

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, W. (2006). *Fundamentals Of Chemistry. Mineralogy. Weathering Processes and Laterite Formation*. PT.Vale Inco : Sorowako.
- Ahmad, W. (2009). *Fundamentals of Chemistry, Mineralogy, Weathering Processes, Formation and Exploration*. PT.Vale Inco: Sorowako.
- Akram, M. A. (2015). Pemodelan Endapan Nikel Laterit Menggunakan Software Surpac pada PT. Cipta Mandiri Putra Perkasa Kabupaten Morowali Provinsi Sulawesi Tengah. *Jurnal Geomine*, 3(1).
- Arif, M. (2017). *Hubungan Nilai Resistivitas dan Sifat Kimia Batuan Untuk Menentukan Karakteristik Profil Nikel Laterit di Kecamatan Nuha, Luwu Timur*. [Skripsi Geofisika, Universitas Hasanuddin].
- Binley, A., & Slater, L. (2020). *Resistivity and Induced Polarization*. <https://doi.org/10.1017/9781108685955>.
- Cai, J. T., Ruan, B. Y., Zhao, G. Z., & Zhu, G. P. (2007). Two-Dimensional Modeling of Complex Resistivity Using Finite Element Method. *Chinese Journal of Geophysics*, 50(6), 1615-1624.
- Chalik, C. A., Thamsi, A. B., & Arizal, A. (2023). Produktivitas Kerja Alat Bor pada Kegiatan Pengeboran Eksplorasi Nikel Laterit di PT Hoffmen International. *Jurnal Pertambangan*, 7(1), 33-38.
- Coggon. J. H (1971). *Electromagnetic And Electrical Modeling By The Finite Element Method. Geophysics*. Vol. 36, No.1, 132-155.
- Dahlin, T., & Zhou, B. (2004). A numerical comparison of 2D resistivity imaging with 10 electrode arrays. *Geophysical prospecting*, 52(5), 379-398.
- Dahlin, T., & Zhou, B. (2006). Multiple-*gradient* array measurements for multichannel 2D resistivity imaging. *Near Surface Geophysics*, 4(2), 113-123.
- Dwiangga, D. N. (2023). Aplikasi metode ERT dalam eksplorasi nikel laterit untuk menentukan sebaran nilai resistivitas pada layer ore di area "DN". [Skripsi Geofisika, Universitas Hasanuddin].
- Fitrian, E. B. (2021). Identifikasi Sebaran Nikel Laterit dan Cadangan Bijih Nikel Menggunakan Korelasi Data Bor. *Paulus Civil Engineering Journal*, 3, 113-119.
- Grandis, H. (2009). Pengantar Inversi Geofisika. Himpunan Ahli Geofisika Indonesia (HAGI) : Bandung.
- Hall, R., & Wilson, M. E. J. (2000). Neogene sutures in eastern Indonesia. *Journal of Asian Earth Sciences*, 18(6), 781-808.

- Hasibuan, Z. M., Nuramal, A., & Hestiawan, H. (2021). Proses Pengeboran Lubang Bucket Excavator Menggunakan Mesin Line Boring Di PD. XYZ. *Rekayasa Mekanika*, 5(1), 27-30.
- Iryanto, S. B., Muttaqien, F. H., & Sadikin, R. (2020). Irregular Grid Interpolation using Radial Basis Function for Large Cylindrical Cadangan. *Jurnal Ilmu Komputer dan Informasi*, 13(1), 17-23.
- Kartahadikusuma, J., & Gunadi, K. (2013). Aplikasi Inpainting Dengan Bicubic dan RBF Interpolation (Doctoral dissertation, Petra Christian University).
- KCMI, 2017. Kode Pelaporan Hasil Eksplorasi, Sumberdaya Mineral dan Cadangan Bijih, Jakarta. Hal. 10-16
- Kurniadi, A., Rosana, M. F., & Yuningsih, E. T. (2018). Karakteristik batuan asal pembentukan endapan nikel laterit di daerah madang dan serakaman tengah. *Geoscience Journal*, 2(3), 221-234.
- Looke, M.H. 2004. Tutorial: 2-D and 3-D Electrical Imaging Surveys. Geotomo Software. Penang, Malaysia.
- Lowrie, W. 2007. Second Edition: Fundamentals of Geophysics. Cambridge University Press: Cambridge.
- Manrulu, R. H., Nurfalaq, A., & Hamid, I. D. (2018). Pendugaan sebaran air tanah menggunakan metode geolistrik resistivitas konfigurasi wenner dan schlumberger di kampus 2 universitas cokroaminoto palopo. *Jurnal Fisika Flux: Jurnal Ilmiah Fisika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat*, 15(1), 6-12.
- Melani, O., Fara, T. A., Anjelika, L., Safitri, D. E., Wibowo, R. C., & Zaelani, A. (2021). Penerapan Metode Inversi Dalam Pendugaan Nilai Resistivitas. *Teknika Sains: Jurnal Ilmu Teknik*, 6(2), 91-101.
- Santoso, B., & Subagio. (2018). Pemodelan Nikel Laterit Berdasarkan Data Resistivitas Di Daerah Kabaena Selatan Kabupaten Bombana, Provinsi Sulawesi Tenggara. *Jurnal Geologi Dan Sumberdaya Mineral*, 19(3), 148–161. <http://dx.doi.org/10.33332/jgsm.geologi.19.3.148-158>.
- Sasaki, Y. (1989). Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data. *Geophysics*, 54(2), 254-262.
- Sedana, D., As'ari, A., & Tanauma, A. (2015). Pemetaan Akuifer Air Tanah Di Jalan Ringroad Kelurahan Malendeng Dengan Menggunakan Metode Geolistrik Tahanan Jenis. *Jurnal Ilmiah Sains*, 15(1), 33. <https://doi.org/10.35799/jis.15.1.2015.6778>
- Sianturi, K. H. (2008). Deteksi keberadaan endapan nikel laterit dengan pemanfaatan gelombang radar.

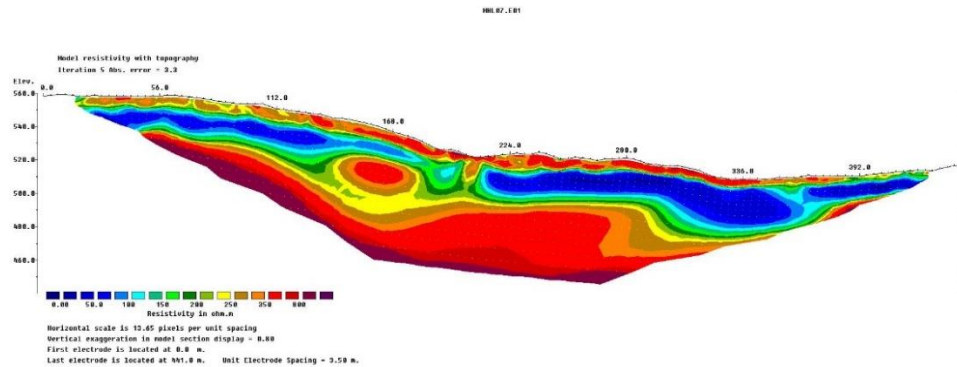
- Sompotan, A. F. (2012). Struktur Geologi Sulawesi. *Bandung: Perpustakaan Sains Kebumihan Institut Teknologi Bandung.*
- Supit, J. M. (2020). Pemodelan Sumberdaya Bijih Nikel Berdasarkan Metode Geostatistik di Desa Boni Kabupaten Raja Ampat Papua Barat: Jurnal Penelitian Tambang. *INTAN*, 1(2).
- Sukamto, R. (1975). Perkembangan tektonik di Sulawesi dan daerah sekitarnya, suatu sintesis perkembangan berdasarkan tektonik lempeng. *Jurnal Geology*, 2(1), 3-8.
- Supriyono, S. (2005). Aplikasi Metode Elemen Hingga untuk Perhitungan Perambatan Panas pada Kondisi Tunak. In Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi (SNATI).
- Surawan, Y. (2014). *Optimalisasi Penggunaan ERT Konfigurasi Gradient Dalam Memaksimalkan Eksplorasi Nikel Laterit.* [Skripsi Geofisika, Universitas Hasanuddin].
- Telford, W. M., Geldart, L. P., & Sheriff, R. E. (1990). *Applied geophysics.* Cambridge university press.
- Wahyudin, W. (2017). Aplikasi Metode Polarisasi Terinduksi (IP) dan Resistivitas Untuk Zona Mineralisasi Timah Di Area Bangka Barat (Doctoral dissertation, Universitas Hasanuddin).
- Xiong, B., & Ruan, B. Y. (2002). A numerical simulation of 2-D geoelectric section with biquadratic change of potential for resistivity sounding by the finite element method. *Chinese Journal of Geophysics*, 45(2), 288-300.

LAMPIRAN

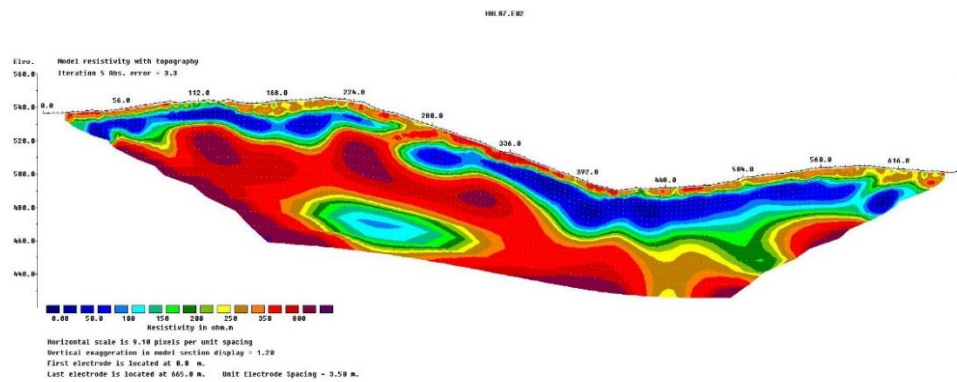
LAMPIRAN

Lampiran 1. Hasil Inversi

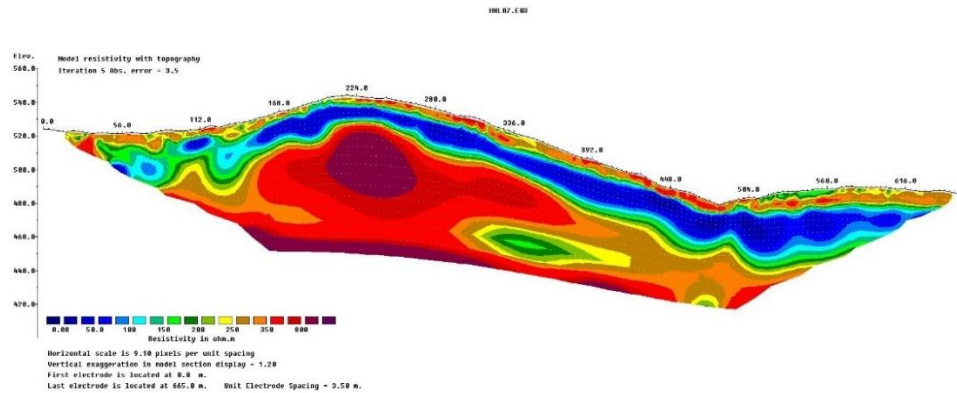
1. Lintasan E01



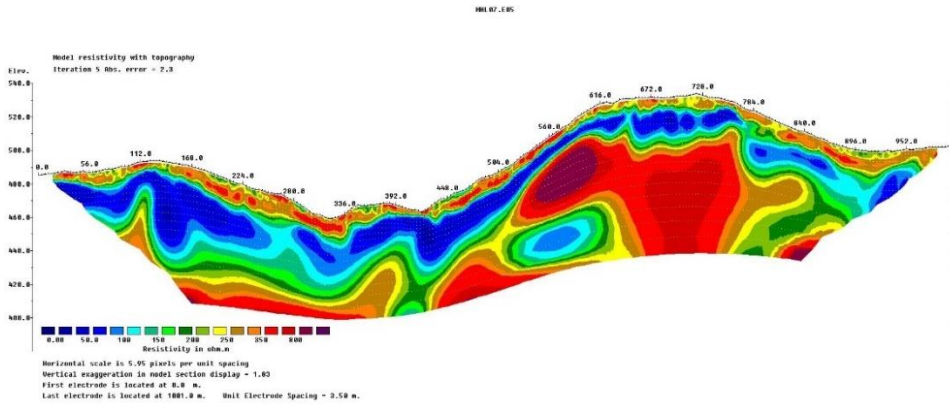
2. Lintasan E02



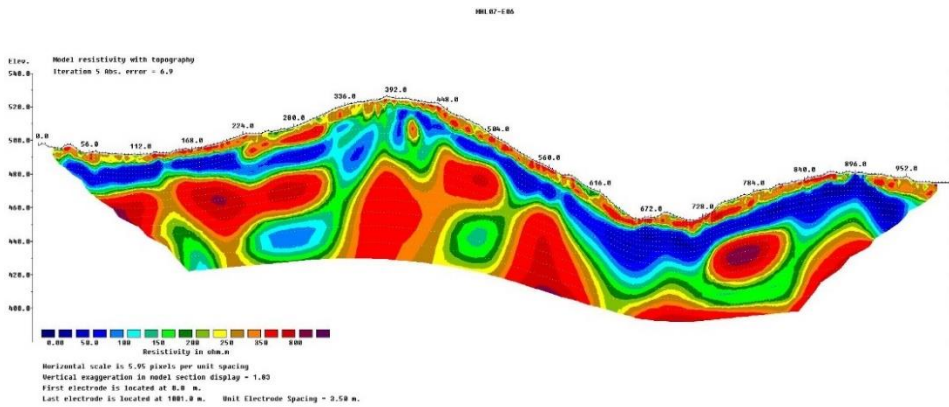
3. Lintasan E03



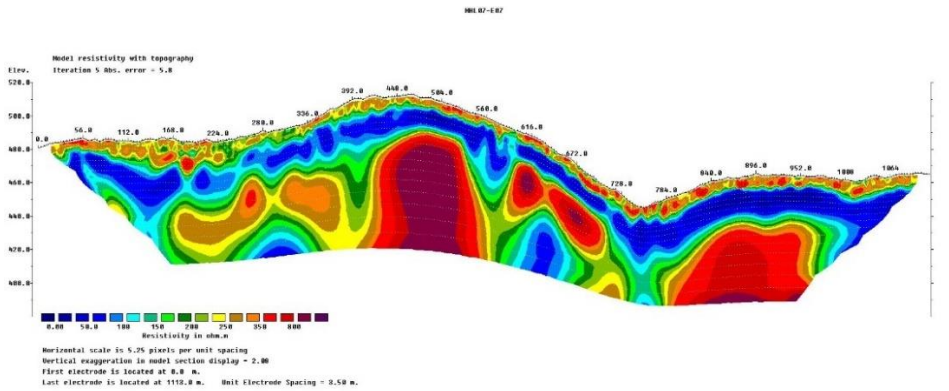
4. Lintasan E05



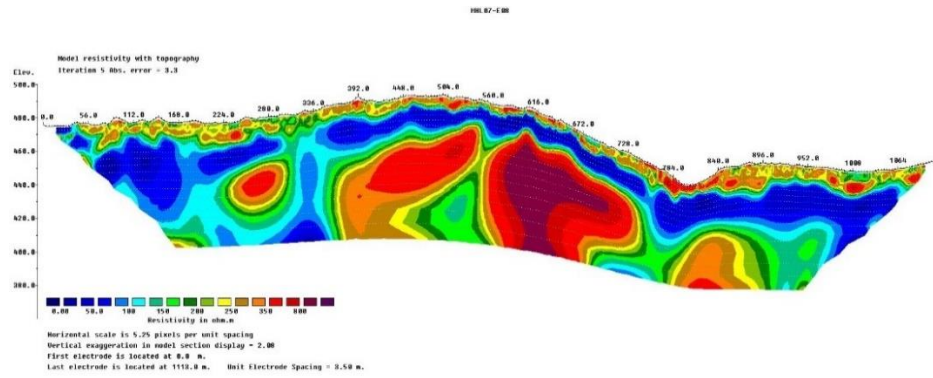
5. Lintasan E06



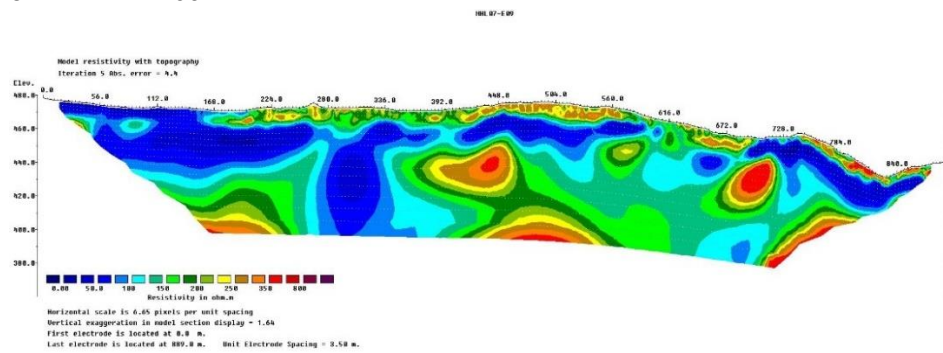
6. Lintasan E07



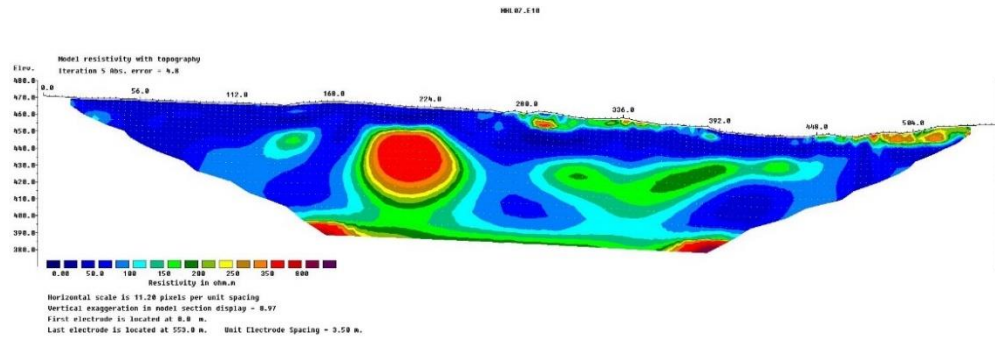
7. Lintasan E08



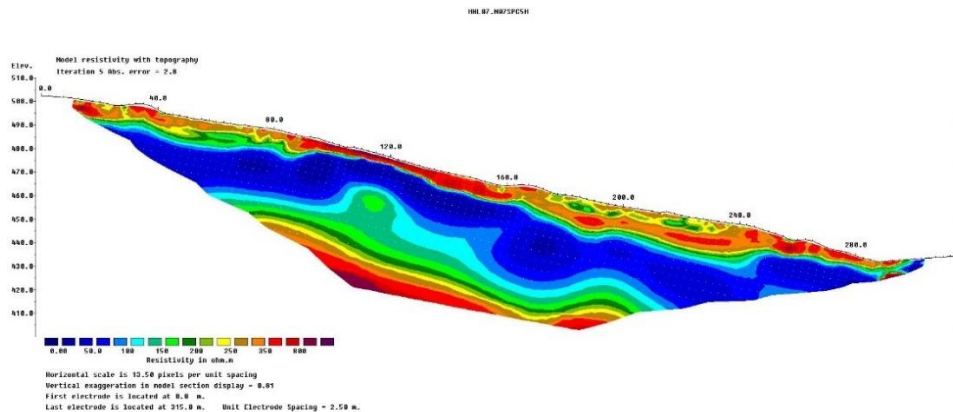
8. Lintasan E09



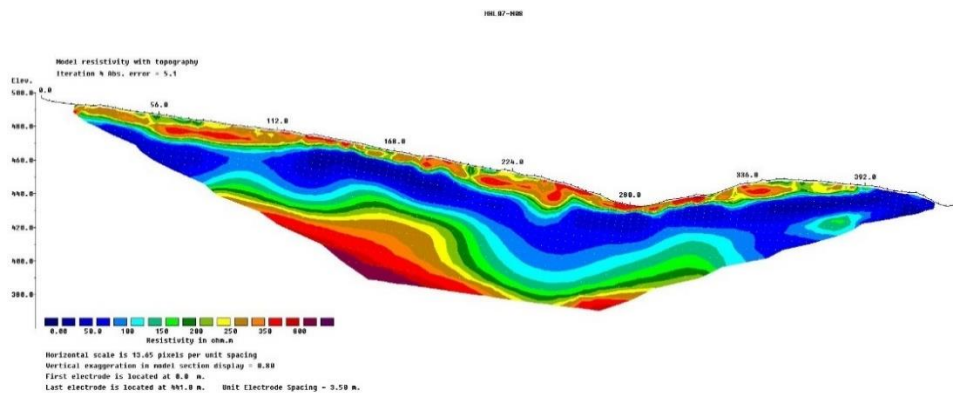
9. Lintasan E10



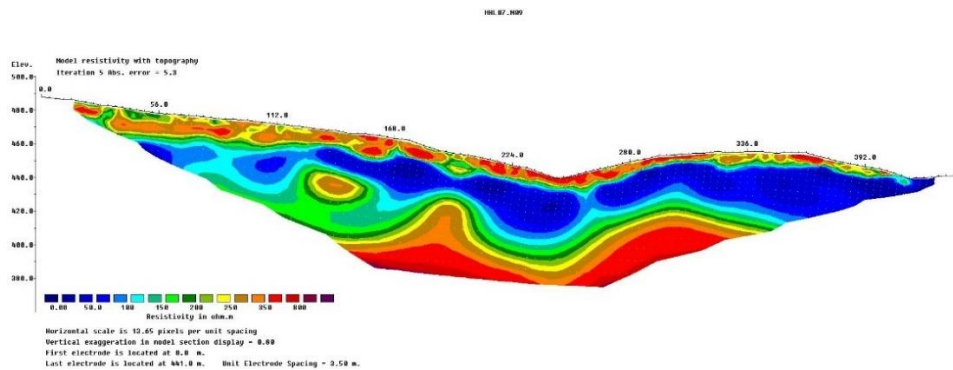
10. Lintasan N07



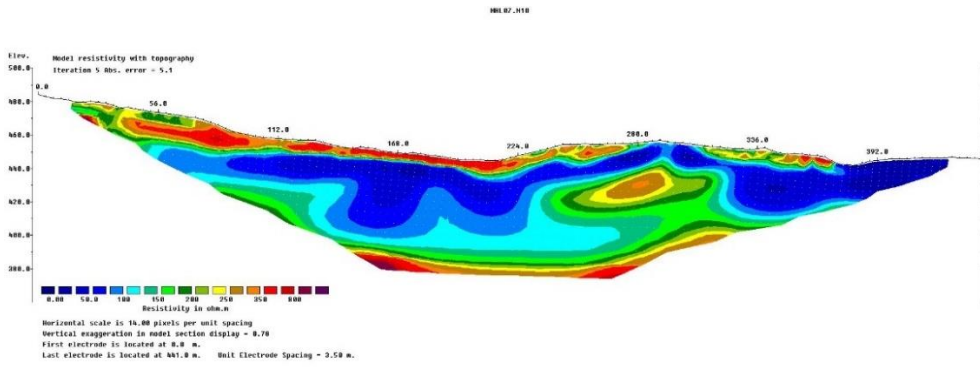
11. Lintasan N08



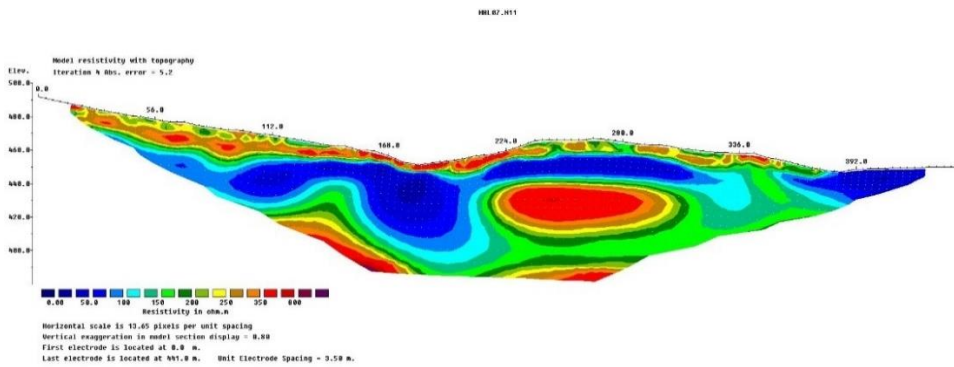
12. Lintasan N09



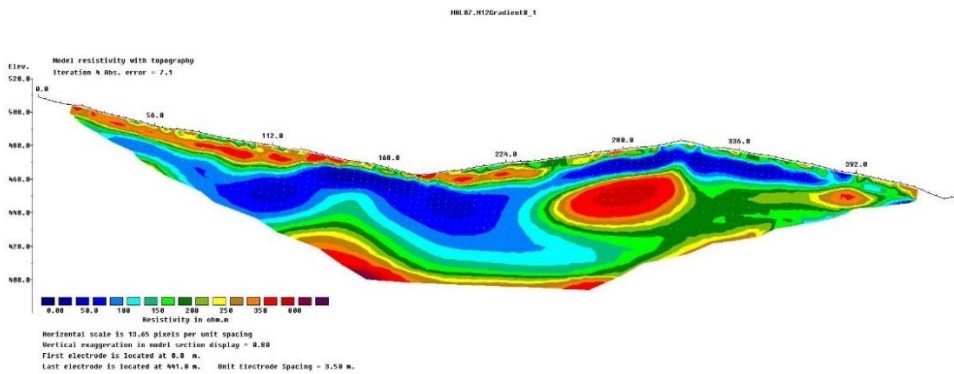
13. Lintasan N10



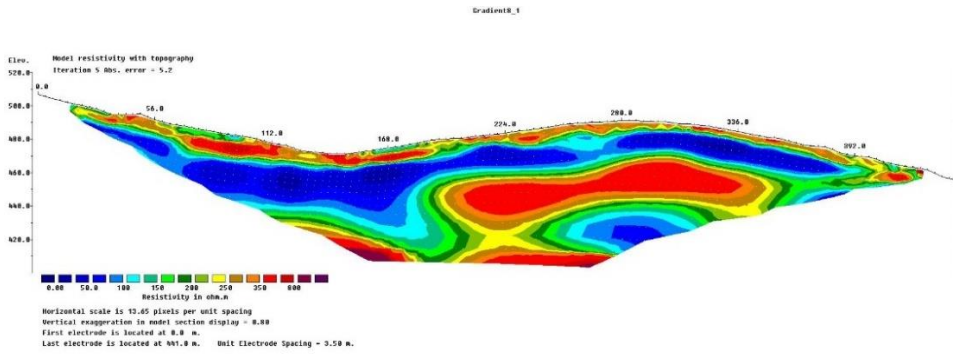
14. Lintasan N11



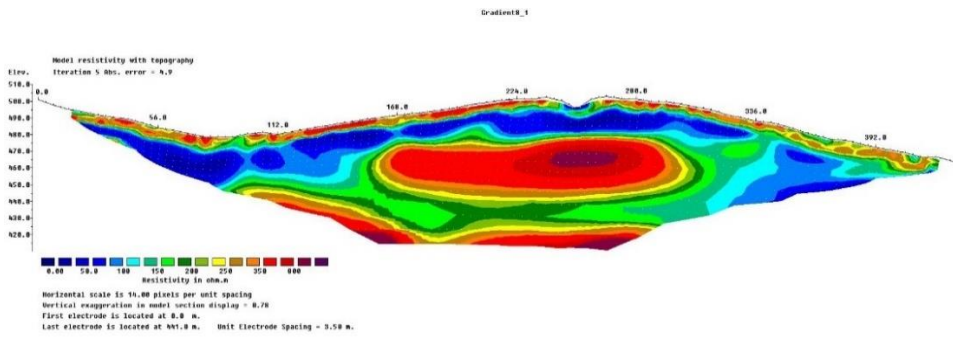
15. Lintasan N12



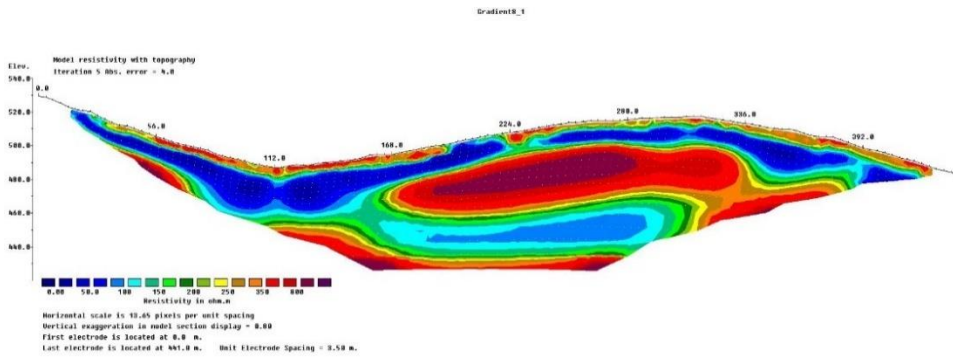
16. Lintasan N13



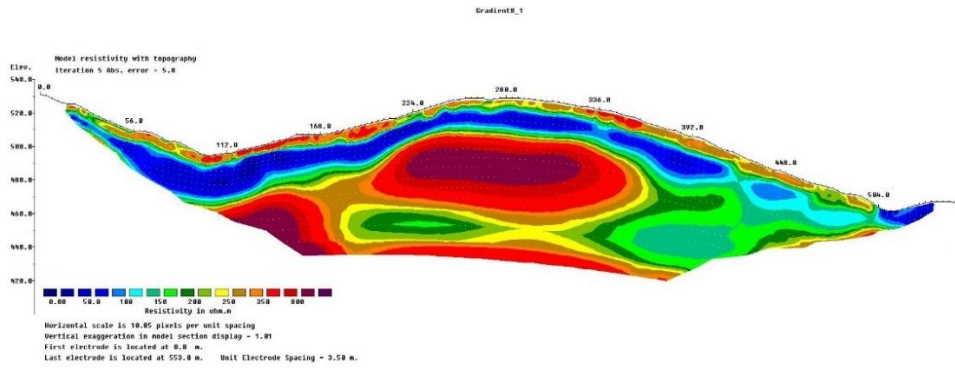
17. Lintasan N14



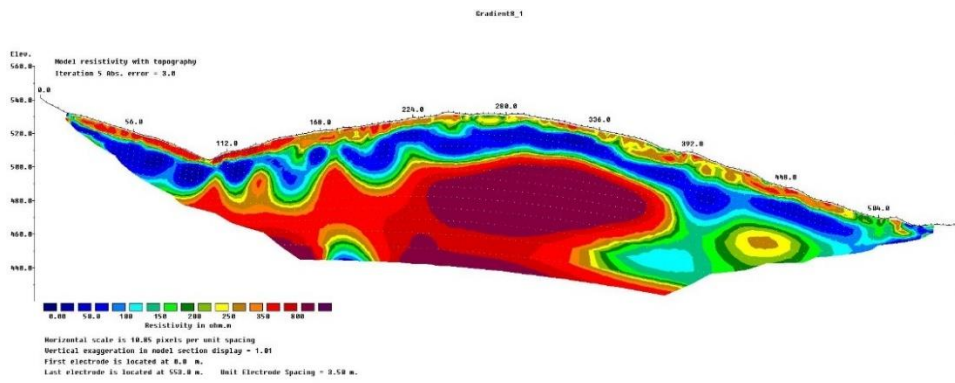
18. Lintasan N15



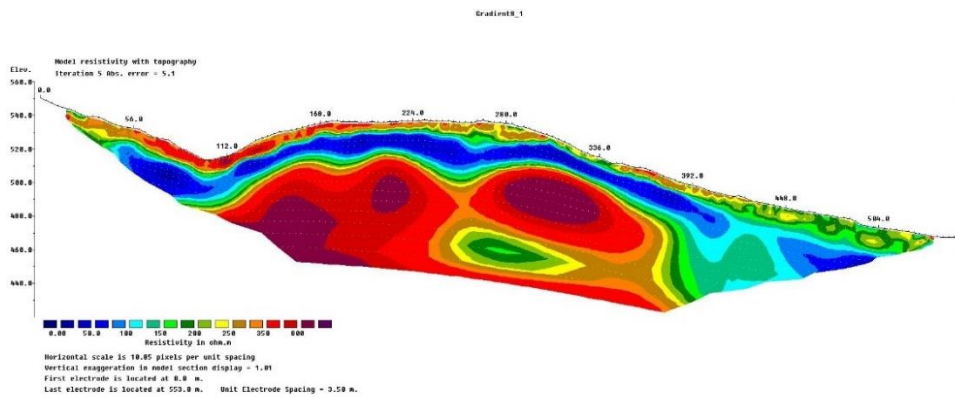
19. Lintasan N16



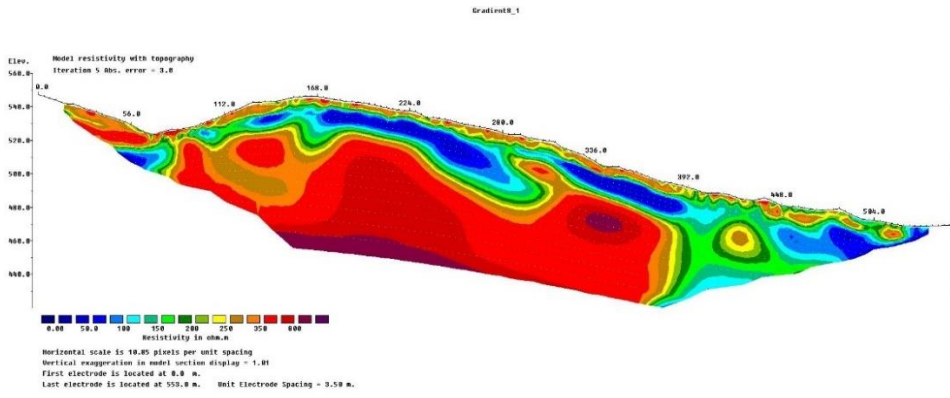
20. Lintasan N17



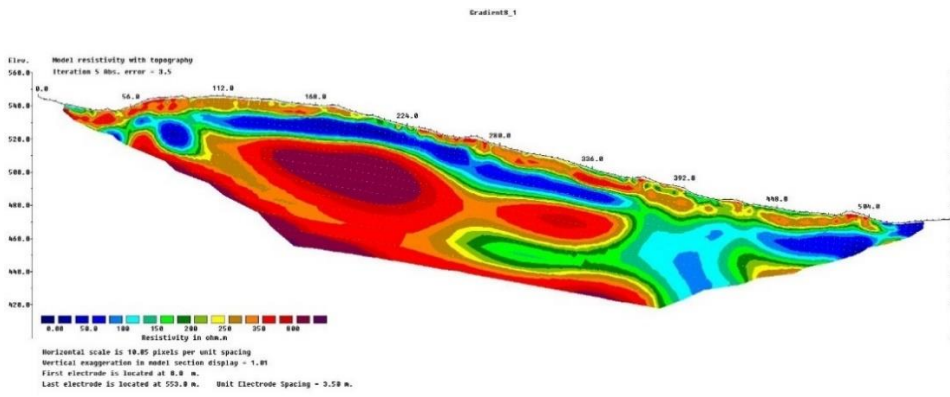
21. Lintasan N18



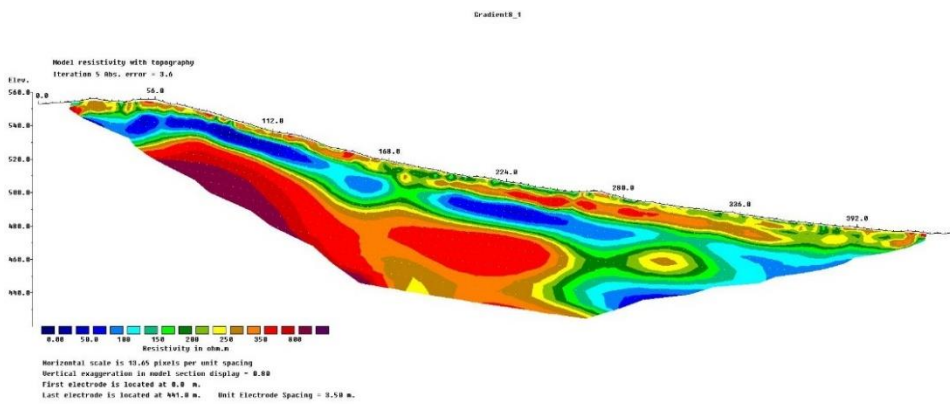
22. Lintasan N19



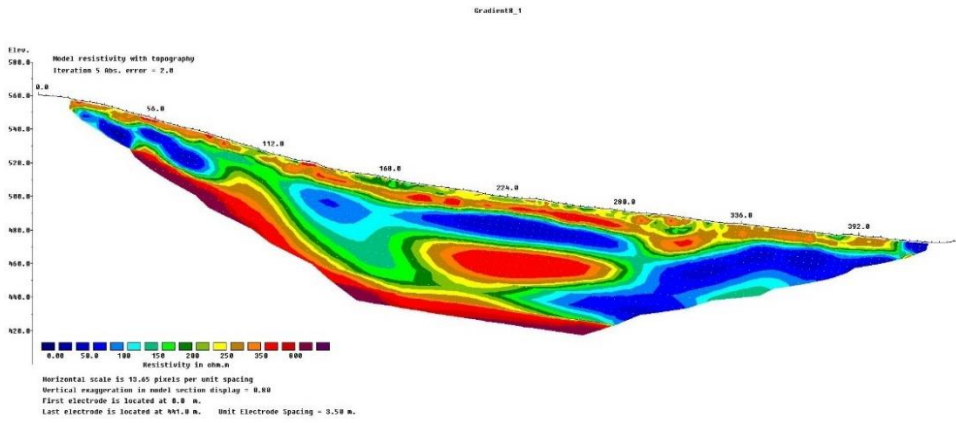
23. Lintasan N20



24. Lintasan N21



25. Lintasan N22



Lampiran 2. Pembuktian Rumus Geolistrik

Potensial akibat arus tunggal di dalam bumi

Ditinjau Laplacian dari koordinat bola (Bumi), dimana bumi dalam keadaan statis, sehingga hanya ditinjau fungsi jari-jari, maka sudut θ dan ϕ diabaikan.

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{d}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$$

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr}$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis seperti dibawah ini

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

Karena $\nabla^2 V = 0$, maka

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

r^2 pindah ke ruas kanan, sehingga:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \cdot r^2$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Kemudian di integralkan

$$\int \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \int 0, \text{ dimana } 0 \text{ adalah konstanta}$$

$$r^2 \frac{dV}{dr} = A \text{ (konstanta)}$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$dV = \frac{A}{r^2} dr$$

Kemudian diintegalkan lagi, sehingga

$$\int dV = \int \frac{A}{r^2} dr$$

$$V = -\frac{A}{r} + B$$

Memasukkan syarat batas $V = 0$ ketika $r = \infty$, menjadi:

$$0 = -\frac{A}{\infty} + B$$

$$0 = 0 + B$$

$$B = 0 \rightarrow \text{ketika syarat batas } V = 0, r = \infty$$

$$V = -\frac{A}{r}$$

Karena yang ditinjau rapat arus (J), diketahui $J = \frac{I}{A}$. dan yang ditinjau adalah bola maka luas permukaan (A) adalah $4\pi r^2$.

$$J = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$J = -\sigma \nabla V$$

$$I = 4\pi r^2 J$$

$$I = 4\pi r^2 (-\sigma \nabla V) \rightarrow \nabla V = \frac{dV}{dr}$$

$$I = -4\pi r^2 \sigma \frac{dV}{dr} \rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$I = -4\pi r^2 \sigma \frac{A}{r^2}$$

$$I = -4\pi \sigma A$$

$$A = -\frac{I}{4\pi \sigma}$$

$$A = -\frac{I}{4\pi \left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

$$A = -\frac{I\rho}{4\pi}$$

$$V = -\frac{1}{r} \left(-\frac{I\rho}{4\pi} \right)$$

$$V = \left(\frac{I\rho}{4\pi} \right) \frac{1}{r}$$

$$\rho = \frac{4\pi r V}{I}$$

Potensial akibat arus tunggal di permukaan bumi

Udara di atas permukaan dianggap ($\sigma = 0$) maka garis equipotensial membentuk setengah bola ($A = 2\pi r^2$).

$$J = \frac{I}{A}$$

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}$$

$$I = 2\pi r^2 J$$

$$I = 2\pi r^2 (-\sigma \nabla V)$$

$$I = 2\pi r^2 \left(-\sigma \frac{dV}{dr} \right)$$

$$I = -2\pi r^2 \sigma \frac{A}{r^2}$$

$$I = -2\pi \sigma A$$

$$A = -\frac{I}{2\pi \sigma}$$

$$A = -\frac{I\rho}{2\pi}$$

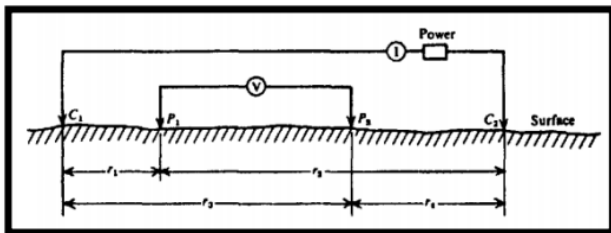
Substitusi nilai $A = -\frac{I\rho}{2\pi}$ ke persamaan $V = -\frac{A}{r}$

$$V = -\frac{1}{r} \left(-\frac{I\rho}{2\pi} \right)$$

$$V = \left(\frac{I\rho}{2\pi} \right) \frac{1}{r}$$

$$\rho = \frac{2\pi r V}{I}$$

Potensial Listrik Yang Dipengaruhi oleh dua elektroda arus listrik



dimana:

$$r_1 = C_1 P_1$$

$$r_2 = C_1 P_2$$

$$r_3 = C_2 P_1$$

$$r_4 = C_2 P_2$$

Karena $V = -\frac{A}{r}$ dimana $A = -\frac{I\rho}{2\pi}$

$$V_1 = -\frac{A_1}{r_1}$$

$$V_1 = -\frac{1}{r_1} \left(-\frac{I\rho}{2\pi} \right)$$

$$V_1 = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} \right)$$

$$V_2 = -\frac{A_2}{r_2}$$

$$V_2 = -\frac{1}{r_2} \left(\frac{I\rho}{2\pi} \right)$$

$$V_2 = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_2} \right)$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} \right) + \left(-\frac{I\rho}{2\pi} \right) \left(\frac{1}{r_2} \right)$$

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$V_t = V_1 + V_2$$

$$V_t = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_3} \right) + \left(-\frac{I\rho}{2\pi} \right) \left(\frac{1}{r_4} \right)$$

$$V_t = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)$$

$$\Delta V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)$$

$$\Delta V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)$$

Lampiran 3. Pemodelan ke depan (*Forward Modelling*)

Pemodelan ke depan adalah proses untuk memprediksi distribusi potensial listrik pada setiap titik dipermukaan tanah, berdasarkan persamaan yang menggambarkan aliran arus listrik melalui tanah dengan distribusi resistivitas yang tidak homogen. Proses ini penting dalam inversi karena diperlukan untuk menghitung nilai resistivitas semu teoritis/kalkulasi. Nilai ini kemudian dibandingkan dengan nilai terukur dari data lapangan untuk mengevaluasi kesesuaian model terhadap kondisi sebenarnya di bawah permukaan. Metode yang sering digunakan dalam pemodelan ke depan adalah metode *Finite Difference* (FD) dan metode *Finite Element* (FE). *Finite Element* membagi domain menjadi elemen-elemen kecil yang lebih fleksibel dalam bentuk seperti *rectangular* atau *triangular*. Setiap elemen memiliki titik-titik simpul (*Nodes*), dimana potensial dihitung dan kemudian di interpolasi di seluruh elemen. Metode FE cocok untuk daerah dengan topografi yang kompleks atau batas yang tidak beraturan (Looke, 2004).

Untuk mendapatkan kesesuaian antara model teoritis (respon model) dan data lapangan, dilakukan proses coba-coba (*trial and error*) dengan cara mengubah nilai parameter modelnya. Istilah "*Forward Modeling*" tidak hanya mencakup perhitungan respon model tetapi juga merupakan proses coba-coba secara manual untuk mendapatkan model yang memberikan respon yang cocok dengan data lapangan. Penggunaan *Forward Modeling* dalam kasus ketika terdapat *noise* yang cukup besar lebih efektif digunakan (Grandis, 2009).

- **Dalam metode geolistrik, penerapan *finite element* dalam mencari potensial arus.**

Ketika ada sumber arus (I) yang mengalir keluar atau masuk, maka untuk menghitung distribusi potensial (V) dengan konduktivitas listrik (σ) tidak homogen, maka digunakan persamaan Poisson.

$$\nabla(\sigma \cdot \nabla V) = I$$

Pada kenyataannya arus dialirkan melalui probe yang terbatas (arus dialirkan melalui suatu alat atau antarmuka fisik dengan ukuran dan bentuk tertentu bukan melalui titik yang benar-benar kecil atau tidak berdimensi). Untuk tujuan pemodelan, arus dianggap berasal dari sumber titik. Oleh karena itu, sumber arus dapat dijelaskan oleh fungsi delta Diract (δ) dan arus titik (I) (Coggon, 1971). Jika A merupakan titik sumber arus, maka:

$$\nabla(\sigma \cdot \nabla V) = I\delta(A)$$

Dimana (σ) merupakan konduktivitas dan ∇V ialah perubahan potensial. Maka dengan menerapkan transformasi Fourier Cosinus akan didapatkan nilai potensialnya.

$$V_{(x,y,k)} = \int_0^{\infty} V_{x,y,z} \text{Cos}(Kz) dz$$

Dengan menggunakan fungsi Bessel dengan pendekatan batas tak hingga, maka variasi potensial listrik pada penampang geolistrik 2D diberikan oleh:

$$F(v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 + \frac{1}{2} \sigma k^2 V^2 - I \delta(A) V \right] d\Omega$$

Daerah domain Ω di diskritisasi menjadi beberapa elemen berbentuk segiempat seperti pada gambar. Jumlah node total adalah n , maka integral domain Ω didekomposisi menjadi integral untuk setiap elemen e (Cai dkk., 2007).

$$F(v) = \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega + \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma k^2 V^2 d\Omega - \sum_{\Omega} \int_e I \delta(A) V d\Omega$$

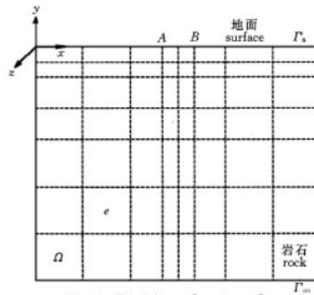


Fig.1 Division of region Ω

Jika persamaan diatas diselesaikan pada setiap suku masing-masing maka;

1. Suku pertama

$$\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega = \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

- Apabila potensial (V) terhadap x diturunkan secara parsial maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} V_i \quad ; n = \text{node} \\ &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right)^T V_e \end{aligned}$$

Dengan $V_e = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T$ dan $\frac{\partial N_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x} \right)^T$, maka

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 = V_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T V_e$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x} \right)^T (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

- Apabila potensial (V) terhadap y diturunkan secara parsial maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} V_i \quad ; n = \text{node} \\ &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \right)^T V_e \end{aligned}$$

Dengan $V_e = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T$ dan $\frac{\partial N_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \frac{\partial N_4}{\partial y}\right)^T$, maka

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = V_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^T V_e$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \frac{\partial N_4}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \frac{\partial N_4}{\partial y}\right)^T (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

Dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan awal pada suku pertama maka;

$$\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega = \int_e \frac{1}{2} \sigma \left[V_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^T V_e + V_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^T V_e \right] dx dy$$

Jika $\sigma \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^T + \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^T$ merupakan matriks maka $[K_{1e}]$

$$\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega = \frac{1}{2} V_e^T [K_{1e}] V_e$$

Dimana

$$\begin{aligned} K_{1e} &= \int_e \sum_{i=1}^4 \sigma \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^T + \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^T \right] dx dy \\ &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma \left[\left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right) \right] d\xi d\eta \right\} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma \left[\left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right) \right] d\xi d\eta \\ K_{1e} &= \sigma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [B] d\xi d\eta \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan matriks $[B]$ atau *shape function* maka terlebih dahulu membuat fungsi uji linear menggunakan persamaan Polinomial Lagrange lalu menurunkan fungsi uji tersebut terhadap arah ξ dan η .

Langkah-langkah dalam menyelesaikan pemodelan ke depan menggunakan *finite element* adalah melakukan diskritisasi atau *meshing*, dalam satu domain dibagi menjadi beberapa elemen. Kemudian mencari pola dan bentuk distribusi menggunakan polinomial atau perpindahan dan turunannya pada setiap *mesh* untuk melihat perpindahan dari arah x dan y. Desain mesh yang digunakan untuk komputasi sangatlah penting. Jumlah node menentukan tingkat resolusi spasial, karena itu pemilihan node memiliki dampak yang signifikan terhadap akurasi.

Arah koordinat horizontal diwakili oleh $\xi(xi)$ dan arah koordinat vertikal diwakili oleh $\eta(eta)$. Setiap node memiliki 2 DOF (*Degree of freedom*/derajat kebebasan) yaitu

node dapat mengalami perpindahan ke arah x atau vertikal yang dinyatakan dalam (u) dan perpindahan ke arah y atau horizontal dinyatakan dalam (v) seperti pada gambar. Dalam pendekatan linear 2D untuk perpindahan node (u dan v) dan *shape function* (N) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ a_4 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

a. *Shape function* (Fungsi Bentuk)

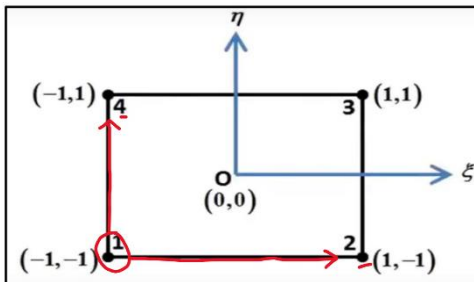
Setiap node memiliki fungsi bentuk yang berbeda-beda, sehingga pada elemen dengan 4 node akan diperoleh 4 *shape function* juga. Untuk menghitung *shape function* setiap node dapat digunakan polinomial Lagrange 2D (Xiong, 2022):

$$N_k = \frac{\xi - \xi_m}{\xi_k - \xi_m} x \frac{\eta - \eta_m}{\eta_k - \eta_m}$$

Dengan k adalah titik node, dan m adalah titik node yang terhubung dengan node yang dicari.

- **Shape function Node 1**

Pada node 1 memiliki DOF ke arah x menuju node 2 dan ke arah y menuju node 4



$$N_1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} x \frac{\eta - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4}$$

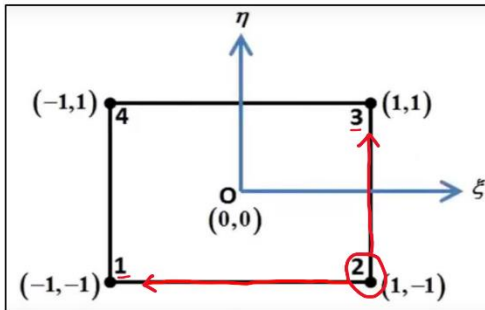
$$N_1 = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} x \frac{\eta - 1}{-1 - 1}$$

$$N_1 = \frac{-(1 - \xi)}{-2} x \frac{-(1 - \eta)}{-2}$$

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}$$

- **Shape function Node 2**

Pada node 2 memiliki DOF ke arah x menuju node 1 dan ke arah y menuju node 3



$$N_2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} x \frac{\eta - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3}$$

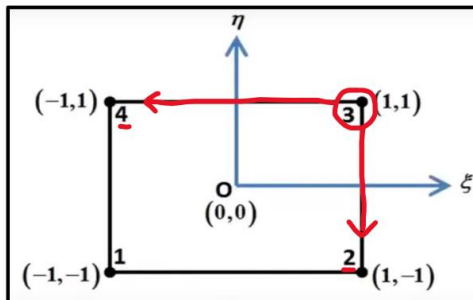
$$N_2 = \frac{\xi - (-1)}{-1 - (-1)} x \frac{\eta - 1}{-1 - 1}$$

$$N_2 = \frac{(1 + \xi)}{2} x \frac{-(1 - \eta)}{-2}$$

$$N_2 = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

- **Shape function Node 3**

Pada node 3 memiliki DOF ke arah x menuju node 4 dan ke arah y menuju node 2



$$N_3 = \frac{(\xi - \xi_4)(\eta - \eta_2)}{(\xi_3 - \xi_4)(\eta_3 - \eta_2)}$$

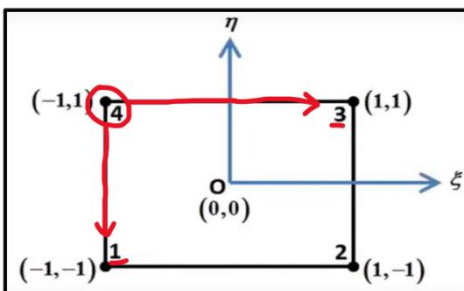
$$N_3 = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} x \frac{\eta - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$N_3 = \frac{(1 + \xi)}{2} x \frac{(1 + \eta)}{2}$$

$$N_3 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

- **Shape function Node 4**

Pada node 4 memiliki DOF ke arah x menuju node 3 dan ke arah y menuju node 1



$$N_4 = \frac{(\xi - \xi_3)(\eta - \eta_1)}{(\xi_4 - \xi_3)(\eta_4 - \eta_1)}$$

$$N_4 = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} x \frac{\eta - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$N_4 = \frac{(1 + \xi)}{2} x \frac{(1 + \eta)}{2}$$

$$N_4 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks maka *shape function* pada setiap nodenya yaitu

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Dari *shape function* dapat dihitung matriks $[B]$ dengan mensubstitusi *shape function* setiap node.

1. Dalam arah horizontal (ξ)

- Untuk N_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= \frac{\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1-\eta-\xi+\xi\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{4}(0-0-1+\eta) \\ &= \frac{1}{4}(-1+\eta) \end{aligned}$$

- Untuk N_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1-\eta+\xi-\xi\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{4}(0-0+1-\eta) \\ &= \frac{1}{4}(1-\eta) \end{aligned}$$

- Untuk N_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1+\eta+\xi+\xi\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{4}(0+0+1+\eta) \\ &= \frac{1}{4}(1+\eta) \end{aligned}$$

- Untuk N_4

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= \frac{\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1+\eta-\xi-\xi\eta)}{\partial \xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4}(0 + 0 - 1 - \eta) \\
 &= \frac{1}{4}(-1 - \eta)
 \end{aligned}$$

2. Dalam arah vertikal (η)

- Untuk N_1

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)}{\partial \eta} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \eta - \xi + \xi\eta)}{\partial \eta} \\
 &= \frac{1}{4}(0 - 1 - 0 + \xi) \\
 &= \frac{1}{4}(-1 + \xi)
 \end{aligned}$$

- Untuk N_2

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)}{\partial \eta} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \eta + \xi - \xi\eta)}{\partial \eta} \\
 &= \frac{1}{4}(0 - 1 + 0 - \xi) \\
 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi)
 \end{aligned}$$

- Untuk N_3

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)}{\partial \eta} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta + \xi + \xi\eta)}{\partial \eta} \\
 &= \frac{1}{4}(0 + 1 + 0 + \xi) \\
 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)
 \end{aligned}$$

- Untuk N_4

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)}{\partial \eta} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta - \xi - \xi\eta)}{\partial \eta} \\
 &= \frac{1}{4}(0 + 1 - 0 - \xi)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \xi)$$

Substitusi ke dalam matriks $[B]$, sehingga diperoleh matriks $[B]$ sebagai berikut:

$$[B] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 & (1 - \eta) & 0 & (1 + \eta) & 0 & (-1 - \eta) & 0 \\ 0 & (-1 + \xi) & 0 & (-1 - \xi) & 0 & (1 + \xi) & 0 & (1 - \xi) \\ (-1 + \xi) & (-1 + \eta) & (-1 - \xi) & (1 - \eta) & (1 + \xi) & (1 + \eta) & (1 - \xi) & (-1 - \eta) \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks $[B]^T$ ditranspose kan, sehingga diperoleh:

$$[B]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 & (-1 + \xi) \\ 0 & (-1 + \xi) & (-1 + \eta) \\ (1 - \eta) & 0 & (-1 - \xi) \\ 0 & (-1 - \xi) & (1 - \eta) \\ (1 + \eta) & 0 & (1 + \xi) \\ 0 & (1 + \xi) & (1 + \eta) \\ (-1 - \eta) & 0 & (1 - \xi) \\ 0 & (1 - \xi) & (-1 - \eta) \end{bmatrix}$$

$$[C]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1 + \xi) \\ (-1 + \eta) \\ (-1 - \xi) \\ (1 - \eta) \\ (1 + \xi) \\ (1 + \eta) \\ (1 - \xi) \\ (-1 - \eta) \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan, maka didapatkan matriks K_{1e} .

$$K_{1e} = \sigma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [B] d\xi d\eta$$

$$K_{1e} = \sigma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 \\ 0 & (-1 + \xi) \\ (1 - \eta) & 0 \\ (1 + \eta) & 0 \\ 0 & (1 + \xi) \\ (-1 - \eta) & 0 \\ 0 & (1 - \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 & (1 - \eta) & 0 & (1 + \eta) & 0 & (-1 - \eta) & 0 \\ 0 & (-1 + \xi) & 0 & (-1 - \xi) & 0 & (1 + \xi) & 0 & (1 - \xi) \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

Nilai konduktivitas dalam persamaan didapatkan dari nilai konduktivitas titik datum untuk mendapatkan nilai pada setiap node nya. Jika mensubstitusikan semua persamaan ke dalam persamaan di suku pertama, maka akan menjadi :

$$\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega = \frac{1}{2} V_e^T \left(\int_{-x}^x \int_{-y}^y \sigma \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta \right) V_e$$

Perkalian matriks suku pertama ini akan menghasilkan matriks 8x8 yang mewakili luasan area elemen

	u ₁	v ₁	u ₂	v ₂	u ₃	v ₃	u ₄	v ₄	
[K _{1e}]	k ₁₁	k ₁₂	k ₁₃	k ₁₄	k ₁₅	k ₁₆	k ₁₇	k ₁₈	u ₁
	k ₂₁	k ₂₂	k ₂₃	k ₂₄	k ₂₅	k ₂₆	k ₂₇	k ₂₈	v ₁
	k ₃₁	k ₃₂	k ₃₃	k ₃₄	k ₃₅	k ₃₆	k ₃₇	k ₃₈	u ₂
	k ₄₁	k ₄₂	k ₄₃	k ₄₄	k ₄₅	k ₄₆	k ₄₇	k ₄₈	v ₂
	k ₅₁	k ₅₂	k ₅₃	k ₅₄	k ₅₅	k ₅₆	k ₅₇	k ₅₈	u ₃
	k ₆₁	k ₆₂	k ₆₃	k ₆₄	k ₆₅	k ₆₆	k ₆₇	k ₆₈	v ₃
	k ₇₁	k ₇₂	k ₇₃	k ₇₄	k ₇₅	k ₇₆	k ₇₇	k ₇₈	u ₄
	k ₈₁	k ₈₂	k ₈₃	k ₈₄	k ₈₅	k ₈₆	k ₈₇	k ₈₈	v ₄

2. Suku kedua

$$\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma k^2 V^2 d\Omega = \frac{1}{2} V_e^T \left\{ \int_e \sum_{j=1}^4 N_j \sigma_j (k^2 N^T N) dx dy \right\} V_e = \frac{1}{2} V_e^T K_{e2} V_e$$

$$K_{e2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (-1+\xi) \\ (-1+\eta) \\ (-1-\xi) \\ (1-\eta) \\ (1+\xi) \\ (1+\eta) \\ (1-\xi) \\ (-1-\eta) \end{bmatrix} [(-1+\xi) \quad (-1+\eta) \quad (-1-\xi) \quad (1-\eta) \quad (1+\xi) \quad (1+\eta) \quad (1-\xi) \quad (-1-\eta)] d\xi d\eta$$

$$K_{e2} = \int_e \sum_{j=1}^4 N_j \sigma_j (k^2 N^T N) dx dy$$

$$K_{e2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [C]^T [C] d\xi d\eta$$

Perkalian matriks suku kedua akan menghasilkan matriks 8x8 yang mewakili luasan area elemen

	u ₁	v ₁	u ₂	v ₂	u ₃	v ₃	u ₄	v ₄	
[K _{2e}]	k ₁₁	k ₁₂	k ₁₃	k ₁₄	k ₁₅	k ₁₆	k ₁₇	k ₁₈	u ₁
	k ₂₁	k ₂₂	k ₂₃	k ₂₄	k ₂₅	k ₂₆	k ₂₇	k ₂₈	v ₁
	k ₃₁	k ₃₂	k ₃₃	k ₃₄	k ₃₅	k ₃₆	k ₃₇	k ₃₈	u ₂
	k ₄₁	k ₄₂	k ₄₃	k ₄₄	k ₄₅	k ₄₆	k ₄₇	k ₄₈	v ₂
	k ₅₁	k ₅₂	k ₅₃	k ₅₄	k ₅₅	k ₅₆	k ₅₇	k ₅₈	u ₃
	k ₆₁	k ₆₂	k ₆₃	k ₆₄	k ₆₅	k ₆₆	k ₆₇	k ₆₈	v ₃
	k ₇₁	k ₇₂	k ₇₃	k ₇₄	k ₇₅	k ₇₆	k ₇₇	k ₇₈	u ₄
	k ₈₁	k ₈₂	k ₈₃	k ₈₄	k ₈₅	k ₈₆	k ₈₇	k ₈₈	v ₄

3. Suku ketiga

$$\sum_{\Omega} \int_e I \delta(A) V d\Omega = \frac{1}{2} I V_A = V^T P$$

Pada persamaan ini dapat menghitung kontribusi batas antar elemen lainnya ketika medan listriknya mengalami perubahan secara signifikan. Pada persamaan ini pula diterapkan kondisi batas (*boundary condition*).

Setelah didapatkan persamaan di setiap suku maka disubstitusikan ke dalam persamaan 4. dengan $F(V) = 0$, maka

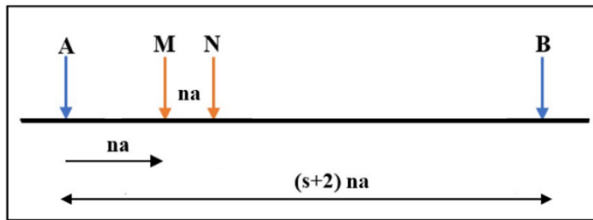
$$\begin{aligned} F(V) &= \frac{1}{2} V_e^t K_{1e} V_e + \frac{1}{2} V_e^t K_{2e} V_e - V^T P \\ &= V^T K V - V^T P \\ &= KV - P \end{aligned}$$

Dengan K adalah matriks ordo 8x8 yang merupakan penjumlahan dari $(K_{1e} + K_{2e})$, V adalah vektor kolom yang merupakan potensial listrik dari semua titik elemen dalam domain *wave number*. Dengan $F(V) = 0$, maka

$$\begin{aligned} KV &= P \\ V &= K^{-1}P \\ \{V\} &= [K_{1e} + K_{2e}]^{-1} \{P\} \\ \{V\} &= \left[\left(\sigma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [B] d\xi d\eta \right) + \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [C]^T [C] d\xi d\eta \right) \right]^{-1} \{P\} \end{aligned}$$

Persamaan linear ($KV = P$) diselesaikan untuk memperoleh potensial listrik (V) dari setiap elemen dalam domain.

Lampiran 4. Faktor Geometri Konfigurasi Gradient



$$\begin{aligned} r_1 &= AM = na \\ r_2 &= MB = (s+1)na \\ r_3 &= AN = 2na \\ r_4 &= NB = sna \end{aligned}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{1}{na} - \frac{1}{(s+1)na} \right) - \left(\frac{1}{2na} - \frac{1}{sna} \right) \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{s}{(s+1)na} \right) - \left(\frac{s-2}{2sna} \right) \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{2s^2}{2(s+1)sna} \right) - \left(\frac{s^2 - 2 + s - 2}{2(s+1)sna} \right) \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\frac{2s^2 - (s^2 + s - 2)}{2(s+1)sna} \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\frac{s^2 + s - 2}{2(s+1)sna} \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \frac{2(s+1)sna}{s^2 + s - 2}$$

$$K = \frac{4\pi(s+1)sna}{s^2 + s - 2}$$