PERFORMA PENGGUNAAN METODE *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTOR* PADA *SMALL AREA ESTIMATION*

SKRIPSI

AISYAH PUTRI ALDINI

H051201035

PROGRAM STUDI STATISTIKADEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2024

PERFORMA PENGGUNAAN METODE *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTOR* PADA *SMALL AREA ESTIMATION*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

AISYAH PUTRI ALDINI

H051201035

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Performa Penggunaan Metode *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Predictor* pada *Small Area Estimation*

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 1 Mei 2024

[illegible] Putri Aldini

NIM H051201035

PERFORMA PENGGUNAAN METODE *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTOR* PADA *SMALL AREA ESTIMATION*

Disetujui Oleh:

Pembimbing Utama

Anisa, S.Si., M.Si.
NIP. 19730227 199802 2 001

Ketua Program Studi

Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.
NIP. 19770808 200501 2 002

Pada 1 Mei 2024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Aisyah Putri Aldini
NIM	:	H051201035
Program Studi	:	Statistika
Judul Skripsi	:	Performa Penggunaan Metode *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Predictor* pada *Small Area Estimation*

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

1.	Ketua	:	Anisa, S.Si., M.Si.	(..................)
2.	Anggota	:	Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si,	(..................)
3.	Anggota	:	Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si,	(..................)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 1 Mei 2024

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* atas segala limpahan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada baginda Rasulullah *Shallallahu 'Alaihi Wa Sallam* beserta keluarga dan para sahabatnya. *Alhamdulillahirobbil'alamin*, berkat nikmat kemudahan dan pertolongan yang diberikan oleh Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Performa Penggunaan Metode Spatial Empirical Best Linear Unbiased Predictor pada Small Area Estimation**" yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan dorongan dari berbagai pihak yang senantiasa turut membantu dalam bentuk moril maupun materil sehingga dengan segala keterbatasan kemampuan dan pengetahuan, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada orangtua penulis, Ayahanda **Suwisno** dan Ibunda **Ariyanti** yang telah memberikan dukungan penuh, limpahan cinta dan kasih sayang, pengorbanan luar biasa, perjuangan, serta doa-doa luar biasa yang mengiringi setiap langkah perjalanan hidup penulis serta keluarga besar penulis, terima kasih atas doa mulia dan dukungannya selama ini.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan dan ketulusan juga penulis ucapkan kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.,** selaku Rektor Universitas ...nuddin beserta seluruh jajarannya.

...**ak Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu ...etahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.

3. **Ibu Dr. Anna Islamiyati S.Si., M.Si.,** selaku Ketua Departemen Statistika yang dengan penuh kesabaran telah memberikan arahan, dorongan semangat dan motivasi kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.

4. **Ibu Anisa, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Utama yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk senantiasa memberikan arahan, dorongan semangat, dan motivasi kepada penulis dari awal hingga selesainya penulisan tugas akhir ini.

5. **Ibu Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si,** dan **Dr. Anna Islamiyati S.Si., M.Si.,** selaku Tim Penguji yang telah meluangkan waktu dalam memberikan motivasi serta kritikan yang membangun kepada penulis dalam penyempurnaan tugas akhir ini.

6. **Ibu Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si,** selaku Penasehat Akademik penulis yang senantiasa memberikan bantuan, nasehat, serta motivasi kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.

7. Segenap **Dosen Pengajar** dan **Staf Departemen Statistika** yang telah memberikan ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menempuh pendidikan sarjana di Departemen Statistika.

8. Sahabat tercinta penulis **MAMONLUK**, **Nurul Kurunulbahriah Aliyah, Nurrifdah Fadhilah**. Terima kasih atas kebersamaan, kebahagiaan, kesedihan, serta kebaikannya menjadi sosok guru bagi penulis. Terima kasih telah mengukir kenangan indah bersama penulis selama masa perkuliahan.

9. Teman – teman seperjuangan di **Statistika 2020, Among Us,** dan **Ciwi-Ciwi Among**. Terima kasih atas ilmu, kebersamaan, suka dan duka dalam menjalani perkuliahan di Departemen Statistika. Terima kasih sudah menerima kehadiran penulis. Kalian hebat dan luar biasa.

an – teman **KKN Tematik Desa Wisata Tompobulu Gelombang 110** usus teman-teman **Posko 1 Toddolimae,** terima kasih telah memberikan masukan dan motivasi, serta pengalaman baru bagi penulis menjelajahi kampung sendiri.

11. Kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih setinggi-tingginya untuk segala dukungan, partisipasi, dan apresiasi yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini, untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat untuk berbagai pihak.

Makassar, 1 Mei 2024

Aisyah Putri Aldini

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aisyah Putri Aldini

NIM : H051201035

Program Studi : Statistika

Departemen : Statistika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif (Non-exclusive Royalty-Free Right)** atas tugas akhir saya yang berjudul:

" Performa Penggunaan Metode Spatial Empirical Best Linear Unbiased Predictor pada Small Area Estimation"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya. Dibuat di Makassar tanggal 1 Mei 2024.

Yang menyatakan,

ldini)

ABSTRAK

Small Area Estimation adalah metode yang digunakan untuk menghasilkan estimasi yang lebih akurat untuk parameter populasi di area kecil atau subpopulasi. Metode SEBLUP merupakan salah satu metode estimasi SAE dengan mempertimbangkan adanya hubungan spasial antar area kecil dan memasukkan variabel random efek spasial dalam penduga EBLUP. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan model terbaik berdasarkan nilai ARRMSE antara penduga EBLUP dengan penduga SEBLUP. Estimasi parameter pada penelitian ini menggunakan metode *maximum likelihood.* Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa ketika terdapat efek korelasi spasial antar area, maka hasil pendugaan SEBLUP akan lebih presisi dibandingkan pendugaan EBLUP yang ditinjau dari jumlah area yaitu kecil, sedang, dan besar. Hal ini ditunjukkan dengan nilai ARRMSE untuk tiap kategori dari penduga SEBLUP memiliki nilai ARRMSE terendah ketika diberikan efek spasial yang besar $(\rho = 0.75)$.

Kata kunci : *Small Area Estimation*, *Maximum Likelihood*, EBLUP, SEBLUP, ARRMSE

ABSTRACT

Small Area Estimation is a method used to produce more accurate estimates for population parameters in small areas or subpopulations. The SEBLUP method is one of the SAE estimation methods by considering the spatial relationship between small areas and including random spatial effect variables in the EBLUP estimation. This research aims to obtain the best model based on the ARRMSE value between the EBLUP estimator and the SEBLUP estimator. Parameter estimation in this study used the maximum likelihood method. The results of this research show that when there is a spatial correlation effect between areas, the SEBLUP estimation results will be more precise than the EBLUP estimation in terms of the number of areas, namely small, medium and large. This is shown by the ARRMSE value for each area category from the SEBLUP estimator which has the lowest ARRMSE value when large spatial effects are given ($\rho = 0.75$).

Keywords: *Small Area Estimation*, *Maximum Likelihood*, EBLUP, SEBLUP, ARRMSE

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Survei adalah metode pengumpulan data yang digunakan untuk mengumpulkan informasi dari sejumlah sampel individu atau unit statistik dalam suatu populasi yang lebih besar. Untuk menduga parameter populasi wilayah yang lebih besar, seperti provinsi, kabupaten, atau kota, berbagai survei biasanya menggunakan pendekatan pendugaan langsung (*direct estimation*) untuk menduga parameter populasi. Namun, dalam kasus di mana jumlah sampel yang digunakan tidak mencukupi atau bahkan tidak tersedia sama sekali, pendekatan yang digunakan untuk menduga parameter populasi menjadi tidak valid sehingga dikembangkan metode *Small Area Estimation* (SAE) untuk mengatasi masalah tersebut.

SAE adalah metode yang digunakan untuk menghasilkan estimasi yang lebih akurat untuk parameter populasi di area kecil atau subpopulasi dalam survei. SAE dapat dikelompokkan menjadi dua model dasar yakni model berbasis area dan model berbasis unit. Pada model berbasis area, estimasi parameter populasi dilakukan dengan menggunakan data pendukung yang tersedia hanya pada level area tertentu. Sedangkan pada model berbasis unit, estimasi parameter populasi dilakukan dengan menggunakan data pendukung yang bersesuaian secara individu dengan data respon. Menurut Ningtyas, dkk (2005) dalam SAE, terdapat bebearapa pendekatan yang dapat digunakan seperti *Hierarchical Bayes* (HB), *Empirical Bayes* (EB), dan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP).

EBLUP merupakan metode pengembangan dari metode BLUP (*Best Linear Unbiased Prediction*) dengan memperhitungkan estimasi parameter dari model pendugaan sampel kecil dengan variasi antar area kecil. Pengembangan EBLUP dari BLUP diawali oleh Rao (1999) yang mengusulkan sebuah pendekatan untuk ...irakan parameter populasi pada level area kecil dengan memasukkan ... parameter dari model sampel kecil dan variansi antar area kecil. ...ya, Prasad dan Rao (2002) mengusulkan pendekatan yang lebih kompleks dengan mempertimbangkan adanya hubungan spasial antar area kecil dan memasukkan variabel random efek spasial dalam penduga EBLUP yang dikenal dengan istilah penduga *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP). Sebuah penelitian oleh Nusrang, dkk (2017) menunjukkan Penduga SEBLUP akan memberikan hasil dugaan yang lebih baik dibandingkan dengan penduga EBLUP. Namun dalam beberapa kasus, penentuan matriks pembobot spasial juga memberikan pengaruh yang cukup signifikan dalam memberikan pendugaan SEBLUP yang optimum.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis tertarik untuk mendapatkan hasil pendugaan terbaik menggunakan model SEBLUP, namun juga memperlihatkan hasil pendugaan model EBLUP sebagai model dasar, dengan melihat nilai *error* terkecil. Dalam penelitian ini, indikator ARRMSE (*Average Relative Root Mean Square Error)* yaitu Galat Rata-rata Relatif *Mean* Kuadrat Akar yang digunakan untuk menggambarkan seberapa baik model memprediksi nilai sebenarnya dengan memperhitungkan rata-rata relatif dari akar kuadrat dari kesalahan kuadrat antara prediksi dan nilai sebenarnya. Semakin rendah nilai ARRMSE, semakin baik kinerja model dalam memprediksi data.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana kebaikan model antara penduga EBLUP dengan penduga SEBLUP ?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini yaitu.

1. Data yang digunakan yaitu data Simulasi yang dibangkitkan dengan kondisi tertentu disebabkan data aktual yang dibutuhkan tidak dipublikasikan oleh BPS ...gai penyedia data resmi pemerintah.
2. ...l yang digunakan yaitu model level area, karena data yang tersedia berupa ...kecil atau subpopulasi.
3. ...bobot spasial yang digunakan yaitu matriks *queen*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan pada penelitian ini yaitu mendapatkan model terbaik berdasarkan nilai ARRMSE antara penduga EBLUP dengan penduga SEBLUP.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Diharapkan dapat menjadi bahan pembelajaran dalam menambah wawasan mengenai SEBLUP dalam pendugaan area terkecil.
2. Diharapkan dapat memberikan landasan yang kuat untuk penggunaan praktis atau penelitian lebih lanjut dalam bidang ini.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Small Area Estimation*

Menurut Rao (2003), suatu area dikatakan besar apabila ukuran sampel pada area tersebut mampu menghasilkan presisi pendugaan yang baik dengan penduga langsung. Sebaliknya, suatu area dikatakan “kecil” apabila ukuran sampel pada area tersebut tidak cukup untuk menunjang penduga langsung agar mampu menghasilkan presisi pendugaan yang baik. Pendekatan lain seringkali diperlukan untuk mengatasi permasalahan tersebut, salah satunya adalah penduga tak langsung. Penduga tak langsung “meminjam informasi” dengan menggunakan nilai peubah dari sampel pada area lain yang terkait dengan area yang diamati.

2.1.1 Pendugaan Langsung

Pendekatan klasik untuk menduga parameter populasi didasarkan pada aplikasi model disain penarikan sampel (*design based*) dan penduga yang dihasilkan dari pendekatan itu disebut penduga langsung (*direct estimation*). Data hasil survei ini dapat digunakan untuk mendapatkan penduga yang terpercaya dari total maupun rata-rata populasi suatu area atau domain dengan jumlah sampel yang besar (Gosh & Rao, 1994). Adapun formula untuk memperoleh penduga langsung sebagai berikut (Ningtyas dkk., 2015):

$$y_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij,} \quad i = 1,2,\ldots,m, \;\; j = 1,2,\ldots,n_i \tag{2.1}$$

Keterangan:

y_i : penduga langsung rata-rata respon dari area ke-i

y_{ij} : nilai respon dari amatan ke-j area ke-i

ah amatan area ke-i

Menurut Sudjana (2005) rumus varians untuk penduga langsung adalah sebagai berikut:

$$S_i^2 = \frac{n_i \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \left(\sum y_{ij}\right)^2}{n_i(n_i - 1)} \tag{2.2}$$

Pengukuran seberapa baik penduga langsung dapat dilihat dengan menggunakan nilai Mean Square Error (MSE). Adapun rumus MSE penduga langsung menurut (Rao, 2003) adalah sebagai berikut:

$$MSE(y_i) = \frac{s_i^2}{n_i} \tag{2.3}$$

Keterangan:

s_i^2 : ragam dari penduga langsung untuk area ke-i

n_i : jumlah amatan area ke-i

2.1.2 Pendugaan Tidak Langsung

Pada pendugaan SAE terdapat dua jenis model dasar yang digunakan, yaitu model level area dan model level unit. Pada penelitian ini menggunakan model berbasis area, yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung hanya pada level area tertentu, misalkan $\boldsymbol{x_i} = \left(x_{i1}, x_{i2,}, \dots, x_{ip}\right)^T$ dengan parameter yang akan diduga adalah θ_i yang merupakan fungsi dari rata-rata peubah respon dan diasumsikan mempunyai keterkaitan dengan x_i dengan mengikuti model sebagai berikut:

$$\theta_i = \boldsymbol{x_i^T \beta} + z_i v_i, \qquad i = 1, \dots, m \tag{2.4}$$

Keterangan:

$\boldsymbol{x_i^T}$: variabel penyerta, yaitu variabel yang memiliki pengaruh langsung terhadap variabel yang akan di duga

anta bernilai positif

r dari parameter yang bersifat tetap berukuran $p \times 1$

m : jumlah area kecil

v_i : efek acak daerah yang diasumsikan berdistribusi normal dan independen dengan $E(v_i) = 0$ dan $Var\ (v_i) = \sigma_v^2$.

Kesimpulan mengenai θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung y_i telah tersedia yaitu :

$$y_i = \theta_i + e_i, \qquad i = 1,2, \dots, m \tag{2.5}$$

dengan, e_i : error dari pemilihan daerah sampel yang berdistribusi normal $E(v_i) = 0$ dan $Var\ (\varepsilon_i) = \psi_i$.

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (2.4) ke Persamaan (2.5) diperoleh model gabungan yang disebut sebagai model berbasis area, yaitu:

$$y_i = \boldsymbol{x_i^T \beta} + z_i v_i + e_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{2.6}$$

dengan asumsi v_i dan e_i saling bebas (Rao, 2003).

2.1.3 Metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction*

Asumsi dasar dalam pengembangan untuk model pendugaan area kecil adalah keragaman di dalam area kecil peubah respon dapat diterangkan oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tambahan yang disebut pengaruh tetap. Asumsi lainnya yaitu bahwa keragaman spesifik area kecil tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan dan merupakan pengaruh acak area kecil. Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model pengaruh campuran. Henderson (1975) mengembangkan teknik penyelesaian model pengaruh campuran untuk memperoleh prediksi tak-bias linear terbaik (*Best Linear Unbiased Prediction*).

Menurut Rao (2003), BLUP merupakan suatu pendugaan parameter yang meminimumkan *Mean Squared Error* (MSE) diantara kelas-kelas pendugaan r linear tak bias lainnya. BLUP dihasilkan dengan asumsi bahwa n ragam diketahui. Model dasar dalam pengembangan pendugaan area asarkan pada bentuk model linier campuran sebagai berikut :

$$y_i = \theta_i + e_i = \boldsymbol{x_i^T\beta} + z_i v_i + e_i, \qquad i = 1,2,\dots,m \qquad (2.7)$$

Menurut Rao (2003) penduga BLUP yang terbentuk bagi $\theta_i = \boldsymbol{x_i^T\beta} + v_i$ adalah:

$$\hat{\theta}_i^{BLUP} = \boldsymbol{x_i^T\hat{\beta}} + \gamma_i(y_i - \boldsymbol{x_i^T\hat{\beta}}) = \gamma_i y_i + (1-\gamma_i)\boldsymbol{x_i^T\hat{\beta}} \qquad (2.8)$$

dengan, $\gamma_i = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \psi_i}$

Metode BLUP yang dikembangkan Henderson (1953, 1975) mengasumsikan diketahuinya komponen ragam pengaruh acak dalam model linier campuran, padahal dalam kenyataannya, komponen ragam ini tidak diketahui. Oleh karena itu maka penduga ini harus terlebih dahulu diduga. Harville (1977) dalam papernya menulis tentang pendugaan komponen ragam dengan menggunakan *Maximum Likelihood* (ML) atau dengan metode *Restricted Maximum Likelihood* (REML). Bentuk dari $(\hat{\sigma}_u^2)$, baik melalui proses ML atau REML merupakan estimator σ_v^2, sehingga $\hat{\theta}_i$ menjadi:

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = \hat{\gamma}_i y_i + (1-\hat{\gamma}_i)\boldsymbol{x_i^T\hat{\beta}} \qquad (2.9)$$

Menurut Prasad dan Rao (1990), misalkan θ merupakan suatu parameter dan $\hat{\theta}_i$ merupakan taksiran dari parameter θ. MSE dari $\hat{\theta}_i$ didefinisikan sebagai berikut:

$$MSE\left(\hat{\theta}_i^{EBLUP}\right) = g_{1i}(\sigma_u^2) + g_{2i}(\sigma_u^2) + g_{3i}(\sigma_u^2) \qquad (2.10)$$

Keterangan:

$$g_{1i}(\sigma_u^2) = \frac{\sigma_v^2\psi_i}{\psi_i + \sigma_v^2} : \gamma_i + \psi_i$$

$$g_{2i}(\sigma_u^2) = (1-\psi_i)^2 x_i^T \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i x_i^T}{\psi_i + \sigma_v^2}\right]^{-1} x_i$$

$$g_{3i}(\sigma_u^2) = \left[\frac{\psi_i}{(\psi_i + \hat{\sigma}_v^2)}\right]$$

E dari suatu taksiran parameter memiliki peranan penting untuk diketahui, ya adalah untuk mengukur seberapa baik taksiran parameter yang .

2.1.4 Metode *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Predictor*

Misalkan vektor $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m)^T, \boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$ dan $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_m)^T$, dan matriks $\boldsymbol{X} = (x_1^T, \dots, x_m^T)^T$ dan $\boldsymbol{Z} = diag(z_1, \dots, z_m)$. Berdasarkan definisi vektor dan matriks tersebut, maka Persamaan (1) dalam notasi matriks adalah :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zv} + \boldsymbol{e} \tag{2.11}$$

Model dengan pengaruh spasial yang digunakan dalam model SAE adalah *Simultaneously Autoregressive models* (SAR). Model SAR dengan vektor pengaruh acak area $\boldsymbol{v}$ memenuhi:

$$\boldsymbol{v} = \rho\boldsymbol{Wv} + \boldsymbol{u} \tag{2.12}$$

Keterangan:

ρ : koefisien *Spatial Autoregressive* yang menunjukan kekuatan dari hubungan spasial antar pengaruh acak

$\boldsymbol{W}$: matriks pembobot spasial berukuran $m \times m$

$\boldsymbol{v}$: pengaruh acak area berukuran $m \times 1$

$\boldsymbol{u}$: vektor *error* dari pengaruh acak area berukuran $m \times 1$

Persamaan (2.12) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{u} \tag{2.13}$$

dengan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas berukuran $m \times m$. Dari Persamaan (2.13) dapat dilihat bahwa rata-rata $\boldsymbol{v}$ adalah 0 dan matriks koragam $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{G})$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G} = E[\boldsymbol{vv^T}] &= E[((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{u})((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{u})^T] \\
&= E[(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{uu}^T((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1})^T] \\
&= (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}E[\boldsymbol{uu}^T]((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\rho W})^{-1})^T \\
&= (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\sigma_u^2\boldsymbol{I}((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1})^T \\
&= \sigma_u^2(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}((\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1})^T \\
&= \sigma_u^2[(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}
\end{aligned}$$

Persamaan (2.13) dimasukkan ke dalam Persamaan (2.11) menghasilkan:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{e} \tag{2.14}$$

Matriks koragam dari $\boldsymbol{y}$ dengan $\boldsymbol{R} = diag(\psi_i)$ adalah:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} &= \boldsymbol{R} + \boldsymbol{ZGZ^T} \\ &= diag(\psi_i) + \boldsymbol{Z}\sigma_u^2[(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\rho W^T})]^{-1}\boldsymbol{Z^T}\end{aligned} \tag{2.15}$$

Keterangan:

$\boldsymbol{R}$: matriks covarian dari error

$\boldsymbol{Z}$: matriks tetapan dengan nilai 1 dan 0

$diag$ (ψ_i) : matriks diagonal berukuran $m \times m$ dengan elemen-elemen selain diagonal utama bernilai 0 dan diagonal utama bernilai ψ_i

ψ_i : ragam error dari daerah ke-i.

Sehingga bentuk dari $diag(\psi_i)$ adalah sebagai berikut:

$$diag(\psi_i) = \left(\begin{bmatrix} \psi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \psi_i \end{bmatrix}\right)$$

Pendugaan terhadap SEBLUP, dengan rumus penduga EBLUP model SAR adalah:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_i^{SEBLUP}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) = \boldsymbol{x_i^T}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{b_i^T}\{\hat{\sigma}_u^2\,[(\boldsymbol{I} - \hat{\rho}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \hat{\rho}\boldsymbol{W})^T]^{-1}\}\boldsymbol{Z}^T \times \\ \{diag(\psi_i) + \boldsymbol{Z}\sigma_u^2[(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}^{-1}\,(y_i - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X^T V^{-1} X})^{-1}\,\boldsymbol{X^T V^{-1} y}$ serta $b_i^T = (0,0,\dots,0,0,1,\dots,0)$.

Penduga dari $MSE\left[\hat{\theta}_i^{SEBLUP}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right]$ diperoleh dengan mengikuti hasil dari Harville dan Jeske (Harville dan Jeske 1992 dalam Pratesi dan Salvati 2008) dan kemudian dikembangkan menjadi model dengan koragam terampat (*generalized covariances*), yaitu :

$$MSE\left[\hat{\theta}_i^{SBLUP}(\sigma_u^2, \rho)\right] = g_{1i}(\sigma_u^2, \rho) + g_{2i}(\sigma_u^2, \rho) \tag{2.17}$$

Keterangan:

$$g_{1i}(\sigma_u^2,\rho) = \boldsymbol{b_i^T}\{\sigma_u^2\,[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\}\boldsymbol{Z}^T$$

$$\times\{diag(\psi_i)+\boldsymbol{Z}\sigma_u^2[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}^{-1}\boldsymbol{Z}\sigma_u^2$$

$$\times[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\boldsymbol{b_i}$$

$$g_{2i}(\sigma_u^2,\rho) = (x_i-\boldsymbol{b_i^T}\{\sigma_u^2\,[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\}\boldsymbol{Z}^T$$

$$\times\{diag(\psi_i)\boldsymbol{Z}\sigma_u^2[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}^{-1}\boldsymbol{X})$$

$$\times\boldsymbol{X^T}\{diag(\psi_i)+\boldsymbol{Z}\sigma_u^2[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}^{-1}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}$$

$$\times(\boldsymbol{x_i}-\boldsymbol{b_i^T}\{\sigma_u^2\,[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\}\boldsymbol{Z}^T$$

$$\times\{diag(\psi_i)+\boldsymbol{Z}\sigma_u^2[(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^T]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}^{-1}\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{T}}.$$

Diketahui bahwa nilai ρ dan σ_u^2 diestimasi berturut-turut menjadi $\hat{\rho}$ dan $\hat{\sigma}_u^2$. MSE bagi penduga SEBLUP adalah sebagai berikut:

$$MSE\left[\hat{\theta}_i^{SEBLUP}(\hat{\sigma}_u^2,\hat{\rho})\right] \approx g_{1i}(\hat{\sigma}_u^2,\hat{\rho})+g_{2i}(\hat{\sigma}_u^2,\hat{\rho})2g_{3i}(\hat{\sigma}_u^2,\hat{\rho}) \qquad (2.18)$$

Keterangan:

$$g_{3i}(\hat{\sigma}_u^2,\hat{\rho}) = tr\left\{\begin{vmatrix}\boldsymbol{b_i^T}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{V}^{-1}+\sigma_u^2\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T(-\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{V}^{-1}))\\ \boldsymbol{b_i^T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{V}^{-1}+\sigma_u^2\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T(-\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{V}^{-1})\end{vmatrix}\boldsymbol{V}\times\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{b_i^T}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{V}^{-1}+\sigma_u^2\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T(-\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{V}^{-1}))\\ \boldsymbol{b_i^T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{V}^{-1}+\sigma_u^2\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T(-\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{V}^{-1})\end{vmatrix}^T \bar{V}(\hat{\sigma}_u^2,\hat{\rho})\right\}$$

dengan $\hat{\sigma}_u^2$ dan $\hat{\rho}$ adalah penduga yang diperoleh dengan menggunakan metode ML.

2.2 Estimasi Parameter

2.2.1 Estimasi Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Pada penelitian ini menggunakan penaksiran parameter metode *Maximum* ... *od* (ML). Adapun pdf dari $\boldsymbol{y_i}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\,Var\,(\boldsymbol{y_i})}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{y_i}-\boldsymbol{X_i^T\beta}\right)^T(Var(\boldsymbol{y_i})^{-1}\left(\boldsymbol{y_i}-\boldsymbol{X_i^T\beta}\right)\right) \qquad (2.19)$$

Berdasarkan persamaan (2.19), maka dapat diperoleh fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho) = \prod_{i=1}^{m} f(y_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\, Var\,(y_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(y_i - \boldsymbol{x_i^T \beta} \right)^T (Var(y_i)^{-1} \left(y_i - \boldsymbol{x_i^T \beta} \right) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} (\sqrt{2\pi\, Var\,(y_i)})} \exp \sum_{i=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} \left(y_i - \boldsymbol{x_i^T \beta} \right)^T (Var(y_i)^{-1} \left(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{x_i^T \beta} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \right) \tag{2.20}$$

dimana $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} var\,(y_1) & cov\,(y_1, y_2) & \cdots & cov(y_1, y_n) \\ cov(y_2, y_1) & var\,(y_2) & \cdots & cov(y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov\,(y_n, y_1) & cov\,(y_n, y_2) & \cdots & var\,(y_n) \end{pmatrix}$$

Sehingga dihasilkan fungsi *ln-likelihood* dari Persamaan (2.20) sebagai berikut:

$$\ln L\,(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho) = ln \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[- \left(\frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})}{\boldsymbol{2}} \right) \right] \right)$$

$$= ln \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{2}}} \right) + \ln \left(\exp \left[- \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})}{2} \right] \right)$$

$$= -\ln 2\pi^{\frac{m}{2}} - \ln |\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{2}} - \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})}{2}$$

$$= -\frac{m}{2}\; ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{V}| - \frac{1}{2} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{V}^{-1}\, (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \tag{2.21}$$

Selanjutnya fungsi *ln-likelihood* diturunkan secara parsial terhadap $\boldsymbol{\beta}$.

$$\frac{\partial\, l(\boldsymbol{\beta},\sigma_u^2,\rho)}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial[-\frac{m}{2}\ ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{V}| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})]}{\partial\boldsymbol{\beta}}$$

$$= -\frac{m}{2}\frac{\partial[\ln(2\pi)]}{\partial\boldsymbol{\beta}} - \frac{1}{2}\frac{\partial[\ln|\boldsymbol{V}|]}{\partial\boldsymbol{\beta}} - \frac{1}{2}\frac{\partial[(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T)\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})]}{\partial\boldsymbol{\beta}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}$$

$$= -\frac{1}{2}(-2\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X\beta})$$

$$= \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X\beta} \tag{2.22}$$

Maka diperoleh nilai estimasti parameter $\boldsymbol{\beta}$ menggunakan metode penaksiran *Maximum Likelihood* (ML) yaitu:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta},\sigma_u^2,\rho)}{\partial\boldsymbol{\beta}} = 0$$

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X\beta} = 0$$

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X\beta} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{y} \tag{2.23}$$

2.2.2 Estimasi Parameter $\boldsymbol{\sigma_u^2}$ dan $\boldsymbol{\rho}$

Asumsi kenormalan dari pengaruh acak $\hat{\sigma}_u^2$ dan $\hat{\rho}$ dapat diestimasi dengan prosedur *maximum likelihood* (ML). Estimator ML, $\hat{\sigma}_{u\,ML}^2$ dapat diperoleh secara *iterative* menggunakan algoritma "*Nelder-Mead*" dan algoritma "*scoring*". …an dua prosedur ini secara berurut perlu dilakukan karena metode … *Nelder-Mead* tidak tergantung pada pemilihan titik awal tetapi tidak …isien dan hasil yang diperoleh mendekati maksimum global, sedangkan algoritma scoring memerlukan titik awal yang tepat untuk mendapatkan fungsi yang maksimum. Fungsi *maximum likelihood* (ML) yang dihasilkan oleh Pratesi dan Salvati (2008) untuk menduga σ_u^2 dan ρ adalah sebagai berikut:

1. Turunan parsial $l(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho)$ terhadap σ_u^2

$$s_{\sigma_u^2}(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial l}{\partial \sigma_u^2}$$

$$= -\frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{V^{-1}ZC^{-1}Z^T}\} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^{\boldsymbol{T}}(-\boldsymbol{V^{-1}2C^{-1}Z^TV^{-1}})$$

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \qquad (2.24)$$

2. Turunan parsial $l(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho)$ terhadap ρ

$$s_\rho(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial l}{\partial \rho}$$

$$= -\frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{V^{-1}Z\sigma_u^2}\{-\boldsymbol{C^{-1}}(2\rho\boldsymbol{WW^T} - \boldsymbol{2W})\boldsymbol{C^{-1}Z^T}\} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T$$

$$(-\boldsymbol{V^{-1}Z\sigma_u^2}[-\boldsymbol{C^{-1}}(2\rho\boldsymbol{WW^T} - \boldsymbol{2W})\boldsymbol{C^{-1}}]\boldsymbol{Z^T}) \qquad (2.25)$$

dengan $\boldsymbol{C} = [(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W^T})]$

sehingga matriks turunan kedua dari $l(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho)$ terhadap σ_u^2 dan ρ , sebagai berikut:

$$\mathfrak{I}(\sigma_u^2, \rho) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{V^{-1}ZC^{-1}Z^T}\} & \frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{V^{-1}ZC^{-1}Z^TV^{-1}ZAZ^T}\} \\ \frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{V^{-1}ZAZ^TV^{-1}ZC^{-1}Z^T}\} & \frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{V^{-1}ZAZ^TV^{-1}ZAZ^T}\} \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

dengan $\boldsymbol{A} = \sigma_u^2[-\boldsymbol{C^{-1}}((2\rho\boldsymbol{WW^T} - \boldsymbol{2W})\boldsymbol{C^{-1}}]$

Penduga ML untuk $\hat{\sigma}_u^2$ dan $\hat{\rho}$ dapat diperoleh secara iteratif menggunakan algoritma scoring, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \rho \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \rho \end{bmatrix}^{(k)} + \left[\mathcal{L}\left(\sigma_u^{2(k)}, \rho^{(k)}\right)\right]^{-1} s\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}\left(\sigma_u^{2(k)}, \rho^{(k)}\right)\right] \sigma_u^{2(k)}, \rho^{(k)}] \qquad (2.27)$$

menunjukkan banyaknya iterasi.

2.3 Matriks Pembobot Spasial

Hal yang sangat penting dalam analisis spasial adalah adanya pembobot atau sering disebut sebagai matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial digunakan untuk menentukan bobot antar lokasi yang diamati berdasarkan hubungan ketetangga antar lokasi. Matriks pembobot yang digunakan dalam penelitian ini adalah matriks pembobot *queen*. Daerah pengamatan matriks pembobot *queen* ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sudut juga diperhitungkan. Ilustrasi untuk matriks pembobot *queen* dapat dilihat pada Gambar 1, Dengan unit B1, B2, B3, dan B4 serta C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A.

	Unit C1	Unit B2	Unit C2	
	Unit B1	Unit A	Unit B3	
	Unit C4	Unit B4	Unit C3	

Gambar 2.1 Matriks Pembobot Queen

Pada umumnya ketetanggaan antar lokasi didasarkan pada sisi-sisi utama bukan sudutnya. Menurut Kosfeld (2006), matriks pembobot spasial **W** dapat diperoleh dari dua cara yaitu matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* $\boldsymbol{W}^{*}$) dan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix*). Matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* $\boldsymbol{W}^{*}$) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot yang sama rata terhadap tetangga lokasi terdekat dan yang lainnya nol, sedangkan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix*) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot satu bagi tetangga terdekat dan yang lainnya nol.

2.4 Kebaikan Model

Pada proses evaluasi dengan melakukan perbandingan hal yang akan dibandingkan adalah nilai *Average Relative Root Mean Square Error* (ARRMSE) antar parameter yang dihasilkan dari berbagai metode yang digunakan dengan estimasi langsung (Rao, 2003). Formula yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

$$RRMSE_{(i)} = \left[\frac{1}{\theta_i}\sqrt{\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}(\hat{\theta}_{il} - \theta_i)^2}\right]100\% \qquad (2.28)$$

$$ARRMSE = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} RRMSE_{(i)} \qquad (2.29)$$

Keterangan:

θ_i : parameter pada area kecil ke-i.

m : banyaknya area yang digunakan.

$\hat{\theta}_{il}$: penduga area kecil pada area kecil ke-i.

B : banyaknya iterasi, dalam penelitian ini $B = 1000$.