TRANSFORMASI FOURIER QUATERNION SHORT-TIME BERARAH DAN SIFAT-SIFATNYA

DIRECTIONAL SHORT-TIME QUATERNION FOURIER TRANSFORM AND ITS PROPERTIES

NASRULLAH

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
SEKOLAH PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar master

Program Studi Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

NASRULLAH

H022211005

kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

TESIS

TRANSFORMASI FOURIER QUATERNION SHORT-TIME BERARAH DAN SIFAT-SIFATNYA

NASRULLAH

NIM. H022211005

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Magister Program Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal 06 Januari 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui

Pembimbing Utama	Pembimbing Pendamping
Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si. NIP. 19701231 1998021001	Dr. Muhammad Zakir, M.Si. NIP. 19640207 199103 1013
Ketua Program Studi Matematika S2	Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin
Dr. Muhammad Zakir, M.Si. NIP. 19640207 199103 1013	Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si. NIP. 19720515 1997 02 1002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS HASANUDDIN

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "TRANSFORMASI FOURIER QUATERNION SHORT-TIME BERARAH DAN SIFAT-SIFATNYA" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Muhammad Zakir, M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari ini tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal DAYA MATEMATIS : Jurnal inovasi pendidikan matematika sebagai artikel dengan judul "*The orthogonal Property of Directional short-time Quaternion Fourier Transform*".

Dengan ini saya limpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 06 Januari 2023

METERAI TEMPEL
55AKX114933154

NASRULLAH
NIM. H022211005

Ucapan Terima Kasih

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada Allah Yang Maha Esa atas segala nikmat hidup, kesehatan, rejeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul "TRANSFORMASI FOURIER QUATERNION SHORT-TIME BERARAH DAN SIFAT-SIFATNYA". Tak lupa pula salam dan shalawat kepada baginda Rasulullah Nabiullah Muhammad SAW, sosok yang menjadi suri tauladan bagi penulis dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Penulisan tesis ini bertujuan untuk memenuhi syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar. Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si**, selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si**, selaku pembimbing pendamping untuk segala waktu, ilmu, serta kesabaran dalam membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan dan koreksi kepada penulis dalam pengerjaan tesis ini.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, Bapak **Dr. Muhammad Nur, M.Si.**, dan Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak dan ibu **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, dan Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya dan seluruh pihak birokrasi atas pengurusan administrasi yang diberikan kepada penulis.

5. Bapak dan Ibu seluruh staf Departemen Matematika Univeritas Hasanuddin atas segala bantuan dalam pengurusan administrasi akademik selama ini.
6. Kedua Orang tua tercinta Ayahanda **Bahtiar** dan Ibunda **Jumalia** atas segala kasih sayang, doa, dan dukungan kepada penulis.
7. Kakak dan Adik saya tercinta dengan segala kasih sayang, doa, dan dukungan kepada penulis.
8. Teman-teman **Lab analisis: Topan, Afdal, Ibu Wahyuni, Ibu Sri, irfa, Dara.**
9. Seluruh teman-teman Program Studi Magister Matematika yang telah berjuang bersama-sama selama ini.
10. Teruntuk semua pihak yang belum sempat penulis tuliskan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuannya selama ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan-kekurangan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima guna perbaikan kedepannya.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak.

Makassar, 05 Januari 2023

Penulis

ABSTRAK

Penelitian ini akan memperkenalkan dan mengkaji tentang sifat-sifat dasar dari Transformasi Fourier Quaternion Fourier Short-Time Berarah (TFQSTB), yang merupakan kajian lebih lanjut dari Transformasi Fourier Short-Time Berarah (TFSTB), dengan perluasan berupa fungsi yang bernilai Quaternion. TFQSTB merupakan gabungan dari TFSTB dan Transformasi Fourier quaternion (TFQ). Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa, sifat-sifat Transformasi Fourier Quaternion Fourier Short-Time Berarah (TFQSTB) seperti sifat linier, sifat perkalian skalar, sifat translasi, sifat ortogonal, serta ivers dari TFQSTB memberikan hasil yang berbeda dengan sifat Transformasi Fourier Fourier Short-Time Berarah (TFSTB) hal ini diakibatkan oleh fungsi yg bernilai quaternion pada TFQSTB.

Kata Kunci :Transformasi Fourier Quaternion, Transformasi Fourier Short-Time Berarah, Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah.

ABSTRACT

This study will introduce and examine the properties of Directional Short-time quaternion Fourier transform (DSTQFT), which is a further study of Directional Short-time Fourier transform (DSTFT) with an expansion in the form of a function that has a Quaternion value. The DSTQFT are obtained by combining the DSTFT and the Fourier quaternion transform (QFT). Based on the results of the study it was found that the properties of Directional Short-time quaternion Fourier transform (DSTQFT) like the linear properties, scalar multiplication properties, translation properties, orthogonal properties and invers of Directional Short-time quaternion Fourier transform (DSTQFT) give different results from properties of Directional Short-time Fourier transform (DSTFT), this is due to the function having a quaternion value in Directional Short-time quaternion Fourier transform (DSTQFT).

Keywords: Fourier quaternion transform, Directional Short-Time Fourier Transform, Directional Short-Time quaternion Fourier Transform.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL……………………………………………………………………i
PERNYATAAN PENAGAJUAN………………………………………………………..ii
HALAMAN PENGESAHAN……………..……………………………………………..iii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS……………………………..…………………..iv
Ucapan Terima Kasih v
ABSTRAK vii
ABSTRACT viii
DAFTAR ISI ix
BAB I PENDAHULUAN 11
1.1 Latar Belakang 11
1.2 Rumusan Masalah 12
1.3 Tujuan Penelitian 12
1.4 Batasan Masalah 13
1.5 Manfaat Penulisan 13
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 14
2.1 Pengetahuan dasar tentang Quarternion 14
2.2 Integral Lebesque 16
2.3 Ketaksamaan Housdorf – young 20
2.4 ketaksamaan Minkowski untuk integral 20
2.5 Transformasi Fourier 20
a. Sifat Linier 21
b. Sifat Perkalian 21
c. Sifat Translasi 21
d. Sifat Modulasi 21
e. Sifat Translasi dan Modulasi 21
2.6 Transformasi Fourier Quaternion (TFQ) 23
BAB III METODE PENELITIAN 26
3.1 Jenis Penelitian 26
3.2 Lokasi dan Waktu Penelitian 26
3.3 Alur Kerja 26
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 27

4.1 Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB) 27
4.2 Sifat-Sifat Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB) 28
4.3 Invers Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah 34
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 43
5.1 KESIMPULAN 43
5.2 SARAN 43
DAFTAR PUSTAKA 44

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengetahuan dan kemajuan teknologi merupakan aspek yang sangat penting dalam perkembangan kehidupan dan peradaban. Tidak bisa dipungkiri bahwa pengetahuan telah menjadi kekayaan utama suatu bangsa. Tak terkecuali dalam ilmu matematika. Ilmu matematika dewasa ini mengalami banyak perkembangan salah satunya di bidang transformasi.

Transformasi Fourier (TF) merupakan sebuah metode atau alat (tool) untuk mengubah suatu sinyal dalam domain waktu menjadi domain frekuensi. Setelah sinyal berada dalam domain frekuensi dan diolah, sinyal dapat dikembalikan menjadi domain waktu kembali. Transformasi ini ditemukan pada abad ke-19 (tepatnya tahun 1822) oleh seorang matematikawan Perancis, Jean Baptiste Fourier. TF mengalami perkembangan yang sangat pesat dan banyak diaplikasikan di berbagai bidang, diantaranya dalam pengolahan sinyal dan citra.

TF hingga saat ini telah diperluas ke bidang aljabar quaternion yang dikenal dengan Transformasi Fourier Quaternion (TFQ). Quaternion sebagai perluasan bilangan kompleks untuk aljabar dimensi tiga (Triple), Quaternion juga memegang peran yang sangat penting dalam bidang matematika dengan berbagai aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari. Dalam perkembangannya telah dibuktikan beberapa sifat penting TFQ seperti translasi, modulasi, differensiasi dan ketidakpastian (Bahri, 2008). Selain itu, TFQ memiliki peranan penting dalam merepresentasikan sinyal-sinyal. TFQ mentranformasikan signal 2D real menjadi signal berdomain frekuensi bernilai quaternion .

Seiring berkembangnya teori dan aplikasi TF di bidang analisis sinyal, ternyata para analis di bidang ini menganggap TF belum dapat memenuhi kebutuhan analisis sinyal. TF mempunyai kelemahan diantaranya, ia hanya memiliki resolusi frekuensi tanpa ada resolusi waktu. Ini berarti walaupun bisa ditentukan semua frekuensi yang ada dalam sinyal, kita tidak tahu kapan frekuensi tersebut muncul. Maka dari itu transformasi Fourier tidak dapat digunakan untuk merepresentasikan sinyal non-stasioner. Untuk memecahkan masalah ini, dalam beberapa dekade terakhir beberapa solusi telah dikembangkan yang secara kurang lebih mampu merepresentasikan sinyal dalam domain waktu dan frekuensi pada saat yang bersamaan. Solusi awal dari masalah ini adalah Transformasi Fourier Short-Time (TFST). Selanjutnya, pada tahun 2013, Giv mengembangkan teori TFST menjadi Transformasi Fourier Short-Time Berarah (TFSTB) dalam (J. Math. Anal. Appl. 399:100-107, 2013). Giv mengkaji sifat-sifat dasar dari TFSTB yang dituangkan dalam beberapa teorema dan proposisi.

Perpaduan bilangan quaternion saat ini tidak hanya pada transformasi Fourier yang menghasilkan Transformasi Fourier Quaternion (TFQ), akan tetapi dipadukan juga dengan Transformasi Fourier Short-Time berarah. Hasil pengembangan ini disebut menjadi Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB). TFSTB memiliki banyak peranan dalam ilmu matematika murni dan aplikasi matematika. Oleh karena itu, penelitian pada TFSTB dengan perluasan pada domain quaternion merupakan hal yang sangat menarik untuk dilakukan.

Berdasarkan pemaparan di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji sifat-sifat dari Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB). Hasil dan pembahasan akan dirangkum dalam suatu bentuk tulisan yang diberi judul

"Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah dan Sifat-Sifatnya".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana sifat-sifat dari Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB)?

1.3 Tujuan Penelitian

Membuktikan sifat-sifat dasar dari Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB) seperti sifat linear,sifat perkalian skalar, sifat translasi, sifat ortogonal serta inversnya dan membandingkan dengan penelitian sebelumnya.

1.4 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya membahas tentang sifat-sifat dasar dari Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB) seperti sifat linear,sifat perkalian skalar, sifat translasi, sifat ortogonal serta inversnya dan membandingkannya dengan Transformasi Fourier Short-Time Berarah (TFSTB).

1.5 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Untuk mengetahui sifat-sifat Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB).
2. Untuk menambah pemahaman dan penguasaan pembaca tentang Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB)
3. Dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait Transformasi Fourier Quaternion Short-Time Berarah (TFQSTB).

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengetahuan dasar tentang Quarternion

Quaternion pertama kali diperkenalkan oleh W.R.Hamilton yaitu perluasan dari bilangan kompleks (Dospra, 2015). Hal ini berbeda dari bilangan kompleks karena melibatkan tiga unit imajiner, bukan hanya satu dan perkalian empat bagian komponen quaternion tidak bersifat komutatif. Untuk menghormati Hamilton, Quaternion dilambangkan dengan $\mathbb{H}$ dengan bentuk $\mathbb{H} = \{\mathrm{q} \mid q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\}$ dengan $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Untuk sebarang $\mathrm{q} \in \mathbb{H}$ mengambil bentuk

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \qquad (2.1)$$

yang mana $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ memenuhi aturan perkalian

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.
(2.2)

Quaternion q dapat ditulis sebagai $\mathrm{q} = (a_0, \mathbf{q})$ dimana a_0 adalah scalar (q) dan **q** adalah vektor(q),

$$\mathrm{q} = a_0 + \boldsymbol{q} = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k. \qquad (2.3)$$

Konjugat q atau $\bar{q}$ dapat diekspresikan sebagai

$$\bar{q} = (a_0, -\mathbf{q}) = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k. \qquad (2.4)$$

Konjugat quaternion (2.4) adalah anti-involusi linier

$\bar{\bar{p}} = p, \qquad \overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}, \qquad \overline{pq} = \bar{q}\bar{p}, \qquad \forall p, q \in \mathbb{H}.$
(2.5)

Diberikan quaternion q dan konjugatnya, kita dapat dengan mudah memeriksa apakah sifat-sifat berikut ini benar :

$$a_0 = \frac{1}{2}(q + \bar{q}), \quad \boldsymbol{q} = \frac{1}{2}(q - \bar{q}), \quad q = -\bar{q} \leftrightarrow q = \boldsymbol{q}. \tag{2.6}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.2) perkalian dari dua quaternion $q = a_0 + \boldsymbol{q}$ dan $p = b_0 + \boldsymbol{p}$ dapat dinyatakan

$$\mathrm{qp} = \mathrm{a}_0 b_0 + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} + a_0 \boldsymbol{p} + b_0 \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} \tag{2.7}$$

dimana

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

dan

$$\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \boldsymbol{j}(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \boldsymbol{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Sehingga diperoleh

$$\text{Scal } (qp) = \mathrm{a}_0 b_0 + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} \tag{2.8}$$

dan bagian murninya adalah

$$a_0 \boldsymbol{p} + b_0 \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}. \tag{2.9}$$

Khususnya, jika q dan p keduanya adalah quaternion murni maka persamaan (2.7) menjadi

$$\boldsymbol{qp} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} \tag{2.10}$$

Menurut persamaan (2.7) perkalian sebuah quaternion dan konjugatnya dapat ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \bar{q}\mathrm{q} = \mathrm{q}\bar{q} &= a_0 a_0 - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q} + a_0(-\boldsymbol{q}) + a_0 \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times (-\boldsymbol{q}) \\ &= {a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dengan norma dari q adalah sebuah bilangan real dimana:

$$|\mathrm{q}| = \sqrt{\mathrm{q}\bar{q}} = \sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\ . \tag{2.12}$$

Lebih lanjut, untuk setiap $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathbb{H}$ Kita mempunyai:

$$|\mathrm{p}q| = |\mathrm{p}||q| \quad |\mathrm{p}| = |\bar{\mathrm{p}}|. \tag{2.13}$$

Sebuah quaternion q dengan $|q|$ =1 dikatakan sebuah unit dari quaternion jika untuk setiap quaternion q yang tak nol memiliki sebuah invers perkalian, dinotasikan sebagai q^{-1} , sedemikian sehingga

$$\mathrm{q}\mathrm{q}^{-1} = \mathrm{q}^{-1}\mathrm{q} = 1$$

sehingga element dari q^{-1}dikatakan unit dan diberikan oleh:

$$\mathrm{q}^{-1} = \frac{\bar{q}}{|\mathrm{q}|^2} \tag{2.14}$$

yang menunjukkan bahwa $\mathbb{H}$ adalah aljabar pembagian bernorma. Untuk bilangan quaternion dengan $|q|$ = 1, Persamaan. (2.14) disederhanakan menjadi

$$\mathrm{q}^{-1} = \bar{q}. \tag{2.15}$$

dan untuk unit quaternion Persamaan. (2.14) menjadi

$$\mathrm{q}^{-1} = -q. \tag{2.16}$$

Penting untuk dicatat bahwa dengan (2.6), kita memiliki dua fungsi bernilai quaternion f, g (tidak tergantung pada ruang domainnya)

$$\frac{1}{2}\left(g\bar{f} + f\bar{g}\right) = g_0 f_0 - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{f} = Scal(f\bar{g}). \tag{2.17}$$

2.2 Integral Lebesque

Definisi 2.2.1 Ruang $L^1(\mathbb{R})$

Misalkan f fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{f\colon \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty\right\}. \tag{2.18}$$

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_1$ yang dirumuskan

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt.$$

Contoh 2.2

Misalkan $f(t) = \begin{cases} 1\,, & -2 < t < 2 \\ 0\,, & \text{selainnya}' \end{cases}$

akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan hasil integralnya konvergen.

Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.10), diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt &= \int_{-\infty}^{-2} |f(t)|\,dt + \int_{-2}^{2} |f(t)|\,dt + \int_{2}^{\infty} |f(t)|\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{-2} 0\,dt + \int_{-2}^{2} 1\,dt + \int_{2}^{\infty} 0\,dt \\
&= 0 + t|_{-2}^{2} + 0 \\
&= 2 - (-2) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Jadi, $\in L^1(\mathbb{R})$. .

Definisi 2.2.2 Ruang $L^2(\mathbb{R})$

Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai kumpulan semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan mutlak, yakni

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}. \tag{2.19}$$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_2$ yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Jika $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan inner product $\langle f, f \rangle$ dengan aturan jika $f \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{f(t)}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Contoh 2.4

Misalkan $f(t) = e^{-at^2}, \ \forall a > 0$

akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan hasil integralnya konvergen.

Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.19), diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-at^2}\right|^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2}\, dt.$$

Diketahui $f(t)$ merupakan fungsi genap, maka persamaan diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2at^2}\, dt. \tag{2.21}$$

Misalkan $2at^2 = p$, $\frac{dp}{dt} = 4at$, $dt = \frac{dp}{4at}$.

Substitusi di persamaan (2.21), diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-p}\, \frac{dp}{4at}$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-p}\, \frac{dp}{2at}$$

$$= \int_{0}^{\infty} (2at)^{-1}\, e^{-p}\, dp$$

$$= \int_{0}^{\infty} (2at^2)^{-\frac{1}{2}}\, (2a)^{-\frac{1}{2}} e^{-p} dp$$

$$= (2a)^{-\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} (2at^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-p} dp$$

$$= (2a)^{-\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} p^{-\frac{1}{2}}\, e^{-p} dp.$$

Dengan menggunakan sifat fungsi gamma untuk $n = \frac{1}{2}$ diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = (2a)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{(2a)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2a}} < \infty.$$

Karena terbukti

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

Dengan demikian

$$f(t) = e^{-at^2}, \qquad \forall a > 0$$

maka diperoleh $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Karena $f(t) = e^{-at^2}$, $\forall a > 0$ adalah anggota di $L^1(\mathbb{R})$ dan $L^2(\mathbb{R})$ maka $f(t) = e^{-at^2}$, $\forall a > 0$ adalah anggota di $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.2.3 Ruang $L^\infty(\mathbb{R})$

Ruang lebesque $L^p(\mathbb{R}^n)$, dengan $1 \leq p \leq \infty$. Untuk $1 \leq p < \infty$, ruang ini merupakan ruang yang beranggotakan semua fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Untuk $p = \infty$, anggotanya adalah semua fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Namun, jika f kontinu maka bentuk diatas menjadi:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Yang dimaksud dengan 'ruang' dalam hal ini adalah ruang vector: jika $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka $\alpha f + \beta g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Nah, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$merupakan ruang bernorma dengan norma

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Untuk $1 \leq p < \infty$, atau

$$\|f\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

Untuk $p = \infty$.

2.3 Ketaksamaan Housdorf – young

Misalkan $1 \leq q \leq 2$ dan p adalah eksponen konjugat dari q, maka transformasi fourier yang memetakan $L^q(\mathbb{R}^n)$ ke $L^p(\mathbb{R}^n)$, dan

$$\|\hat{f}\|_p \leq \|f\|_q.$$

dimana $\hat{f}$ adalah fourier transform dari f.

2.4 ketaksamaan Minkowski untuk integral

Misalkan $(\chi, \mathcal{M}, \mu)$ dan $(\Upsilon, \varkappa, \nu)$ adalah σ – ruang ukuran hingga , dan $f \geq 0$ merupakan $(\mathcal{M} \otimes \varkappa)$ –fungsi ukur yang terdefini di $\chi \times \Upsilon$. Maka untuk setiap $1 \leq p \leq \infty$

$$\left[\int_{\chi} \left(\int_{\Upsilon} f(x,y)\, d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\Upsilon} \left[\int_{\chi} f(x,y)^p\, d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

2.5 Transformasi Fourier

Pada sub bab ini akan dipaparkan definisi dan sifat-sifat dasar Transformasi Fourier (FT).

Definisi 2.5.1 Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$, maka Transformasi fourier dari fungsi kompleks f didefinisikan

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx\,. \qquad (2.22)$$

dengan $e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$, persamaan (2.22) dapat ditulis menjadi

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx\,.$$

Adapun sifat-sifat dasar transformasi Fourier sebagai berikut.

a. Sifat Linier

Misalkan $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha\mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{g\}(\omega). \qquad (2.23)$$

dimana, α, β adalah konstanta bilangan real.

b. Sifat Perkalian

Misalkan $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap konstanta $\mathrm{k} \in \mathbb{C}$ maka

$$\mathcal{F}\{\mathrm{k}f\}(\omega) = \mathrm{k}\mathcal{F}\{f\}(\omega). \qquad (2.24)$$

c. Sifat Translasi

Misalkan $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dan translasi $\tau_{\mathrm{k}}f(\mathrm{t}) = f(\mathrm{t}-\mathrm{k})$, maka

$$\mathcal{F}\{\tau_{\mathrm{k}}f\}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{k}}\mathcal{F}\{f\}(\omega). \qquad (2.25)$$

d. Sifat Modulasi

Misalkan $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0}f(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\mathrm{t}}f(\mathrm{t})$, maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}f\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega-\omega_0)\,. \qquad (2.26)$$

e. Sifat Translasi dan Modulasi

Misalkan $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dan k, $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_{\mathrm{k}}f(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\mathrm{t}}f(\mathrm{t}-\mathrm{k})$ maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_{\mathrm{k}}f(\mathrm{t})\}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\mathrm{k}}\mathcal{F}\{f\}(\omega-\omega_0). \qquad (2.27)$$

Contoh 2.5

Diberikan fungsi $f(t)$ berikut

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t \le 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Berdasarkan definisi transformasi Fourier (2.22) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0\, e^{-i\omega t}dt + \int_{-1}^{0} 1\, e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{1} 1\, e^{-i\omega t}dt + \int_{1}^{\infty} 0\, e^{-i\omega t}dt.$$

Dengan menggunakan sifat integral

$$\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx, \qquad a < c < b \text{ dan } a, b, c \in \mathbb{R},$$

diperoleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0\, e^{-i\omega t}dt + \int_{-1}^{1} 1\, e^{-i\omega t}dt + \int_{1}^{\infty} 0\, e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (\cos \omega t - i \sin \omega t)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos \omega t\, dt - i \int_{-1}^{1} \sin \omega t\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right]_{-1}^{1} - i\left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\omega}(\sin \omega - \sin(-\omega) + i(\cos \omega - \cos(-\omega))$$

$$= \frac{1}{\omega}(\sin \omega + \sin \omega) + i(\cos \omega - \cos \omega)$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin \omega.$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega$.

2.6 Transformasi Fourier Quaternion (TFQ)

Perpaduan bilangan quaternion saat ini dapat diperluas pada transformasi Fourier yang menghasilkan Transformasi Fourier Quaternion (TFQ). Karena sifat non-komutatif quaternion, ada tiga jenis TFQ yang berbeda: TFQ sisi kiri, TFQ sisi kanan dan TFQ dua sisi [15]. Berikut akan dijelaskan secara lebih rinci, QFT sisi kanan dari sinyal quaternion 2D.

Definisi 2.6.1 (Bahri, 2008) Transformasi Fourier Quaternion (TFQ) dari $f \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$ adalah fungsi $\mathcal{F}_q\{f\} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 \cdot x_1} e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 \cdot x_2}\, d\boldsymbol{x}, \tag{2.28}$$

dengan $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2$ dan hasil kali eksponensial quaternion $e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 \cdot x_1} e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 \cdot x_2}$ adalah Fourier quaternion kernel.

Contoh 2.6.2. Kernel TFQ dari persamaan (2.28) adalah

$$f(x) = e^{\boldsymbol{j}v_0 x_2} e^{\boldsymbol{i}u_0 x_1}$$

Dapat dilihat bahwa TFQ dari f adalah fungsi quaternion Dirac, yaitu

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^2 \delta(\omega - \omega_0), \quad \omega_0 = u_0 e_1 + v_0 e_2$$

Teorema di atas menunjukkan bahwa TFQ mempunyai invers, yaitu, sinyal asli f dapat diperoleh hanya dengan menentukan invers dari transformasi Fourier quaternion (2.29).

Teorema 2.6.3 Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$ dan $\mathcal{F}_q\{f\} \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$, maka invers TFQ adalah

$$\mathcal{F}_q^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](\boldsymbol{\omega}) = f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) e^{\boldsymbol{i}\omega_1 \cdot x_1} e^{\boldsymbol{j}\omega_2 \cdot x_2}\, d\boldsymbol{\omega} \tag{2.29}$$

2.7 Transformasi Fourier Short Time (TFST)

Misalkan $T_b f(\cdot) = f(\cdot - b)$ dan $M_a f(\cdot) = e^{2\pi i a \cdot} f(\cdot), a, b \in \mathbb{R}^n$ masing-masing menyatakan translasi dan modulasi operator. Untuk pergeseran waktu-frekuensi $M_a T_b$ dan $T_b M_a$ sebagai berikut:

$$M_a T_b f(x) = e^{2\pi i a \cdot x} T_b M_a f(x).$$

Transformasi Fourier *Short time* (TFST) dari suatu fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ terhadap fungsi jendela $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai

$$V_g f(b,a) = \langle f(x)\overline{M_a T_b g(x)}\rangle_x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\overline{g(x-b)}\,e^{-2\pi i a\cdot x}dx.$$

Dimana $b, a \in \mathbb{R}^n$.

2.8 Transformasi Fourier Short Time Berarah

Pada sub bab ini akan diberikan beberapa definisi, teorema dan proposisi dari transformasi fourier *short time berarah*.

Definisi 2.8.1 (Giv, 2013.) Misalkan $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ fungsi bukan-nol. Untuk setiap $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, transformasi Fourier *short-time berarah* (TFSTB) dari fungsi f terhadap g dinotasikan oleh $\mathfrak{D}_g f$ dan didefinisikan sebagai fungsi pada $S_{n-1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ melalui

$$\mathfrak{D}_g f\,(\xi, x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,\overline{g(\xi \cdot t - x)}\,e^{2\pi i t\cdot\omega}dt. \qquad (2.30)$$

Proposisi 2.8.1 (Giv, 2013.) Jika $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, maka $\mathfrak{D}_g f$ adalah operator terbatas dari $L^1(\mathbb{R}^n)$ menjadi $L^\infty(\Delta)$ dimana $(\xi, x, \omega) \in \Delta$ dengan norma operator $\|\mathfrak{D}_g f\| \le \|g\|_\infty$.

Proposisi 2.8.2 (Giv, 2013.)

(1). Jika $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dan $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ maka untuk setiap $(\xi, x, \omega) \in \Delta$

$$\mathfrak{D}_g f(\xi, x, \omega) = \widehat{f\bar{g}_{\xi,x}}(\omega) = \langle R_\xi(M_{-\omega} f), T_x g\rangle$$

(2) Jika $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, maka $\mathfrak{D}_g f(\xi, x, \omega)$ adalah TFST dari fungsi $R_\xi(M_{-\omega} f)$ terhadap jendela g pada $(0, -x)$.

Teorema 2.8.3 (Giv, 2013.) Misalkan $g_1, g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dan $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Jika setidaknya salah satu g_i ada di $L^1(\mathbb{R}^n)$, maka hubungan ortogonalitas berikut berlaku.

$$\int_\Delta \mathfrak{D}_{g_1} f_1(\delta)\,\overline{\mathfrak{D}_{g_2} f_2(\delta)}\,d\delta = \langle f_1, f_2\rangle\langle g_2, g_1\rangle \qquad (2.31)$$

Secara khusus, jika $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, maka $\mathfrak{D}_g f \in L^2(\Delta)$ dan $\|\mathfrak{D}_g f\|_2 = \|g\|_2 \|f\|_2$.

Teorema 2.8.4 (Giv, 2013.) Asumsikan $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dan $2 < \mathrm{p} < \infty$. Kemudian $\mathfrak{D}_g f \in L^p(\Delta)$ dan

$$\|\mathfrak{D}_g f\|_p \leq \|g\|_p \|f\|_q.$$

dimana q adalah eksponen konjugat dari p. Tulis $\|g\|_p$ dalam hal $\|g\|_2$ dan $\|g\|_\infty$, dan $\|f\|_q$ dalam hal $\|f\|_1$ dan $\|f\|_2$ kita peroleh

$$\|\mathfrak{D}_g f\|_p \leq (\|f\|_2 \|g\|_2)^{\frac{2}{p}} (\|f\|_1 \|g\|_\infty)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Proposisi 2.8.4 (Giv, 2013.) Misalkan $g_1, g_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$ dan $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Jika setidaknya salah satu g_i ada di $L^1(\mathbb{R}^n)$ dan $\langle g_1, g_2 \rangle \neq 0$, maka

$$f = \frac{1}{\langle g_1, g_2 \rangle} \int_\Delta \mathfrak{D}_{g_1} f(\delta)\, g_{2_\delta}\, d\delta. \tag{2.32}$$

artinya f adalah elemen unik dari $L^2(\mathbb{R}^n)$ sehingga untuk setiap fungsi u dalam $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f, u \rangle = \frac{1}{\langle g_1, g_2 \rangle} \int_\Delta \mathfrak{D}_{g_1} f(\delta) \langle g_{2_\delta}, u \rangle\, d\delta. \tag{2.33}$$

Secara khusus, jika $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ adalah fungsi bukan nol, maka

$$f = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_\Delta \mathfrak{D}_g f(\delta) g_\delta\, d\delta.$$