduksi panas pada media *non-homogen* dengan koefisien variabel konduktivitas termal menggunakan Metode Elemen Batas?
2. Bagaiman pengaruh koefisien variabel konduktivitas termal terhadap aliran konduksi panas pada media *non-homogen*?

1.3. Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, agar pembahasan tidak meluas maka penulis membatasi objek kajian antara lain,

1. Model konduksi panas dalam kondisi *steady-state* atau stabil.
2. Koefisien variabel konduksi termalnya berbentuk satu dimensi.
3. Tidak ada sumber panas dari luar media.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian antara lain,

1. Menyelesaikan model matematika pada permasalahan aliran konduksi panas pada media *non-homogen* dengan koefisien variabel konduktivitas termal menggunakan Metode Elemen Batas.
2. Mengetahui pengaruh koefisien variabel konduktivitas termal terhadap aliran konduksi panas pada media *non-homogen.*

1.5. Manfaat Penelitian

1. Secara umum diharapkan dapat memberikan sumbangsih terhadap perkembangan ilmu pengetahuan tentang aliran konduksi panas pada media *non-homogen* serta untuk menambah wawasan dalam bidang matematika terapan.
2. Secara khusus diharapakan dapat memberikan gambaran tentang penyelesaian model matematika aliran konduksi panas dengan koefisien variabel konduktivitas termal menggunakan metode elemen batas dengan media *non-homogen.*

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konduksi Panas

Perpindahan kalor terjadi bila pada suatu sistem terdapat gradien temperatur atau bila ada dua sistem bersinggungan yang temperaturnya berbeda. Proses dimana sesuatu yang dipindahkan di antara sebuah sistem dan sekelilingnya akibat perbedaan temperatur ini disebut kalor [6]. Perpindahan kalor pada umumnya terjadi dengan tiga cara yaitu konduksi, konveksi serta radiasi. Pada proses konduktivitas termal perpindahan kalor yang terjadi secara konduksi.

Konduksi panas adalah fenomena perpindahan panas yang terjadi ketika energi panas ditransfer melalui kontak langsung antara molekul-molekul bahan. Perpindahan panas terjadi dari daerah dengan suhu yang lebih tinggi ke daerah dengan suhu yang lebih rendah melalui transfer energi oleh getaran dan perpindahan molekul [7].

Konduksi panas memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, termasuk industri, teknik, dan sains. Contoh sitasi untuk konduksi panas dapat ditemukan dalam penelitian tentang desain dan analisis penukar panas, pendingin elektronik, isolasi termal, material termal konduktif, dan pengembangan material dengan konduktivitas termal yang tinggi [8]. Adapun contoh perpindahan kalor secara konduksi dikehidupan sehari-hari adalah pegang ujung sendok makan yang terbuat dari logam sementara ujung lainnya dipanaskan diatas lilin, maka kalor dapat merambat melalui batang logam tersebut.

Persamaan difusi panas adalah persamaan diferensial parsial yang digunakan untuk menganalisis distribusi suhu dalam kasus perpindahan panas konduksi. Persamaan ini menggambarkan keterkaitan antara laju perubahan suhu terhadap perpindahan panas konduksi dan sifat termal bahan [9].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u \tag{2.1}$$

Di mana, u adalah suhu, t adalah waktu, dan α adalah koefisien konduktivitas termal material.

2.2 Konduktivitas Termal

Konduktivitas termal mengacu pada kemampuan suatu bahan untuk menghantarkan panas. Bahan dengan konduktivitas termal tinggi akan dengan efisien mentransfer panas, sementara bahan dengan konduktivitas termal rendah akan memiliki resistensi yang lebih tinggi terhadap aliran panas.

Konduktivitas termal k merupakan nilai suatu material yang pada kemampuannya dalam menghantarkan panas. Fenomena konduksi panas pada material tersebut ialah dengan menghantarkan panas dari temperatur tinggi ke temperatur rendah.

Nilai konduktivitas termal k suatu bahan merupakan suatu konstanta yang bergantung dari jenis suatu bahan atau unsur tersebut. Suatu bahan dengan karakteristik penghantar panas yang baik memiliki nilai konduktivitas termal yang tinggi. Pada suatu bahan, terdapat pula istilah resistensi termal yang menyatakan tahanan panas dari bahan tersebut, yang hubungannya berbanding terbalik dengan konduktivitas termal. Dalam hal ini, suatu bahan dengan nilai resistensi termal yang baik merupakan konduktor panas yang buruk [10].

2.3 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang pada suku-sukunya mengandung bentuk turunan (diferensial) parsial yaitu turunan terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Secara umum, bentuk persamaan diferensial parsial:

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + d\frac{\partial\varphi}{dx} + e\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f\phi = 0$$

Persamaan tersebut merupakan PDP berbentuk linier dalam dua variabel dengan 6 koefisien [11].

2.4 Metode Elemen Batas

Metode Elemen Batas (MEB) atau disebut juga *Boundary Element Method* merupakan suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai macam permasalahan dalam ilmu pengetahuan dengan persamaan pengatur berupa persamaan diferensial parsial eliptik [15].

Ide utama metode elemen batas adalah solusi dari persamaan diferensial parsial (PDP) diekspresikan dalam persamaan integral batas yang mengandung solusi fundamental dari persamaan diferensial parsial, maka dari itu Teorema Gauss-Green dan Identitas Kedua Green berperan penting dalam metode ini. Metode ini dinamakan Metode Elemen Batas karena diskritisasi dilakukan pada batas domain dengan membagi menjadi ruas-ruas atau segmen garis yang berhingga yang selanjutnya digunakan untuk mengevaluasi persamaan integralnya batasnya [12].

Menurut sejarahnya, Metode Elemen Batas (MEB) merupakan metode yang ditemukan belakangan setelah dua metode sejenisnya yaitu Metode Beda Hingga, disingkat (MBH) dan Metode Elemen Hingga (MEH). Ketiga metode ini merupakan metode numerik yang digunakan untuk menentukan solusi numerik dari suatu masalah nilai batas yang memiliki persamaan pengatur dalam bentuk berupa suatu persamaan diferensial. Namun, secara numerik MEB memerlukan jumlah elemen lebih sedikit dibandingkan MBH dan MEH dan waktu hasil komputasi lebih singkat dan tingkat keakuratan hasil numerik hanya memerlukan lebih sedikit elemen dibandingkan MBH dan MEH [14].

Berikut beberapa kelebihan Metode Elemen Batas dibandingkan dengan Metode Komputasi lainnya [13],

1. Diskritisasi hanya dilakukan pada batas domain, sehingga membuat pemodelan numerik lebih sederhana dan mereduksi jumlah titik kolokasi yang diperlukan.
2. MEB yang termodifikasi dapat menyelesaikan masalah dengan sebarang bentuk domain.
3. Untuk domain tak terbatas, pemodelan dirumuskan secara sederhana sebagai masalah eksterior. Adapun solusi fundamental harus memenuhi beberapa kondisi tak terhingga. Sehingga, program komputer yang dikembangkan untuk domain terbatas dapat digunakan, hanya dengan sedikit modifikasi, untuk memecahkan masalah dalam domain tak terbatas. Hal ini tidak mungkin dilakukan dengan FEM.

4. MEB terbukti efektif pada perhitungan turunan seperti flux, tegangan, tekanan dan momen. MEB juga dapat menyelesaikan konsentrasi gaya dan momen pada interior domain dan batas domain.
5. Menggunakan satu himpunan titik kolokasi yang terletak pada batas-batas domain dapat digunakan untuk mencari solusi disemua titik pada domain. Berbeda dengan FEM dan FDM yang solusinya diperoleh hanya dititik kolokasi.

MEB juga dapat menyelesaikan masalah dengan domain yang rumit, seperti sebuah retakan.

Metode Elemen Batas mulai berkembang pada abad ke-19, yang pada awalnya dikenal dengan istilah Boundary Integral Equation Method (BIEM), sebagai metode untuk menyelesaikan masalah fisika matematis. Pertama kali dikerjakan oleh G. Green pada tahun 1828 yaitu masalah syarat batas dirichlet dan Neumann dari persamaan Laplace dibentuk dalam integral solusinya, sehingga bentuk seperti ini disebut sebagai fungsi Green (Katsikadelis, J, 2002). Semenjak penemuan fungsi Green tersebutlah banyak para peneliti yang mengembangkan Metode Elemen Batas.

2.4.1. Teorema Gauss-Green

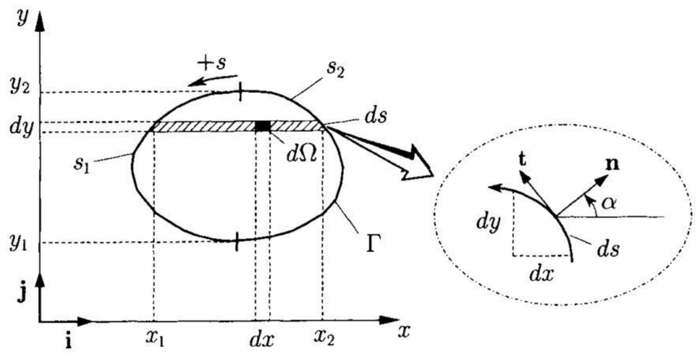
Teorema 2.1. Diberikan fungsi $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang kontinu dan terdiferensial pada domain $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Misalkan $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{D}$ suatu daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana C, maka berlaku

$$\iint_R g\frac{\partial f}{\partial x}\,dxdy = -\iint_R f\frac{\partial g}{\partial x}\,dxdy + \int_C fgn_x ds. \tag{2.2}$$

$$\iint_R g\frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy = -\iint_R f\frac{\partial g}{\partial y}\,dxdy + \int_C fgn_y ds. \tag{2.3}$$

Bukti.

Kurva C dapat dibagi menjadi kurva C_1 dengan arah berlawanan arah jarum jam dan kurva C_2 searah jarum jam. Perhatikan gambar berikut,



Gambar 2.1. Domain R tertutup dan Terbatas oleh Kurva C

dengan $n = (n_x, n_y)$ adalah vektor normal terhadap C, yang mengarah keluar domain $\mathbb{R}$. Berdasarkan gambar (2.1.) diperoleh,

$$\frac{dy}{ds} = \cos\alpha = n_x \rightarrow dy = n_x ds \quad (2.4)$$

$$-\frac{dx}{ds} = \sin\alpha = n_y \rightarrow dx = -n_y ds \quad (2.5)$$

persamaan (2.5) bertanda negatif karena dx memiliki tanda negatif ketika α dihitung berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu-x positif.

Selanjutnya perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dR &= \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dxdy \\
&= \int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx\right) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} (f(x_2, y) - f(x_1, y))dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} f(x_2, y)dy - \int_{y_1}^{y_2} f(x_1, y)dy
\end{aligned}$$

$$= \int_{C_1} f(x_2, y) n_x ds - \int_{C_2} f(x_1, y) n_x ds \tag{2.6}$$

Kurva C_2 searah jarum jam, sehingga integral pada C_2 bernilai negatif ketika y berubah dari y_1 ke y_2. Menggunakan arah yang seragam dari integrasi terhadap C, dua bentuk integral pada C_1 dan C_2 pada persamaan (2.6) dapat digabung menjadi ekspresi tunggal integral terhadap C maka,

$$\iint_R \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_C f(x\,, y) n_x ds \tag{2.7}$$

dengan menggunakan cara yang sama maka,

$$\iint_R \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_C f(x\,, y) n_y ds \tag{2.8}$$

untuk suatu fungsi $g(x, y)$ berdasarkan persamaan (2.7) dan (2.8) diperoleh,

$$\iint_R \frac{\partial fg}{\partial x} dxdy = \int_C fg\, n_x ds \tag{2.9}$$

$$\iint_R \frac{\partial fg}{\partial y} dxdy = \int_C fg\, n_y ds. \tag{2.10}$$

Selanjutnya menggunakan aturan turunan perkalian dapat diperoleh bentuk,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial fg}{\partial x} dxdy &= \iint_R \left(g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy \\ &= \iint_R g \frac{\partial f}{\partial x} dxdy + \iint_R f \frac{\partial g}{\partial x} dxdy \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial fg}{\partial y} dxdy &= \iint_R \left(g \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial g}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_R g \frac{\partial f}{\partial x} dxdy + \iint_R f \frac{\partial g}{\partial x} dxdy \end{aligned} \tag{2.12}$$

sehingga dari persamaan (2.9) dan (2.11) diperoleh,

$$\int_C fgn_x ds = \iint_R g\frac{\partial f}{\partial x}dxdy + \iint_R f\frac{\partial g}{\partial x}dxdy$$

$$\iint_R g\frac{\partial f}{\partial x}dxdy = \int_C fg\,n_x ds - \iint_R f\frac{\partial g}{\partial x}dxdy$$

dan dari persamaan (2.10) dan (2.12) diperoleh,

$$\int_C fg\,n_y ds = \iint_R g\frac{\partial f}{\partial y}dxdy + \iint_R f\frac{\partial g}{\partial y}dxdy$$

$$\iint_R g\frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \int_C fg\,n_y ds - \iint_R f\frac{\partial g}{\partial y}dxdy. \qquad \blacksquare$$

2.4.2. Identitas Kedua Green

Teorema 2.1.2 Diberikan fungsi $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial sampai tingkat kedua dan diferensiable tingkat keduanya kontinu pada domain $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Misalkan $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{D}$ suatu daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana C maka berlaku,

$$\iint_R (g\nabla^2 f - f\,\nabla^2 g)dxdy = \int_C \left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial n}\right)ds, \tag{2.13}$$

dengan

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}n_x + \frac{\partial f}{\partial y}n_y.$$

Bukti.

Perhatikan bahwa,

$$\iint_R (g\nabla^2 f)dxdy = \iint_R g\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$= \iint_R g\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_R g\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}dxdy + \iint_R g\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy,$$

selanjutnya gunakan Teorema Gauss-Green maka diperoleh,

$$\iint_R (g\nabla^2 f)dxdy = -\iint_R \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}dxdy + \int_C \frac{\partial f}{\partial x}gn_x ds - \iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}dxdy + \int_C \frac{\partial f}{\partial y}gn_y ds$$

$$= -\iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy + \int_C g\left(\frac{\partial f}{\partial x}n_x + \frac{\partial f}{\partial y}n_y\right)ds$$

$$= -\iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy + \int_C g\frac{\partial f}{\partial n}ds. \tag{2.14}$$

Perhatikan bahwa,

$$\iint_R (f\nabla^2 g)dxdy = \iint_R f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$= \iint_R f\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_R f\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}dxdy + \iint_R f\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}dxdy,$$

selanjutnya gunakan teorema Gauss-Green maka diperoleh,

$$\iint_R (f\nabla^2 g)dxdy = -\iint_R \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}dxdy + \int_C \frac{\partial g}{\partial x}fn_x ds - \iint_R \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy + \int_C \frac{\partial g}{\partial y}fn_y ds$$

$$= -\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy + \int_C f\left(\frac{\partial g}{\partial x}n_x + \frac{\partial g}{\partial y}n_y\right)ds$$

$$= -\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy + \int_C f\frac{\partial g}{\partial n}ds, \tag{2.15}$$

dengan mengurangkan persamaan (2.14) dan persamaan (2.15) diperoleh

$$\iint_R (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)dxdy = \int_C \left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial n}\right)ds. \qquad \blacksquare$$

2.4.3. Persamaan Laplace

Persamaan Laplace adalah persamaan diferensial parsial (PDP) tingkat dua yang berbentuk,

$$\nabla^2\phi(x,y) = 0, (x,y) \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

dengan

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Domain dari persamaan Laplace (2.16) adalah daerah R dan misalkan R suatu daerah tertutup dan terbatas oleh kurva sederhana C. Solusi dari persamaan Laplace sangat banyak, misalkan $\phi = x + y$, $\phi = x^2 - y^2$. Sehingga untuk solusi persamaan Laplace yang tunggal. Persamaan Laplace dilengkapi dengan syarat batas. Persamaaan diferensial parsial yang dilengkapi dengan syarat batas dalam matematika dikenal dengan istilah Masalah Syarat Batas yang diklasifikasikan sebagai berikut.

1. Masalah Dirichlet

$$\nabla^2\phi = 0, \text{ pada } R$$

$$\phi = \bar{\phi}, \text{ pada } C.$$

2. Masalah Neumann

$$\nabla^2\phi = 0, \text{ pada } R$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \bar{\phi}_n \text{ pada } C.$$

3. Masalah Campuran

$$\nabla^2\phi = 0, \text{ pada } R$$

$$\phi = \bar{\phi}, \text{ pada } C_1$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \bar{\phi}_n \text{ pada } C_2.$$

   dengan $C_1 \cup C_2 = C$ dan $C_1 \cap C_2 = \{\emptyset\}$.

4. Masalah Robin

$$\nabla^2\phi = 0, \text{ pada } R$$

$$\phi + k(s)\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \text{ pada } C,$$

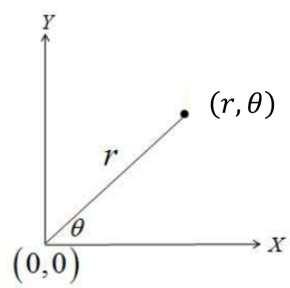
dengan $\bar{\phi}, \bar{\phi}_n, k(s)$ adalah fungsi yang telah diketahui dan terdefinisi pada kurva C.

Masalah Syarat Batas persamaan Laplace banyak digunakan untuk memodelkan masalah dalam kehidupan nyata. Seperti permasalahan menentukan potensial dari medan listrik dalam suatu daerah yang bebas muatan listrik.

Diketahui titik $p_0(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, ditinjau persamaan

$$\nabla^2 \phi(x - \xi, y - \eta) = \delta(p - p_0) \tag{2.17}$$

Solusi khusus persamaan (2.17) disebut solusi fundamental persamaan Laplace [13]. Solusi persamaan (2.17) dapat dicari dengan terlebih dahulu mentransformasikannya kedalam koordinat kutub r dan θ yang berpusat di (ξ, η). Transformasi persamaan Laplace (2.17) ke koordinat kutub r dan θ yang berpusat di $(0,0)$, seperti terlihat pada gambar berikut.



Gambar 2.2 Koordinat kutub

Berdasarkan Gambar (2.2) dapat diperoleh,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r\cos\theta$, dan $y = r\sin\theta$.

Selanjutnya cari turunan parsial x dan y terhadap r dan θ,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

digunakan aturan rantai untuk mencari $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ dan $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$. Karena ϕ adalah fungsi dalam (x, y) maka,

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial\phi}{\partial y}r\cos\theta. \tag{2.19}$$

Kemudian dengan menggunakan aturan rantai untuk mencari $\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$ dan $\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$ dari persamaan (2.18) dan (2.19) maka,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta\right)\\&=\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\\&=\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\\&=\cos\theta\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\sin\theta\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\sin\theta\right)\\&=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\sin^2\theta, \qquad (2.20)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}&=\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\\&=-r\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta\right) \qquad (2.21)\\&\quad+\left(r^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\sin^2\theta-2r^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+r^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\cos^2\theta\right)\end{aligned}$$

kedua ruas persamaan (2.21) dibagi dengan r^2,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=&-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta\right)\\&+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\sin^2\theta-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\cos^2\theta\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\cos^2\theta\right). \qquad (2.22)$$

Selanjutnya jumlahkan persamaan (2.20) dengan (2.22) serta menggunakan identitas trigonometri $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ maka,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\sin^2\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\cos^2\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r + \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}.$$

Jadi hasil transformasi persamaan Laplace (2.17) ke koordinat kutub yang berpusat di (0,0) adalah

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0, \qquad (2.23)$$

dengan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (2.23) maka diperoleh hasil transformasi persamaan Laplace (2.17) dalam koordinat kutub di (ξ, η) yaitu

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \delta(r), \qquad (2.24)$$

dengan

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

diinginkan solusi yang simetris terhadap p_0, maka ϕ tidak bergantung pada besarnya sudut θ melainkan hanya bergantung pada panjang r, sehingga ϕ dapat dinyatakan fungsi dalam r maka persamaan (2.24) menjadi,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi(r)}{dr}\right) = \delta(r). \tag{2.25}$$

Jika $p_0 \neq p$ maka $r \neq 0$, berdasarkan sifat fungsi dirac delta maka $\delta(r) = 0$, sehingga persamaan (2.25) dapat ditulis

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi(r)}{dr}\right) = 0. \tag{2.26}$$

Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan (2.26) dengan mengintegralkan dua kali terhadap r maka,

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi(r)}{dr}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi(r)}{dr}\right) = \int 0\, dr$$

$$\Leftrightarrow \quad r\frac{d\phi(r)}{dr} = A$$

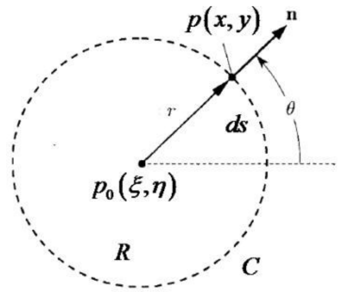
$$\Leftrightarrow \quad \int d\phi(r) = \int \frac{A}{r}\, dr$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi(r) = A\ln(r) + B.$$

Pilih konstanta $B = 0$, sehingga solusi persamaan (2.25) adalah

$$\phi(r) = A\ln(r) \tag{2.27}$$

sehingga akan dicari nilai konstanta A dengan dibentuk kurva C lingkaran seperti gambar berikut.



Gambar 2.3 Domain Lingkaran R

Berdasarkan Gambar (2.3) diketahui bahwa,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{2\pi r}{2\pi} \Leftrightarrow ds = rd\theta. \tag{2.28}$$

Perhatikan bahwa,

$$\nabla^2\phi = \delta(r)$$

$$\Leftrightarrow \iint\limits_R \nabla^2\phi dxdy = \iint\limits_R \delta(r)$$

$$\Leftrightarrow \iint\limits_R \nabla^2\phi dxdy = 1.$$

Berdasarkan Identitas Kedua Green (2.13) maka,

$$\Leftrightarrow \iint\limits_R \nabla^2\phi dxdy = 1$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_C \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = 1$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y\right) rd\theta = 1.$$

Sehingga dari persamaan (2.4), (2.5), (2.28) diperoleh

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial \phi}{\partial y}\sin\theta\right) r d\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r} r d\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{A}{r} r d\theta = 1$$

$$A(2\pi - 0) = 1$$

$$A = \frac{1}{2\pi}.$$

Jadi solusi khusus persamaan (2.27) adalah

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi}\ln(r). \tag{2.29}$$

Persamaan (2.29) adalah solusi dari fundamental persamaan Laplace dalam koordinat kutub, sehingga dengan mengubah persamaan tersebut dalam koordinat kartesius diperoleh solusi persamaan Laplace dalam koordinat kartesius,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

atau

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4\pi}\ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2) \tag{2.30}$$

dengan $x \neq \xi$ dan $y \neq \eta$.

Persamaan (2.30) disebut dengan solusi fundamental persamaan Laplace dua dimensi. Solusi fundamental persamaan Laplace (2.29) dikenal sebagai fungsi Green dari operator Laplace pada domain keselurah $\mathbb{R}^2$, sehingga solusi ini tidak bergantung pada syarat batas.

Perhatikan bahwa persamaan (2.30) adalah solusi dari persamaan (2.17). Akan dibuktikan bahwa persamaan (2.39) merupakan solusi persamaan Laplace (2.17). Perhatikan bahwa,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\frac{2(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{2((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)-2(x-\xi)2(x-\xi)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^2}, \tag{2.31}$$

kemudian

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{4\pi}\frac{2(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{2((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)-2(y-\eta)2(y-\eta)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^2} \tag{2.32}$$

dengan menjumlahkan persamaan (2.31) dan (2.32) diperoleh

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Jadi terbukti bahwa persamaan (2.30) adalah salah satu solusi persamaan Laplace (2.17).

2.4.4. Solusi Persamaan Laplace dengan Metode Elemen Batas

Subbab ini akan membahas tentang bagaimana menyelesaikan persamaan Laplace dua dimensi dengan syarat batas yang diketahui. Persamaan Laplace tersebut memiliki domain R, suatu daerah tertutup dan terbatas oleh kurva sederhana. Persamaan Laplace dua dimensi dengan syarat batas campuran.

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} = 0, (x,y) \in R, \tag{2.33}$$

dengan syarat batas

$$\phi = f_1(x,y), \quad \text{untuk} \quad (x,y) \in C_1 \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = f_2(x,y), \quad \text{untuk} \quad (x,y) \in C_2 \tag{2.35}$$

dimana C_1 dan C_2 adalah dua buah kurva yang tidak berpotongan sedemikian sehingga $C_1 \cup C_2 = C$.

2.4.5. Relasi Resiprokal

Teorema 2.2.1 Relasi Resiprokal

Jika ϕ_1 dan ϕ_2 adalah sebarang solusi persamaan Laplace pada domain daerah R dan C adalah himpunan semua titik batas domain R, maka

$$\int_C \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}\right) ds(x,y) = 0 \tag{2.36}$$

Bukti.

Karena ϕ_1 dan ϕ_2 adalah solusi persamaan Laplace maka memenuhi persamaan (2.33), sehingga

$$\phi_2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{2.37}$$

$$\phi_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{2.38}$$

Kurangkan persamaan (2.37) dan (2.38), sehingga diperoleh

$$\phi_2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2}\right) - \phi_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi_2 \nabla^2 \phi_1 - \phi_1 \nabla^2 \phi_2 = 0,$$

selanjutnya integralkan kedua ruas pada domain R dan gunakan Identitas Kedua Green (2.13)

$$\iint_R \phi_2 \nabla^2 \phi_1 - \phi_1 \nabla^2 \phi_2 dxdy = \iint_R 0\, dxdy$$

$$\Leftrightarrow \int_C \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}\right) ds(x,y) = 0$$

Persamaan (2.36) disebut sebagai hubungan timbal balik atau *relasi resiprokal* antara dua persamaan Laplace dengan domain daerah *R* yang dibatasi oleh kurva C.■

2.4.6. Solusi Integral Batas

Solusi Integral batas untuk Laplace dua dimensi dengan syarat batas adalah,

$$\lambda(\xi,\eta)\phi(\xi,\eta) = \int_C \left(\phi(x,y)\ \frac{\partial\Phi(x,y;\xi,\eta)}{\partial n} - \Phi(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial n}\right) ds. \quad (2.39)$$

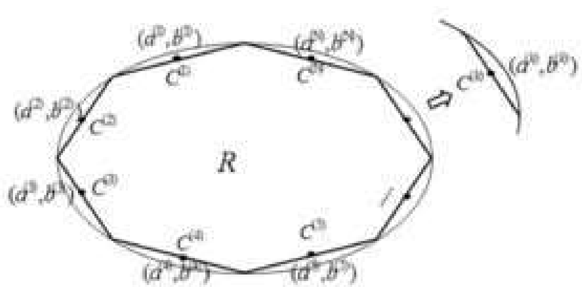
dengan

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{jika } (\xi,\eta) \notin R\ \cup\ C \\ \frac{1}{2}, & \text{jika } (\xi,\eta) \text{pada bagian smooth } C \\ 1, & \text{jika } (\xi,\eta) \in R \end{cases}$$

2.4.7. Solusi Elemen Batas dengan Elemen Konstan

Persamaan Laplace (2.33) telah dibentuk persamaan integral batasnya yaitu persamaan (2.39). Selanjutnya dari persamaan (2.39) akan dicari $\phi(x,y)$ yaitu solusi dari persamaan Laplace (2.33), tetapi penyelesaian persamaan (2.39) sulit diselesaikan secara analitik, sehingga diperlukan suatu metode numerik yang akan diturunkan sebagai berikut.

Pertama diskritisasi batas domain C menggunakan ruas-ruas garis yang berhubungan satu sama lain, dengan ujung-ujungnya terletak pada kurva C, seperti terlihat Gambar (2.4). Misalkan jumlah ruas garisnya N dan diberikan nama $C^{(1)}$, $C^{(2)}, \dots, C^{(N)}$ dengan urutan berlawanan arah jarum jam. Pada setiap $C^{(k)},\ k = 1,2, \dots N$, dipilih titik tengahnya sebagai titik kolokasi (*collocation point*) dan dinamakan $(a^{(k)}, b^{(k)})$.



Gambar 2.4 Diskritisasi Batas Domain

Pendekatan sederhana dari $\phi(x,y)$ dan $\frac{\partial\phi}{\partial n}(x,y)$ pada batas C. Asumsikan bahwa fungsi-fungsi ini adalah konstan pada tiap ruas garis,

$$\phi(x,y) \approx \phi^{(k)} \text{ dan } \frac{\partial\phi}{\partial n}(x,y) \approx p^{(k)} \text{ untuk } C^{(k)}, k = 1,2,\ldots,N,$$

dengan $\phi^{(k)}$ dan $p^{(k)}$ masing-masing adalah nila ϕ dan $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ dititik tengah dari $C^{(k)}$.

Selanjutnya, dengan diskritisasi batas domain dan asumsi konstan tersebut persamaan (2.39) dapat diubah menjadi,

$$\begin{aligned}
\lambda(\xi,\eta)\phi(\xi,\eta) &\approx \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{C^{(k)}} \left(\phi^{(k)} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(x,y;\xi,\eta) - \Phi(x,y;\xi,\eta)p^{(k)}\right) ds \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left[\phi^{(k)} \int\limits_{C^{(k)}} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(x,y;\xi,\eta)ds - p^{(k)} \int\limits_{C^{(k)}} \Phi(x,y;\xi,\eta)ds\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left[\phi^{(k)} F_2^{(K)}(\xi,\eta) - p^{(k)} F_1^{(K)}(\xi,\eta)\right]. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

dengan

$$F_1^{(k)} = \int\limits_{C^{(k)}} \Phi(x,y;\xi,\eta)ds = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{C^{(k)}} \ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)\, ds$$

$$F_2^{(k)} = \int\limits_{C^{(k)}} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(x,y;\xi,\eta)ds = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{C^{(k)}} \frac{\partial}{\partial n}[\ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)]\, ds,$$

substitusikan $(\xi,\eta) = \left(a^{(m)}, b^{(m)}\right), m = 1,2,\ldots,N$, diperoleh

$$\lambda\left(a^{(m)}, b^{(m)}\right)\phi\left(a^{(m)}, b^{(m)}\right) \approx \sum_{k=1}^{N} \left[\phi^{(k)} F_2^{(k)}\left(a^{(m)}, b^{(m)}\right) - p^{(k)} F_1^{(k)}\left(a^{(m)}, b^{(m)}\right)\right]$$

$(m) = 1,2,\ldots,N$

dimana $\left(a^{(m)}, b^{(m)}\right)$ adalah titik tengah dari $C^{(m)}$. Pilih $\lambda\left(a^{(m)}, b^{(m)}\right) = \frac{1}{2}$ karena $\left(a^{(m)}, b^{(m)}\right)$ adalah titik tengah dari $C^{(m)}$ terletak pada bagian smooth dari garis batas perkiraan $C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup C^{(3)} \cup \ldots \cup C^{(N)}$, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2}\phi\left(a^{(m)},b^{(m)}\right)\approx\sum_{k=1}^{N}\left[\phi^{(k)}F_{2}^{(k)}\left(a^{(m)},b^{(m)}\right)-p^{(k)}F_{1}^{(k)}\left(a^{(m)},b^{(m)}\right)\right], \tag{2.41}$$

dengan

$(m) = 1,2,\dots,N$.

Misalkan

$$F_{1,m}^{(k)} = F_{1}^{(k)}\left(a^{(m)},b^{(m)}\right)$$

$$F_{2,m}^{(k)} = F_{2}^{(k)}\left(a^{(m)},b^{(m)}\right)$$

$$\phi^{(m)} = \phi\left(a^{(m)},b^{(m)}\right)$$

sehingga persamaan (2.40) dapat ditulis,

$$\frac{1}{2}\phi\approx\sum_{k=1}^{N}\left[\phi^{(k)}F_{2,m}^{(k)}-p^{(k)}F_{1,m}^{(k)}\right], m = 1,2,\dots,N \tag{2.42}$$

dengan,

$$F_{1,m}^{(k)} = \frac{1}{4\,\pi}\int_{C^{(k)}}\ln\left(\left(x-a^{(m)}\right)^{2}+\left(y-b^{(m)}\right)^{2}\right)ds$$

$$F_{2,m}^{(k)} = \frac{1}{4\,\pi}\int_{C^{(k)}}\frac{\partial}{\partial n}[\ln\left(\left(x-a^{(m)}\right)^{2}+\left(y-b^{(m)}\right)^{2}\right)]ds.$$

Selanjutnya karena batas domain C didekati dengan polygon N sisi $\left(C\approx C^{(1)}\cup C^{(2)}\cup\dots\cup C^{(N)}\right)$ maka untuk setiap $C^{k}, k = 1,2,\dots,N$ elemen dari C_1 atau C_2. Berdasarkan syarat batas persamaan (2.34), jika $C^{(k)}\in C_1$ maka nilai $\phi^{(k)}$diketahui dan nilai $p^{(k)}$tidak diketahui. Sedangkan berdasarkan syarat batas persamaan (2.35), jika $C^{(k)}\in C_2$ maka nilai $\phi^{(k)}$ tidak diketahui dan nilai $p^{(k)}$ diketahui. Sehingga, dari persamaan (2.42) diperoleh sistem persamaan linear (SPL) N persamaan dan N variabel.

Contoh tersebut dapat memberikan ilustrasi tentang SPL yang diperoleh sehingga dapat memberikan gambaran persamaan (2.42) dapat diubah menjadi bentuk berikut,

$$\sum_{k=1}^{N} a^{(mk)} z^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} b^{(mk)}, m = 1,2, \dots, N \tag{2.43}$$

dengan,

$$a^{(mk)} = \begin{cases} F_{2,m} - \frac{1}{2}\delta^{(mk)}, & \text{Jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)} \\ -F_{1,m}^{(k)}, & \text{Jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)} \end{cases}$$

$$z^{(k)} = \begin{cases} \phi^{(k)}, & \text{Jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)} \\ p^{(k)}, & \text{Jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)} \end{cases}$$

$$b^{(mk)} = \begin{cases} p^{(k)} F_{1,m}^{(k)}, & \text{Jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)} \\ \phi^{(k)} \left(-F_{2,m}^{(k)} + \frac{1}{2}\delta^{(mk)} \right), & \text{Jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)} \end{cases}$$

$$\delta^{(mk)} = \begin{cases} 1 & \text{Jika } m = k \\ 0 & \text{Jika } m \neq k \end{cases}$$

Diasumsikan bahwa penyelesaian SPL (2.43) ada dan tunggal, sehingga dapat diperoleh nilai $\phi^{(k)}$ jika $C^{(k)} \in C_2$ dan $p^{(k)}$ jika $C^{(k)} \in C_1$. Akhirnya diperoleh $\phi^{(k)}$dan $p^{(k)}$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, N$. Selanjutnya, nilai $\phi^{(k)}$ dan $p^{(k)}$ yang telah diperoleh dapat digunakan untuk mencari nilai $\phi(a, b), (a, b) \in C \cup R$, menggunakan rumus,

$$\lambda(a, b)\phi(a, b) \approx \sum_{k=1}^{N} \left[\phi^{(k)} F_2^{(k)}(a, b) - p^{(k)} F_1^{(k)}(a, b) \right],$$

dengan

$$F_{1,m}^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \ln((x - a)^2 + (y - b)^2)\, ds$$

$$F_{2,m}^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \frac{\partial(\ln((x - a)^2 + (y - b)^2))}{\partial n} ds.$$

Secara garis besar Langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan syarat batas menggunakan MEB adalah sebagai berikut:

1. Tentukan solusi fundamental dari persamaan diferensial parsial.
2. Bentuk relasi resiprokal antara solusi yang akan dicari dengan solusi fundamental.
3. Bentuk persamaan integral batas, yang diperoleh dari relasi resiprokal dan meodifikasi domain.
4. Selesaikan persamaan integral batas dengan mensubsitusi titik-titik kolokasi ke persamaan integral batas, sehingga diperoleh SPL.
5. Selesaikan SPL dengan menggunakan metode invers matriks. Selanjutnya dengan mensubsitusi solusi SPL ke persamaan integral batas, diperoleh suatu persamaan yang dapat digunakan untuk mengevaluasi solusi persamaan diferensial parsial di semua titik pada domain.