KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI LEMAH PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KEMOSTAT

$$\frac{\partial s}{\partial t} = K\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{ms}{a+s}u,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{ms}{a+s}u,$$

ADELINE MANGETAN

H011201059

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI LEMAH PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KEMOSTAT

ADELINE MANGETAN

H011201059

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI LEMAH PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KEMOSTAT

ADELINE MANGETAN

H011201059

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

SKRIPSI

KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI LEMAH PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KEMOSTAT

ADELINE MANGETAN

H011201059

Skripsi

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Sains pada 20 Agustus 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:
Pembimbing tugas akhir,

Naimah Aris, S.Si., M.Math.
NIP. 197110031997022001

Mengetahui:
Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si, M.Si.
NIP. 196804292002121001

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Lemah pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Kemostat" adalah benar karya saya dengan arahan dari Ibu Naimah Aris, S.Si., M.Math. sebagai Pembimbing Utama dan Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pertama. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 20 Agustus 2024

Adeline Mangetan
NIM. H011201059

UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji dan syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat, rahmat, dan penyertaan-Nya yang telah memungkinkan saya menyelesaikan skripsi ini. Skripsi berjudul 'Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Lemah pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Kemostat' ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Saya sepenuhnya menyadari bahwa skripsi ini tidak akan dapat diselesaikan tanpa bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi, dan nasihat dari banyak pihak. Dengan penuh rasa syukur, saya ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Ibu Naimah Aris, S.Si., M.Math., selaku Pembimbing Utama, dan Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Pertama, atas dukungan, arahan, serta kesabaran yang telah diberikan selama proses ini. Bimbingan mereka sangat berharga dan memberikan banyak pelajaran yang tak ternilai.

Saya juga ingin menyampaikan terima kasih yang mendalam kepada Ayahanda Luter Mangetan dan Ibunda Yustina Sapan Panggoa yang selalu memberikan dukungan tanpa henti, baik dalam bentuk doa, dukungan moral, material, maupun semangat. Ucapan terima kasih yang tulus saya sampaikan pula kepada saudara-saudara dan seluruh keluarga besar yang senantiasa memberikan dukungan dan kasih sayang sepanjang perjalanan studi ini. Tak lupa, saya berterima kasih kepada sahabat-sahabat saya, Alifia, Wardah, dan Ika, yang selalu menjadi teman setia dalam suka dan duka selama masa studi ini. Akhirnya, kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan, meskipun tidak dapat saya sebutkan satu per satu, saya haturkan terima kasih yang tulus.

Penulis,

Adeline Mangetan

ABSTRAK

ADELINE MANGETAN. **Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Lemah pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Kemostat** (dibimbing oleh Naimah Aris dan Muh. Nur).

Latar Belakang. Model ini menggunakan sistem persamaan diferensial parsial kemostat untuk menggambarkan dinamika perilaku mikroorganisme dan lingkungannya. **Tujuan**. Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan keberadaan dan membuktikan ketunggalan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat. **Metode**. Penelitian dimulai dengan mengonstruksikan formulasi lemah. Selanjutnya, metode Galerkin digunakan untuk menunjukkan bahwa solusi pendekatan pada subruang berhingga memiliki turunan yang terbatas secara seragam pada ruang L^2 dan menunjukkan kekonvergenan solusi pendekatan tersebut. **Hasil**. Terbukti bahwa keberadaan solusi pendekatan pada subruang berhingga memiliki turunan yang terbatas seragam pada ruang L^2. Akibatnya, terdapat sub barisan dari solusi pendekatan yang konvergen ke suatu solusi lemah pada ruang L^2. Ketunggalan solusi lemah diperoleh dengan menunjukkan dua solusi tersebut adalah sama. **Kesimpulan**. Dengan demikian, keberadaan dan ketunggalan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat dapat dipastikan.

Kata kunci: kemostat, keberadaan, ketunggalan, solusi lemah, metode galerkin.

ABSTRACT

ADELINE MANGETAN. **The Existence and Uniqueness of Weak Solutions in the Chemostat Partial Differential Equation System** (supervised by Naimah Aris and Muh. Nur).

Background. This model uses the chemostat partial differential equation system to describe the dynamics of microorganism behavior and their environment. **Objective**. This study aims to demonstrate the existence and prove the uniqueness of weak solutions in the chemostat partial differential equation system. **Method**. The research begins by constructing the weak formulation. Next, the Galerkin method is used to show that the approximate solutions in a finite-dimensional subspace have uniformly bounded derivatives in the L^2 space and to demonstrate the convergence of these approximate solutions. **Results**. It has been proven that the existence of approximate solutions in the finite-dimensional subspace has uniformly bounded derivatives in the L^2 space. Consequently, there exists a subsequence of the approximate solutions that converges to a weak solution in the L^2 space. The uniqueness of the weak solution is obtained by showing that the two solutions are identical. **Conclusion**. Therefore, the existence and uniqueness of weak solutions in the chemostat partial differential equation system can be assured.

Keywords: chemostat, existence, uniqueness, weak solution, Galerkin method.

DAFTAR ISI

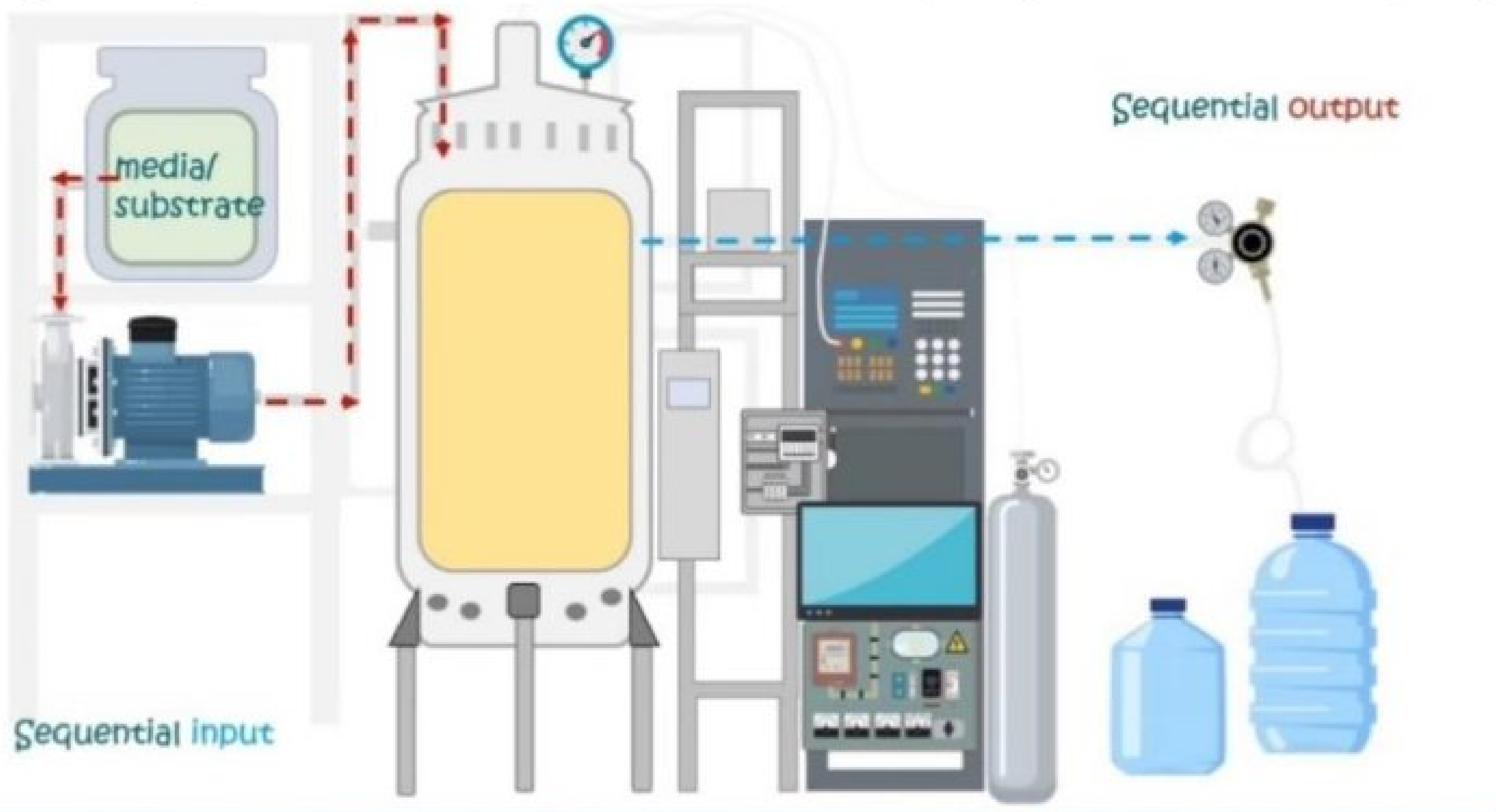
Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Di ranah ilmu pengetahuan, terdapat berbagai cabang sains, salah satunya adalah biologi. Cabang ilmu ini mempelajari bagaimana makhluk hidup berinteraksi dengan lingkungannya, termasuk alat seperti kemostat. Kemostat digunakan untuk mengamati perkembangan mikroorganisme di lingkungannya. Alat ini dapat dikontrol untuk memastikan bahwa mikroorganisme tumbuh dengan laju yang stabil. Ketika proses pertumbuhan mikroorganisme, pengeluaran limbah, dan pemberian serta penyerapan substrat saling seimbang, kemostat mencapai keadaan *steady-state*. (Panikov, 2011)

Alat ini terdiri dari tiga medium yang saling terhubung, yaitu medium substrat, medium kultur, dan medium pengumpul. Proses dimulai dengan memompa substrat ke dalam medium kultur, tempat dimana mikroorganisme tumbuh dan berkembang. Ketersediaan substrat mempengaruhi pertumbuhan mikroorganisme, sehingga pertumbuhan akan berhenti ketika substrat tersebut habis. Untuk menjaga volume medium kultur tetap konstan atau memastikan bahwa pertumbuhan populasi mikroorganisme tetap stabil dan tidak mengalami fluktuasi yang tidak diinginkan, maka aliran medium kultur dipompa ke medium pengumpul.



Gambar 1. Alat Kemostat. (Harmand, 2017)

Masalah sistem kemostat ini telah dikaji oleh banyak ahli. Mereka berupaya mengembangkan model matematika yang menggambarkan dinamika pertumbuhan mikroorganisme di kemostat dalam bentuk persamaan diferensial biasa. Dalam kemostat, konsentrasi substrat dan populasi mikroorganisme akan berubah seiring waktu. Laju perubahan konsentrasi nutrisi dipengaruhi oleh beberapa faktor, seperti laju aliran masukan substrat, laju konsumsi oleh mikroorganisme, dan laju pengeluaran. Demikian juga, populasi mikroorganisme tumbuh dengan laju tertentu yang dipengaruhi oleh konsentrasi nutrisi. (Harmand, 2017)

Secara umum, peneliti mengkaji kemostat dalam bentuk persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial orde fraksional serta menentukan solusinya menggunakan metode numerik. Seperti pada paper Zeinadini (2017) yang mengkaji solusi numerik untuk persamaan diferensial orde fraksional model kemostat tiga dimensi dengan mengggunakan *Nonstandard Finite Difference* (NSFD) dan metode *Runge-Kutta* orde empat.

Beberapa penelitian telah mengembangkan model kemostat dalam bentuk persamaan diferensial biasa dengan berbagai asumsi. Misalnya dalam paper Zhu et al. (2023) yang membangun model kemostat dalam bentuk persamaan diferensial biasa dan fraksional yang mempertimbangkan penghambatan pertumbuhan mikroba pada konsentrasi substrat yang tinggi. Sementara itu, Caraballo et al. (2021) mengusulkan model kemostat yang lebih realistis dengan memperhitungkan pertumbuhan mikroorganisme lain pada dinding medium kultur.

Paper-paper tersebut mengkaji kemostat berdasarkan model klasik Monod dengan kondisi *well-stirred chemostat*, yaitu cairan nutrisi diaduk secara merata untuk menciptakan lingkungan homogen di seluruh sistem. Namun, model tersebut pada perkembangannya tidak natural karena tidak sesuai dengan kondisi di alam. Oleh karena itu, pada paper Nie et al. (2015) memodelkan sistem yang lebih realistis menggunakan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) dengan asumsi *unstirred chemostat* yaitu kondisi di mana cairan nutrisi tidak diaduk secara merata sehingga terjadi perbedaan nutrisi di dalam medium. Hal ini memungkinkan terjadinya kompetisi antarmikroorganisme dikarenakan tercipta lingkungan yang lebih kompleks.

Berdasarkan penelitian laboratorium tersebut, maka pada penelitian ini akan diteliti model sistem PDP dengan kondisi *unstirred chemostat*. Model ini akan berbentuk sistem PDP Parabolik nonlinier karena perubahan laju pertumbuhan mikroorganisme dipengaruhi oleh waktu dan konsentrasi substrat yang bervariasi di setiap area dalam kemostat, serta adanya proses difusi yang terjadi di dalamnya.

Berbagai fenomena alam dibentuk dalam model matematika yang berbentuk PDP. Namun, tidak semua PDP memiliki solusi klasik. Solusi klasik yang dimaksud adalah solusi yang *smooth* di mana solusinya memiliki turunan dan memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu, dilakukan perluasan ruang solusi dengan menggunakan konsep solusi lemah. (Chen, 2021)

Matematikawan L. Schwartz mengembangkan konsep solusi lemah pada pertengahan abad ke-20 untuk menyelesaikan model fenomena fisik yang lebih kompleks. Dengan pendekatan ini, solusi lemah memfasilitasi pemodelan yang lebih fleksibel dan memungkinkan untuk memecahkan masalah yang sulit. Konsep ini tidak hanya relevan dalam matematika murni, tetapi juga memiliki aplikasi luas dalam fisika matematis, mekanika fluida, dan berbagai bidang ilmu terapan lainnya di mana kompleksitas dan nonlinieritas sering kali menjadi tantangan utama. (Schwartz, 1950)

Masalah keberadaan dan ketunggalan solusi lemah untuk persamaan diferensial lainnya telah banyak diteliti, diantaranya paper yang berikan oleh Manimaran et al. (2023) yang membahas sistem persamaan diferensial parsial tiga spesies yang menggambarkan interaksi antara spesies dalam dinamika populasi biologis. Dalam penelitian tersebut, penulis menunjukkan keberadaan solusi lemah dengan menggunakan metode Faedo-Galerkin dan beberapa argumen kekompakan dengan kondisi batas Dirichlet. Penelitian lain oleh Slimani et al. (2021) berfokus pada model Keller-Segel yang dikaitkan dengan persamaan Boussinesq, yang menggambarkan pergerakan fluida dan proses biologis di mana pergerakan sel dipengaruhi oleh konsentrasi zat kimia di sekitarnya. Dalam paper ini, penulis membuktikan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah menggunakan metode Galerkin. Sementara itu, pada penelitian oleh Bennoui et al. (2023) menggunakan metode yang berbeda yaitu semigrup kompak dan estimasi dengan beberapa asumsi untuk menentukan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah pada sistem reaksi-difusi parabolik.

Keberadaan dan ketunggalan solusi lemah dari model sistem PDP dengan kondisi *unstirred chemostat* akan dikaji sama seperti yang diberikan pada Hunter (2014) menggunakan metode Galekin. Metode Galerkin mengubah masalah matematis yang rumit menjadi bentuk yang lebih sederhana melalui formulasi lemah, sehingga dapat menyelesaikan masalah yang sulit dipecahkan, seperti persamaan nonlinier (Strang & Fix, 1973). Selain itu masih sedikit penelitian yang membahas solusi lemah pada model yang berbentuk sistem PDP. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dikaji keberadaan dan ketunggalan solusi lemah pada salah satu sistem PDP kemostat dan menuangkannya dalam bentuk skripsi berjudul,

“Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Lemah pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Kemostat”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka diperoleh rumusan masalah yang akan dikaji pada penelitian ini yaitu:

1) Bagaimana menunjukkan keberadaan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat dengan menggunakan metode Galerkin?
2) Bagaimana membuktikan ketunggalan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1) Menunjukkan keberadaan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat dengan menggunakan metode Galerkin.
2) Membuktikan ketunggalan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat.

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1) Pada penelitian ini, peneliti membatasi keberadaan dan ketunggalan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat dengan ruang solusi hanya pada ruang L^2.
2) Pada penelitian ini, peneliti menggunakan sistem persamaan diferensial parsial dengan kondisi *unstrirred chemostat.*
3) Pada penelitian ini, peneliti menggunakan metode Galerkin untuk menunjukkan keberadaan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1) Meningkatkan pengetahuan dan pengembangan keilmuan dalam bidang ilmu matematika, khususnya dalam bidang analisis.
2) Sebagai sarana penulis dalam memperluas ilmu yang selama ini menjadi bidang ilmu yang dipelajari.
3) Sebagai rujukan bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari empat bagian. Masing-masing bagian dibagi ke dalam subbab dengan rincian sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan, yang memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penelitian, sistematika penulisan, dan landasan teori.

Bab II Metode Penelitian memuat tempat dan waktu penelitian, jenis dan tahapan penelitian, serta alur kerja dalam melakukan penelitian.

Bab III Hasil dan Pembahasan. Dalam bab ini akan disajikan hasil dan pembahasan dari tugas akhir ini yaitu menunjukkan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah pada sistem persamaan diferensial parsial kemostat.

Bab IV Kesimpulan. Dalam bab ini memuat kesimpulan hasil penelitian.

1.7 Landasan Teori

1.7.1 Ruang Vektor

Definisi 1.1 *Misalkan X adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Jika X memenuhi sifat-sifat berikut dengan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka X dikatakan ruang vektor Riil.*

1) *Berlaku $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha\boldsymbol{x} \in X$ (tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar).*
2) *Berlaku $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.*
3) *Berlaku $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.*
4) *Terdapat vektor $\boldsymbol{0} \in X$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$.*
5) *Terdapat $-\boldsymbol{x} \in X$ sedemikian sehingga $(-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.*

6) *Berlaku* $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.
7) *Berlaku* $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$.
8) *Berlaku* $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.
9) *Untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$ *berlaku* $\mathbf{1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(Kreyszig, 1989)

Berikut merupakan salah satu contoh pada ruang vektor yaitu ruang $L^2(\Omega)$.

Definisi 1.2 *Diberikan* $\Omega \subset \mathbb{R}$. *Untuk* $p = 2$, *ruang* $L^2(\Omega)$ *didefinisikan sebagai himpunan* $L^2(\Omega) = \left\{ f \mid f: \Omega \to \mathbb{R}\ dengan\ f\ terukur\ dan\ \int_\Omega f(x)^2\, dx < \infty \right\}$.

(Kreyszig, 1989)

Contoh 1.1 Ruang $L^2(\Omega)$ merupakan ruang vektor.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa ruang $L^2(\Omega)$ memenuhi sifat-sifat yang berlaku pada ruang vektor, yaitu:

1) Akan ditunjukkan bahwa $(f+g) \in L^2(\Omega)$ dan $(\alpha f) \in L^2(\Omega)$.
   Pertama, ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$. Akibatnya,
   $$\int_\Omega f(x)^2 dx < \infty \text{ dan } \int_\Omega g(x)^2 dx < \infty.$$
   Perhatikan bahwa,
   $$\begin{aligned} |f(x)+g(x)| &\le |f(x)| + |g(x)| \\ &\le 2max\{|f(x)|, |g(x)|\}. \end{aligned}$$
   Oleh karena itu,
   $$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^2 &\le (2\, max\{|f(x)|, |g(x)|\})^2 \\ &= 2^2\, max\{|f(x)|^2, |g(x)|^2\} \\ &\le 2^2(f(x)^2 + g(x)^2). \qquad (1) \end{aligned}$$
   Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (1) dan sifat integral, diperoleh
   $$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^2\, dx \le 2^2 \left(\int_\Omega f(x)^2\, dx + \int_\Omega g(x)^2\, dx \right).$$
   Karena $\int_\Omega f(x)^2 dx < \infty$ dan $\int_\Omega g(x)^2 dx < \infty$, maka
   $$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^2\, dx < \infty.$$
   Jadi terbukti bahwa $(f+g) \in L^2(\Omega)$.
   Kedua, ambil sebarang $(\alpha f) \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Akibatnya,
   $$\int_\Omega |\alpha f(x)|^2 dx < \infty.$$
   Perhatikan bahwa,
   $$|\alpha f(x)|^2 = \alpha^2 f(x)^2. \qquad (2)$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (2) dan sifat integral, diperoleh

$$\int_{\Omega} |\alpha f(x)|^2 dx = \alpha^2 \int_{\Omega} f(x)^2 dx.$$

Karena $\alpha^2 \int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty$, maka $\int_{\Omega} |\alpha f(x)|^2 dx < \infty$.

Jadi terbukti bahwa $(\alpha f) \in L^2(\Omega)$.

2) Akan ditunjukkan bahwa $f + g = g + f$.

Ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$, maka

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x)^2\, dx + \int_{\Omega} g(x)^2\, dx &= \int_{\Omega} (f(x)^2 + g(x)^2)\, dx \\ &= \int_{\Omega} (g(x)^2 + f(x)^2)\, dx \\ &= \int_{\Omega} g(x)^2\, dx + \int_{\Omega} f(x)^2\, dx .\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $f + g = g + f$.

3) Akan ditunjukkan bahwa $f + (g + h) = (f + g) + h$.

Ambil sebarang $f, g, h \in L^2(\Omega)$, maka

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} f(x)^2\, dx + \left(\int_{\Omega} g(x)^2\, dx + \int_{\Omega} h(x)^2\, dx\right) \\ &= \int_{\Omega} f(x)^2\, dx + \int_{\Omega} (g(x)^2 + h(x)^2) dx \\ &= \int_{\Omega} \big((f(x)^2 + g(x)^2) + h(x)^2\big) dx \\ &= \int_{\Omega} (f(x)^2 + g(x)^2) dx + \int_{\Omega} h(x)^2\, dx \\ &= \left(\int_{\Omega} f(x)^2\, dx + \int_{\Omega} g(x)^2\, dx\right) + \int_{\Omega} h(x)^2\, dx.\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $f + (g + h) = (f + g) + h$.

4) Akan ditunjukkan bahwa terdapat vektor $\mathbf{0} \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga

$$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f.$$

Ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga $f + g = f$.

Perhatikan bahwa,

$$\int_{\Omega} f(x)^2\ dx + \int_{\Omega} g(x)^2\ dx = \int_{\Omega} f(x)^2\ dx$$

sehingga

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} g(x)^2\ dx &= \int_{\Omega} f(x)^2\ dx - \int_{\Omega} f(x)^2\ dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{0}\, dx = \mathbf{0} < \infty.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh bahwa $g(x) = 0 \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga

$$f + \mathbf{0} = f \tag{3}$$

dan dengan menggunakan sifat (2) diperoleh

$$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f. \tag{4}$$

Dari Persamaan (3) dan (4), terbukti bahwa $f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f$.

5) Akan ditunjukkan terdapat $-f \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga

$$f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}.$$

Ambil sebarang $f \in L^2(\Omega)$. Pilih $\alpha = -1$ pada sifat (1) diperoleh,

$$-\int_{\Omega} f(x)^2 \, dx \ < \infty.$$

Akibatnya,

$$\int_{\Omega} f(x)^2 \, dx \ + \left(-\int_{\Omega} f(x)^2 \, dx\right) = \int_{\Omega} \mathbf{0} \, dx = \mathbf{0}$$

dan dengan menggunakan sifat komutatif pada sifat (2) untuk setiap $f \in L^2(\Omega)$, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)^2 \, dx \ + \left(-\int_{\Omega} f(x)^2 \, dx\right) &= \left(-\int_{\Omega} f(x)^2 \, dx\right) + \int_{\Omega} f(x)^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{0} \, dx = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}$.

6) Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

Ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\alpha(f + g)(x)|^2 dx \ &= \int_{\Omega} \left|\alpha\big(f(x) + g(x)\big)\right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\alpha|^2 \left|\big(f(x) + g(x)\big)\right|^2 dx \\ &= \alpha^2 \int_{\Omega} \left|\big(f(x) + g(x)\big)\right|^2 dx \\ &\leq \alpha^2 2^2 \left(\int_{\Omega} f(x)^2 \, dx \ + \int_{\Omega} g(x)^2 \, dx\right) \\ &\leq \alpha^2 \left(\int_{\Omega} f(x)^2 \, dx \ + \int_{\Omega} g(x)^2 \, dx\right) \\ &= \left(\int_{\Omega} \alpha^2 f(x)^2 \, dx \ + \int_{\Omega} \alpha^2 g(x)^2 \, dx\right) \\ &= \int_{\Omega} |\alpha f(x)|^2 \, dx \ + \int_{\Omega} |\alpha g(x)|^2 \, dx \ < \infty. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

7) Akan ditunjukkan bahwa $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$.
   Ambil sebarang $f \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(\alpha+\beta)f(x)|^2\, dx &= \int_\Omega \left|\alpha\big(f(x)\big) + \beta\big(f(x)\big)\right|^2 dx \\
&\leq 2^2 \left(\int_\Omega \alpha^2 f(x)^2\, dx + \int_\Omega \beta^2 f(x)^2\, dx \right) \\
&\leq \left(\int_\Omega \alpha^2 f(x)^2\, dx + \int_\Omega \beta^2 f(x)^2\, dx \right) \\
&= \int_\Omega \alpha^2 f(x)^2\, dx + \int_\Omega \beta^2 f(x)^2\, dx \\
&= \int_\Omega |\alpha f(x)|^2\, dx + \int_\Omega |\beta f(x)|^2\, dx < \infty.
\end{aligned}$$

   Jadi terbukti bahwa $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$.

8) Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.
   Ambil sebarang $f \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\alpha\big(\beta f(x)\big)\right|^2 dx &= \int_\Omega \left|\alpha\beta\big(f(x)\big)\right|^2 dx \\
&= \int_\Omega (\alpha\beta)^2 f(x)^2\, dx \\
&= \int_\Omega \left|\alpha\beta\big(f(x)\big)\right|^2 dx < \infty.
\end{aligned}$$

   Jadi terbukti bahwa $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.

9) Akan ditunjukkan bahwa $1f = f$.
   Ambil sebarang $f \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha = 1$ dan dengan menggunakan sifat perkalian diperoleh,

$$1f = (1)\int_\Omega |f|^2\, dx = \int_\Omega |f|^2\, dx = f.$$

   Jadi terbukti bahwa $1f = f$.

Karena semua sifat ruang vektor terpenuhi, maka ruang $L^2(\Omega)$ merupakan ruang vektor.

1.7.2 Ruang Bernorma

Definisi 1.3 *Misalkan X ruang vektor dengan lapangan Riil. Norma didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:*

1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$.
2) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = 0$ *dan untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$.
3) $\|c\boldsymbol{x}\| = |c|\|\boldsymbol{x}\|$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$ *dan* $c \in \mathbb{R}$.
4) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

(Kreyszig, 1989)

Contoh 1.2 Fungsi $\|\cdot\|$ yang didefinisikan pada ruang $L^2(\Omega)$ sebagai berikut:

$$\|f(x)\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

untuk setiap $f \in L^2(\Omega)$ merupakan norma di ruang $L^2(\Omega)$.

Bukti

1) Akan ditunjukkan bahwa $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$.

   Perhatikan bahwa $f(x)^2 \geq 0$.

   Selanjutnya, karena integral dari fungsi positif merepresentasikan suatu luasan yang selalu tidak bernilai negatif untuk setiap x di Ω, maka

$$\int_{\Omega} f(x)^2 \; dx \geq 0.$$

   Akibatnya,

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

   Jadi terbukti bahwa $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$ untuk setiap $f \in L^2(\Omega)$.

2) Akan ditunjukkan $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$.

   Pertama, akan dibuktikan bahwa jika $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ maka $f(x) = 0$.

   Asumsikan $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, sehingga

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

   Karena $\int_{\Omega} f(x)^2 \; dx = 0$, maka haruslah $f(x) = 0$.

   Kedua, akan dibuktikan jika $f(x) = 0$ maka $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

   Perhatikan bahwa,

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   Karena $f(x) = 0$, akibatnya

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} 0^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

   Jadi terbukti bahwa $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$ untuk setiap $f \in L^2(\Omega)$.

3) Akan ditunjukkan $\|\alpha f(x)\|_{L^2(\Omega)} = |\alpha| \|f(x)\|_{L^2(\Omega)}$.

   Perhatikan bahwa,

$$\|\alpha f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\alpha f(x)\right)^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Berdasarkan sifat nilai mutlak, diperoleh

$$\begin{aligned}\|\alpha f(x)\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |\alpha|^2 f(x)^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} f(x)^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha|\left(\int_{\Omega} f(x)^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha|\|f(x)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\|\alpha f(x)\|_{L^2(\Omega)} = |\alpha|\|f(x)\|_{L^2(\Omega)}$ untuk setiap $f \in L^2(\Omega)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) Akan ditunjukkan $\|f(x) + g(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(x)\|_{L^2(\Omega)}$.
Berdasarkan ketaksamaan Minkowski, diperoleh

$$\begin{aligned}\|f(x) + g(x)\|_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (|f(x) + g(x)|)^2 \ dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} f(x)^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} g(x)^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(x)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(x)\|_{L^2(\Omega)}$ untuk setiap $f, g \in L^2(\Omega)$.

Karena fungsi $\|\cdot\|$ memenuhi ke empat sifat norma, maka dapat disimpulkan bahwa $(L^2(\Omega)\,, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

1.7.3 Ruang Banach

Definisi 1.4 *Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma. X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{u_n\}$ dalam X konvergen ke suatu $\boldsymbol{x} \in X$. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach.*

(Kreyszig, 1989)

Contoh 1.3 Ruang $L^2(\Omega)$ merupakan ruang Banach.

Langkah 1. Menunjukkan ruang $L^2(\Omega)$ adalah ruang bernorma.
Berdasarkan Contoh 1.2 telah ditunjukkan bahwa fungsi $\|\cdot\|$ memenuhi 4 sifat norma, sehingga disimpulkan bahwa $(L^2(\Omega)\,, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

Langkah 2. Menunjukkan $L^2(\Omega)$ adalah ruang lengkap.
Untuk menunjukkan $L^2(\Omega)$ lengkap, maka perlu ditunjukkan bahwa suatu barisan Cauchy $\{u_n\}$ konvergen ke barisan $u \in L^2(\Omega)$ yang dibuktikan melalui teorema berikut:

Teorema 1.1 *(Teorema Ruesz-Fischer) Ruang bernoma $L^2(\Omega)$ merupakan ruang yang lengkap.*

Bukti

Untuk kasus $L^2(\Omega)$, maka cukup hanya ditunjukkan bahwa untuk setiap barisan Cauchy $\{u_n\}$ di $L^2(\Omega)$, maka terdapat sebuah barisan $u \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga barisan u_n konvergen ke suatu $u \in L^2(\Omega)$.

Karena $\{u_n\}$ adalah barisan Cauchy, maka dapat ditemukan sub barisan u_{n_j} dan dengan memilih $\varepsilon = 2^{-j} > 0$ sedemikian sehingga

$$\left\| u_{n_{j+1}} - u_{n_j} \right\|_{L^2} < 2^{-j}.$$

Diperoleh

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \left| u_{n_{j+1}} - u_{n_j} \right| \right\|_{L^2} < \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} < 1.$$

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Selanjutnya didefinisikan

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \left| u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x) \right|.$$

Dengan menggunakan lemma Fatou, sehingga

$$\|v\|_{L^2} \le 1.$$

Mengakibatkan $v(x) < \infty$ untuk hampir disetiap titik dan barisan berikut

$$u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x) \right)$$

jelas konvergen untuk hampir disetiap titik x. Karena jumlah parsial dari barisan ini hanya $u_{n_{k+1}}(x)$, maka dapat didefinisikan suatu fungsi $u(x)$ untuk hampir disetiap titik $x \in (0,1)$ dengan

$$u(x) = \lim_{j\to\infty} u_{n_j}(x).$$

Akhirnya, dapat ditunjukkan bahwa $u \in L^2(\Omega)$ maka $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$.

Pilih suatu nilai N sedemikian sehingga

$$\|u_n - u_m\|_{L^2} \le \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n, m \ge N.$$

Dengan menggunakan lemma Fatou, akibatnya

$$\left\| u - u_{n_j} \right\|_{L^2} \le \lim_{k\to\infty} inf \left\| u_{n_k} - u_{n_j} \right\|_{L^2} \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Karena $n_j \ge N$, maka $u - u_{n_j} \in L^2(\Omega)$. Perhatikan bahwa,

$$u = \left(u - u_{n_j} \right) + u_{n_j} \text{ dengan } u_{n_j} \in L^2$$

maka diperoleh $u \in L^2(\Omega)$. Untuk $n > N$, pilih j sedemikian sehingga $n_j \ge N$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^2} &\le \left\| u_n - u_{n_j} \right\|_{L^2} + \left\| u_{n_j} - u \right\|_{L^2} \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap barisan Cauchy $\{u_n\}$ di $L^2(\Omega)$, maka terdapat sebuah barisan $u \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga barisan u_n konvergen ke suatu $u \in L^2(\Omega)$.

Karena barisan u_n konvergen ke u di ruang $L^2(\Omega)$, maka ruang $L^2(\Omega)$ adalah ruang yang lengkap. Selanjutnya karena ruang $L^2(\Omega)$ adalah ruang bernorma dan lengkap maka dapat disimpulkan $L^2(\Omega)$ merupakan ruang Banach.

1.7.4 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 1.5 *Misalkan X ruang vektor atas lapangan Riil. Hasil kali dalam pada X adalah suatu fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut:*

1) $\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle$
2) $\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$
3) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle}$
4) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geq 0$ dan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$.

(Kreyszig, 1989)

Definisi 1.6 *Suatu ruang Hilbert adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap dengan norma yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}. \tag{5a}$$

(Kreyszig, 1989)

Contoh 1.4 Fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ yang didefinisikan pada $L^2(\Omega)$ sebagai berikut:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

untuk setiap $f, g \in L^2(\Omega)$ merupakan ruang Hilbert.

Bukti

Langkah 1. Menunjukkan bahwa fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ yang didefinisikan pada $L^2(\Omega)$ memenuhi 4 sifat ruang hasil kali dalam

1) $$\begin{aligned} \langle f+g, h\rangle &= \int_\Omega \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,dx \\ &= \int_\Omega (f(x)h(x)+g(x)h(x))\,dx \\ &= \int_\Omega f(x)h(x)dx + \int_\Omega g(x)h(x)\,dx \\ &= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle. \end{aligned}$$

2) $\langle \alpha f, g \rangle$ $= \int_\Omega \alpha f(x)g(x)dx$

$$= \alpha \int_\Omega f(x)g(x)dx$$
$$= \alpha\langle f, g \rangle.$$

3) $\langle g, f \rangle$ $= \int_\Omega g(x)f(x)dx$

$$= \int_\Omega f(x)g(x)dx$$
$$= \langle g, f \rangle.$$

4) $\langle f, f \rangle \geq 0$ dan $\langle f, f \rangle = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa

$$\langle f, f \rangle \geq 0 \text{ jika dan hanya jika } f = 0.$$

Perhatikan bahwa,

$$\langle f, f \rangle = \int_\Omega f(x)f(x)dx$$
$$= \int_\Omega \big(f(x)\big)^2 dx \geq 0.$$

Jadi terbukti bahwa $\langle f, f \rangle \geq 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$\langle f, f \rangle = 0 \text{ jika dan hanya jika } f = 0.$$

Pertama, jika $\langle f, f \rangle = 0$ maka akan ditunjukkan $f(x) = 0$.

Perhatikan bahwa,

$$\langle f, f \rangle = \int_\Omega f(x)f(x)\, dx = \int_\Omega \big(f(x)\big)^2\, dx = 0.$$

Karena $\int_\Omega \big(f(x)\big)^2\, dx = 0$ maka haruslah $\big(f(x)\big)^2 = 0$. Akibatnya $f(x) = 0$.

Kedua, jika $f(x) = 0$ maka akan ditunjukkan $\langle f, f \rangle = 0$.

Karena $f(x) = 0$ maka diperoleh $\big(f(x)\big)^2 = 0$ sehingga dapat ditulis

$$\langle f, f \rangle = \int_\Omega f(x)f(x)dx = \int_\Omega \big(f(x)\big)^2 dx = \int_\Omega (0)^2 dx = 0.$$

Jadi terbukti bahwa fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ yang didefinisikan pada $L^2(\Omega)$ memenuhi 4 sifat ruang hasil kali dalam.

Langkah 2. Menunjukkan $L^2(\Omega)$ adalah ruang lengkap.

Sebelum menunjukkan kelengkapan ruang $L^2(\Omega)$, terlebih dahulu didefiniskan norma yang diinduksi dari ruang hasil kali dalam.

Ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$, maka

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Untuk $f = g$, diperoleh

$$\langle f, f\rangle = \int_\Omega f(x)f(x)dx$$
$$\langle f, f\rangle = \int_\Omega \left(f(x)\right)^2 dx$$
$$\sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_\Omega \left(f(x)\right)^2 dx}$$
$$\|f\| = \sqrt{\int_\Omega \left(f(x)\right)^2 dx}.$$

Akibatnya, barisan cauchy $\{u_n\}$ di ruang $L^2(\Omega)$ dapat didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n > N$ maka

$$\|u_m - u_n\| = \sqrt{\int_\Omega |u_m - u_n|^2 dx} < \varepsilon.$$

Berdasarkan Teorema Riesz-Fischer (1.1), maka diketahui bahwa ruang $L^2(\Omega)$ lengkap. Karena $L^2(\Omega)$ memenuhi aturan hasil kali dalam dan $L^2(\Omega)$ lengkap maka $L^2(\Omega)$ merupakan ruang Hilbert.

Definisi 1.7 *Dua vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ dalam ruang hasil kali dalam disebut ortogonal jika $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$, dengan notasi $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.*

(Rynne & Youngson, 2008)

Contoh 1.5 Himpunan vektor $V = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ dengan $\boldsymbol{x} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dan $\boldsymbol{y} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ adalah himpunan vektor ortogonal.

Bukti

Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$, maka berdasarkan definisi hasil kali dalam pada ruang $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ diperoleh :

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Jadi, himpunan V ortogonal atau $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

Definisi 1.8 *Sebuah himpunan vektor disebut ortonormal jika himpunan tersebut orthogonal dan setiap vektor dalam himpunan tersebut memiliki norma 1.*

(Anton dan Rorres, 2010)

Contoh 1.6 Himpunan vektor $V = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ dengan $\boldsymbol{x} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dan $\boldsymbol{y} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ adalah himpunan vektor ortonormal.

Bukti

Pada Contoh 1.5 telah dibuktikan bahwa himpunan V ortogonal. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ ortonormal dengan membuktikan bahwa kedua vektor tersebut memiliki norma 1. Berdasarkan definisi norma pada ruang $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, maka diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Jadi, himpunan V ortonormal.

1.7.5 Formulasi Bilinear

Definisi 1.9 *Misalkan X ruang vektor atas lapangan Riil. Formulasi Bilinear pada X adalah suatu fungsi $\phi(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut:*

1) $\phi(\boldsymbol{v}_1 + \lambda \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \alpha\phi(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})$
2) $\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{1}} + \lambda \boldsymbol{w}_2) = \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{1}}) + \alpha\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)$.

(Dummit, 2022)

Contoh 1.7 Sebuah vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dan $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ adalah suatu formulasi bilinear yang didefinisikan suatu fungsi

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

(Kurgalin dan Borzunov, 2021)

Bukti

1) Akan ditunjukkan bahwa $f(\boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \lambda f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$.
   Perhatikan bahwa $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, maka
$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) &= (x_1 + \lambda x_2) y_1 + (x_1 + \lambda x_2) y_2 \\ &= (x_1 y_1 + \lambda x_2 y_1) + (x_1 y_2 + \lambda x_2 y_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_1 y_2) + (\lambda x_2 y_1 + \lambda x_2 y_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_1 y_2) + \lambda(x_2 y_1 + x_2 y_2) \\ &= f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \lambda f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}). \end{aligned}$$
2) Akan ditunjukkan bahwa $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{1}} + \lambda \boldsymbol{y}_2) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{1}}) + \lambda f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$.
   Perhatikan bahwa $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, maka
$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{1}} + \lambda \boldsymbol{y}_2) &= x_1(y_1 + \lambda y_2) + x_2(y_1 + \lambda y_2) \\ &= (x_1 y_1 + \lambda x_1 y_2) + (x_2 y_1 + \lambda x_2 y_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_1) + (\lambda x_1 y_2 + \lambda x_2 y_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_1) + \lambda(x_1 y_2 + x_2 y_2) \\ &= f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{1}}) + \lambda f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2). \end{aligned}$$

Karena kedua sifat formulasi bilinear terpenuhi, maka fungsi f merupakan formulasi bilinear.

1.7.6 Ruang Dual

Definisi 1.10 *Misalkan X ruang vektor bernorma. Pemetaan $f : X \to \mathbb{R}$ disebut fungsional linear, jika memenuhi sifat*

$$f(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y}).$$

untuk semua $x, y \in X$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Fungsional f pada ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ dikatakan terbatas jika terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(\boldsymbol{x})| \leq C\|\boldsymbol{x}\|$$

untuk setiap $x \in X$. Himpunan semua fungsional linear dan terbatas pada X, yang dilambangkan dengan X^*, disebut ruang dual dari X.

(Gerlach, 2016)

Contoh 1.8 Suatu vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ adalah suatu fungsional linear yang didefinisikan dengan suatu fungsi $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yaitu

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Bukti

Akan ditunjukkan $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ serta $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ dan $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$, maka

$$\begin{aligned}
f(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{a} \cdot (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) \\
&= (a_1, a_2) \cdot [\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)] \\
&= (a_1, a_2) \cdot [(\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta y_1, \beta y_2)] \\
&= [(a_1, a_2) \cdot (\alpha x_1, \alpha x_2)] + [(a_1, a_2) \cdot (\beta y_1, \beta y_2)] \\
&= \alpha a_1 x_1 + \alpha a_2 x_2 + \beta a_1 y_1 + \beta a_2 y_2 \\
&= \alpha(a_1 x_1 + a_2 x_2) + \beta(a_1 y_1 + a_2 y_2) \\
&= \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y}).
\end{aligned}$$

Jadi, fungsi $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ merupakan suatu fungsional linear.

Definisi 1.11 *Ruang dari fungsional linear terbatas $f: V(\Omega) \to \mathbb{R}$ dinotasikan dengan V^* atau disebut juga ruang dual dari V. Pasangan dual antara $f \in V(\Omega)$ dan $\varphi \in V^*$ dituliskan dengan (f, φ). Norma dari $f \in V^*(\Omega)$ yaitu*

$$\|f\|_{V^*} = sup\left\{\frac{|(f, \varphi)|}{\|\varphi\|_V} : \varphi \in V(\Omega), \varphi \neq 0\right\}.$$

(Hunter, 2014)

1.7.7 Fungsi Uji

Fungsi uji, yang sering digunakan dalam analisis fungsional dan teori distribusi, merupakan fungsi-fungsi yang memiliki kompak support dan smooth. Salah satu karakteristik utama dari fungsi uji adalah memiliki kompak support yang berarti fungsi tersebut hanya bernilai tidak nol pada himpunan kompak, di luar area tersebut, fungsi bernilai nol. Untuk memahami lebih lanjut, teorema berikut yang mendefinisikan himpunan bagian kompak dalam ruang $\mathbb{R}$.

Teorema 1.2 *Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}$ disebut himpunan bagian kompak jika dan hanya jika himpunan tersebut tertutup dan terbatas.*

(Bartle, 2010)

Contoh 1.9 Diberikan himpunan $K = \{x_n \in \mathbb{R}: n = 1,2,3,\cdots, N_0\}$. Selidiki apakah K merupakan himpunan kompak atau bukan.

Bukti

Diberikan $\bar{G} = \{G_\alpha: \alpha \in A\}$ sebarang penutup terbuka untuk K, yaitu berkalu $K \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$. Perhatikan bahwa jika $x_n \in K$ untuk setiap $n \in \{1,2,3,\cdots, N_0\}$, maka terdapat $\alpha_n \in A$ sehingga $x_n \in G_{\alpha_n}$. Akibatnya diperoeh $K = \bigcup_{n=1}^{N_0}\{x_n\} \subset \bigcup_{n=1}^{N_0} G_{\alpha_n} \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$. Hal ini berarti keluarga himpunan $\{G_{\alpha_n}: n = 1,2,3,\cdots, N_0\}$ merupakan penutup bagian terbuka berhingga untuk K.

Karena $\bar{G} = \{G_\alpha: \alpha \in A\}$ sebarang penutup terbuka untuk K, maka disimpulkan K merupakan himpunan kompak.

Definisi 1.12 *Fungsi smooth merupakan fungsi yang turunannya kontinu hingga orde tertentu. Ruang C^m merupakan ruang dari fungsi-fungsi yang turunan parsialnya kontinu hingga orde m. Ruang C^∞ merupakan suatu ruang yang juga memuat fungsi-fungsi yang turunan parsialnya kontinu pada semua orde. Sedangkan, C_K^∞ adalah ruang fungsi yang turunan parsialnya kontinu pada semua orde dan memiliki kompak support K.*

(Hunter, 2014)

Definisi 1.13 *Misalkan $f: \Omega \to \mathbb{R}$ dengan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $f \in C^m(\Omega)$. Himpunan $C \subseteq \Omega$ merupakan support dari suatu fungsi f,*

$$Supp(f) = K.$$

Jika terdapat konstanta $\delta \geq 0$ sedemikian sehingga

$$f(x) = 0, \quad |x| \geq \delta$$
$$f(x) \neq 0, \quad |x| < \delta.$$

(Hormann, 2009)

Definisi 1.14 *Fungsi f dengan pemetaan $f: \Omega \to \mathbb{R}$ disebut sebagai fungsi uji jika memenuhi syarat berikut:*

1) *f memiliki kompak support*
2) *f merupakan fungsi smooth pada K.*

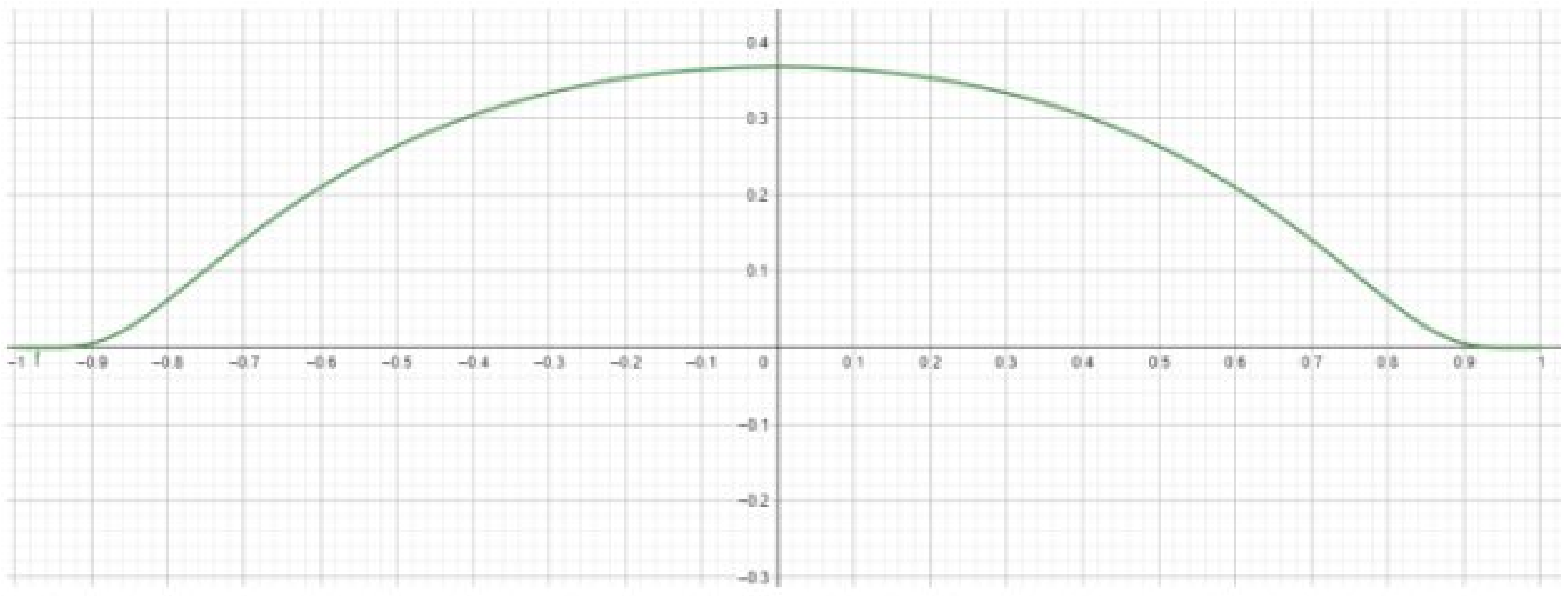
(Hormann, 2009)

Untuk lebih mengetahui gambaran mengenai fungsi uji, berikut diberikan contoh fungsi uji.

Contoh 1.10 Fungsi f yang didefinisikan sebagai berikut merupakan fungsi uji

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1. \end{cases}$$

Bukti:



Gambar 2. Grafik fungsi f

Berdasarkan grafik fungsi f pada Gambar 2**,** dapat dilihat bahwa kompak support dari fungsi f adalah himpunan $K = [-1{,}1]$. Oleh karena itu,

$$Supp(f) = K,$$

yang memenuhi definisi dari kompak support.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa fungsi f merupakan fungsi *smooth*. Sebuah fungsi dikatakan *smooth* jika fungsi tersebut memiliki turunan dari semua orde, dan semua turunannya kontinu. Berikut hasil turunan fungsi f untuk beberapa orde

1. Turunan pertama
$$f'(x) = r_1(x)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} = -\left(\frac{2\,x}{(x^2-1)^2}\right)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}.$$
2. Turunan kedua
$$f''(x) = r_2(x)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} = 2\left(\frac{3x^4-1}{(x^2-1)^4}\right)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}.$$

Secara umum, untuk turunan ke-n

$$f^n(x) = r_n(x)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}$$

di mana $r_n(x)$ adalah fungsi rasional tergantung paa x dan n.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa semua turunan fungsi f adalah kontinu. Untuk memeriksa kekontinuan di $x = \pm 1$, perlu diperiksa untuk limit dari $f'(x)$ ketika x mendekati 1 dan -1 dari kiri dan kanan dan memastikan bahwa limit tersebut sama dengan nilai fungsi di titik-titik tersebut:

- Limit dari kiri dan kanan ($\text{saat } x \to 1^- \text{ dan } x \to 1^+$): Saat x mendekati 1 dari kiri (atau -1 dari kanan), nilai $f'(x)$ mendekati 0.
- Nilai $f'(1)$ dan $f'(-1)$: Karena $f(x) = 0$ untuk $|x| \geq 1$, maka $f'(1) = 0$ dan $f'(-1) = 0$.

Karena limit $f'(x)$ dari kedua sisi sama dengan nilai turunan di titik-titik tersebut, maka $f'(x)$ adalah kontinu di $x = 1$ dan $x = -1$. Proses yang sama dapat diterapkan untuk turunan kedua dan seterusnya, yang menunjukkan bahwa setiap turunan $f^n(x)$ ada dan kontinu.

Dari penjelasan di atas maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f tidak hanya memiliki turunan dari semua orde tetapi semua turunannya juga kontinu. Oleh karena itu, f adalah fungsi smooth. Akibatnya, fungsi f terbukti merupakan fungsi uji.

Definisi 1.15 *Ruang $C_0^\infty(\Omega)$ terdiri dari semua fungsi smooth dengan kompak support di Ω. Fungsi-fungsi seperti itu bernilai nol pada batas Ω.*

(Brezis, 2010)

Teorema 1.3 *(Teorema Lax-Milgram). Diberikan suatu ruang Hilbert H. Misalkan $a : H \times H \to \mathbb{R}$ adalah formulasi bilinear dan terdapat suatu konstanta $\alpha, \beta > 0$ sedemikian sehingga*

(i) $|a(u,v)| \leq \alpha \|u\| \|v\| \qquad (u, v \in H) \qquad (continuity)$

(ii) $\beta \|u\|^2 \leq a(u,u) \qquad (u \in H) \qquad (coercivity)$

Jika $f : H \to \mathbb{R}$ adalah fungsional linier dan terbatas pada H maka terdapat suatu fungsi tunggal $u \in H$ sedemikian sehingga

$$a(u,v) = (f,v), \qquad \forall v \in H.$$

(Rudin, 1991)

1.7.8 Weak Konvergen

Definisi 1.16 *Barisan (x_n) dalam ruang norm X dikatakan konvergen lemah jika terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in X^*$,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

(Kreyzig, 1989)

Contoh 1.11 Ruang L^2 dengan definisi berikut

$$L^2(\mathbb{R}) = \{(a_n) | \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

Bukti

Misalkan $(L^2)^*$ adalah ruang dual dari L^2.

Misalkan $f \in (L^2)^*$, terdapat $b \in L^2$ sedemikian sehingga

$$f(a) = \langle b, a \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \qquad \forall a \in L^2.$$

Ambil $(x_n) \in l^2$, $(x_n) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ dengan 1 berada pada urutan ke $- n$ dan $n = 1, 2, \ldots$. Lebih lanjut dapat dituliskan sebagai berikut

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$x_1 = (1, 0, 0, \ldots)$

$x_2 = (0, 1, 0, \ldots)$

dan seterusnya.

Akan ditunjukkan terdapat $x \in L^2$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in (L^2)^*$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Ambil $f \in (L^2)^*$, untuk $(x_n) \in L^2$, maka terdapat $b = (b^1, b^2, b^3, \ldots) \in L^2$ sedemikian sehingga

$$f(x_n) = \langle b, x_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_n^k b^k = b^n, \qquad \forall x_n \in L^2.$$

Karena $b \in L^2$, maka $\sum_{k=1}^{\infty}|b^k|^2 < \infty$, sehingga b konvergen ke 0.
Jadi, x_n konvergen lemah ke vektor 0 atau dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} b^n = 0 = f(0).$$

Definisi 1.17 *Misalkan $L^2(0,T;V^*(\Omega))$ merupakan ruang dual dari $L^2(0,T;V(\Omega))$. Sebuah barisan $f_n \in L^2(0,T;V(\Omega))$ dikatakan weak konvergen ke f pada $L^2(0,T;V(\Omega))$ atau dapat ditulis $f_n \rightharpoonup f$ di $L^2(0,T;V(\Omega))$,*

$$\int_0^T (g, f_n(t))\,dt \to \int_0^T (g, f(t))\,dt \quad \forall g \in L^2(0,T;V^*(\Omega))$$

dan untuk weak konvergen $g_n \rightharpoonup g$ di $L^2(0,T;V^*(\Omega))$ sebagai berikut

$$\int_0^T (g_n, f(t))\,dt \to \int_0^T (g, f(t))\,dt \qquad \forall f \in L^2\big(0,T;V^*(\Omega)\big).$$

(Hunter, 2014)

1.7.9 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan parsial. Setidaknya dua variabel bebas harus terlibat dalam persamaan ini (Ayres, 1992). Sebagai contoh diberikan persamaan diferensial parsial berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dengan } u = u(x,t).$$

Pada persamaan ini, variabel u merupakan variabel terikat, sedangkan x dan y merupakan variabel bebas. Karena u bergantung pada x dan t, maka untuk mencari nilai $\frac{\partial u}{\partial x}$, u akan diturunkan terhadap x dan t akan menjadi konstanta. Sedangkan untuk mencari nilai $\frac{\partial u}{\partial t}$, u akan diturunkan terhadap t dan x akan menjadi konstanta.

Dalam Persamaan Diferensial Parsial perlu diketahui notasi-notasi berikut

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x^2} \quad u_{tt} = \frac{\partial u}{\partial t^2} \quad u_{xt} = \frac{\partial u}{\partial xt}.$$

Suatu PDP disebut linear jika tidak ada perkalian antar variabel terikat dan derivatifnya. Selain itu, koefisien pada suatu persamaan terebut hanya tergantung pada variabel bebas . Sedangkan suatu PDP disebut nonlinear jika variabel terikat u dan turunan parsialnya berpangkat lebih dari satu dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel terikat.

Orde dari suatu PDP merupakan tingkat tertinggi dari turunan parsialnya. Berikut beberapa contoh PDP dengan orde tertentu.

Contoh 1.12

1) $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (PDP Orde 2 & Linear)
2) $2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial x} = 3x$ (PDP Orde 2 & Non Linear).

Bentuk umum PDP Orde 2 Linear dengan dua variabel sebagai berikut

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0. \quad (6)$$

PDP ini terbagi dalam 3 tipe, yaitu:

(1) Persamaan Diferensial Eliptik,
Persamaan (5) disebut persamaan eliptik jika $B^2 - 4AC < 0$.
Contoh: Persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(2) Persamaan Diferensial Parabolik,
Persamaan (5) disebut persamaan diferensial parabolik jika $B^2 - 4AC = 0$.
Contoh: Persamaan Model Sistem Kemostat

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t} = K \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \mu(s)u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = K \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu(s)u \end{cases}.$$

(3) Persamaan Diferensial Hiperbolik
Persamaan (5) disebut persamaan diferensial hiperbolik jika $B^2 - 4AC > 0$.
Contoh: Persamaan Gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.7.10 Model Matematika Sistem Kemostat

Banyak model matematika telah dibuat dalam bidang ilmu pengetahuan untuk memprediksi dan mempelajari sistem biologis. Dibutuhkan suatu alat khusus, salah satunya kemostat, untuk mengetahui seberapa lama suatu mikroorganisme bertahan dan sudah punah. Alat laboratorium yang disebut kemostat digunakan untuk mengembangkan mikroorganisme di lingkungannya. (Novick dan Szilard, 2015)

Dalam sistem ini, konsentrasi substrat (s) dan populasi mikroorganisme (x) secara bertahap berubah. Beberapa faktor, termasuk laju aliran masukan nutrisi, laju konsumsi oleh mikroorganisme, dan laju penghilangan, memengaruhi perubahan konsentrasi nutrisi. Selain itu, populasi mikroorganisme tumbuh dengan tingkat tertentu dan dipengaruhi oleh konsentrasi nutrisi. (Jerome et al., 2017)
Bentuk umum dari model kemostat klasik sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = K_1(s_{in} - s) - \mu(s)u \\ \dfrac{du}{dt} = (\mu(s) - K_1)u, \end{cases} \quad (7)$$

dengan $s(x,t)$ dan $u(x,t)$ masing-masing merupakan konsentrasi substrat dan spesies, K_1 menunjukkan laju pengenceran/aliran masuk, s_{in} konsentrasi masukan dari substrat dan $\mu(s)$ menggambarkan fungsi konsumsi spesies. Terdapat berbagai kemungkinan untuk mendefinisikan fungsi konsumsi dalam model kemostat. Fungsi konsumsi menggambarkan bagaimana spesies mengonsumsi nutrisi dalam lingkungan yang diberikan. Salah satu jenis fungsi konsumsi yang paling umum digunakan dalam model kemostat adalah tipe Monod yang dimodifikasi menjadi fungsi tipe Haldane sebagai berikut

$$\mu(s) = \frac{ms}{K_2 + s}.$$

Namun dalam perkembangannya, model persamaan diferensial biasa tidak mencerminkan keadaan yang sebenarnya, oleh karena itu dalam paper Lan dan Lin (2021) mengonstruksikan model kemostat menjadi sistem PDP berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t} = K_1 \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \mu(s)u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = K_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(s)u, \end{cases} \tag{8}$$

dengan

$s(x,t)$	: Konsentrasi substrat pada waktu t (g/L)
$u(x,t)$	: Konsentrasi mikroorganisme pada waktu t (g/L)
K_1	: Laju pengenceran (L/h)
$\mu(s)$	: Laju konsumsi mikroorganisme (h^{-1})
m	: Laju pertumbuhan maksimum (h^{-1})
K_2	: Konstanta Michaelis-Menten
$\frac{\partial s}{\partial r}$	: Laju perubahan substrat terhadap waktu $(g/L)/h$
$\frac{\partial u}{\partial t}$	: Laju perubahan mikroorganisme terhadap waktu $(g/L)/h$.

Persamaan $\frac{\partial s}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \mu(s)u$ menunjukkan bahwa laju perubahan konsentrasi substrat berubah seiring waktu, dipengaruhi oleh penyebaran substrat di dalam kemostat dan laju konsumsi substrat oleh mikoorganisme. Laju konsumsi ini bergantung pada konsentrasi mikoorganisme serta parameter m dan K_2. Sedangkan persamaan $\frac{\partial u}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(s)u$ menunjukkan bahwa laju perubahan konsentrasi mikoorganisme berubah seiring waktu, dipengaruhi penyebaran mikoorganisme di dalam kemostat dan laju petumbuhan mikoorganisme sebagai respons terhadap ketersediaan substrat. Pertumbuhan ini tergantung pada jumlah substrat yang tersedia serta parameter m, K_2, dan s. Perlu diperhatikan bahwa tanda tambah dan kurang dalam persamaan tersebut mencerminkan arah perubahan atau pertumbuhan yang berlawanan antara konsentrasi substrat dan konsentrasi mikoorganisme. Substrat berkurang karena dikonsumsi oleh mikoorganisme, sedangkan mikoorganisme bertambah karena pertumbuhannya bergantung pada ketersediaan substrat.

Model matematika Persamaan (7) memiliki nilai koefisen $A = \mathrm{D}, B = 0$, dan $C = 0$, maka diperoleh nilai $B^2 - 4AC = 0$ yang berarti bahwa persamaan termasuk persamaan diferensial tipe Parabolik. Persamaan tersebut juga termasuk PDP nonlinear karena terdapat perkalian antar variabel terikat dan derivatifnya. Pada titik awal (saat $t = 0$), konsentrasi nutrisi dan mikroorganisme bernilai nonnegatif dapat dituliskan sebagai syarat awal berikut:

$$s(x,0) = s_0(x) \geq 0, 0 \leq x \leq 1$$
$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, 0 \leq x \leq 1.$$

Saat waktu mulai berjalan, sistem kemostat memenuhi syarat batas berikut:

$$s_x(0,t) = s^0, \quad s_x(1,t) + \gamma s(1,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0. \quad u_x(1,t) + \gamma u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Syarat batas $s_x(0,t) = s^0$ menunjukkan bahwa pada tepi kiri sistem kemostat, konsentrasi nutrien memiliki gradien yang konstan dan bernilai positif sebesar s^0. Ini menggambarkan kondisi di mana nutrien masuk ke dalam sistem pada tepi kiri dengan laju aliran s^0. Sedangkan untuk $s_x(1,t) + \gamma s(1,t) = 0$, menunjukkan bahwa pada tepi kanan sistem kemostat, aliran keluar diimbangi oleh laju aliran masuk yang dikendalikan oleh parameter γ. Syarat batas ini mencerminkan kondisi di mana terdapat aliran keluar dari sistem pada tepi kanan, namun aliran ini diatur oleh parameter γ sehingga terdapat keseimbangan antara aliran masuk dan keluar dari sistem kemostat. Ini menunjukkan pada tepi kanan kemostat konsentrasi substratnya stabil dan bernilai nol. Diasumsikan juga bahwa akan selalu ada susbtrat pada posisi x dan waktu t.

(Jerome et al., 2017)

1.7.11 Solusi Lemah

Solusi lemah adalah cara untuk memahami dan menemukan solusi untuk persamaan matematika yang lebih kompleks, seperti persamaan diferensial parsial. Solusi ini didefinisikan dengan menggunakan konsep distribusi atau integral, yang memungkinkan untuk mempertimbangkan solusi yang memiliki kondisi batas yang tidak biasa. Sederhananya, konsep dari solusi lemah muncul akibat tidak semua persamaan diferensial memiliki solusi klasik. Solusi klasik yang dimaksud adalah solusi yang *smooth* dimana solusi punya turunan dan memenuhi persamaan tersebut. Sehingga dilakukan penentuan solusi dengan memperluas ruang solusinya. (Chen, 2021)

Untuk lebih memahami tentang solusi lemah, berikut diberikan contoh gambaran mengenai solusi lemah.

Contoh 1.13 Diberikan suatu persamaan Burger berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (f(u))}{\partial x} = 0, \qquad t \in [0,T] \tag{9}$$

dengan $u = u(x,t)$ merupakan fungsi dua variabel dan $x \in \Omega = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ di $\mathbb{R}$ dengan flux $f(u) = \frac{u^2}{2}$. Berdasarkan penelitian Maria Cameron yang berjudul Notes On Burger's Equation, solusi yang didekati secara numerik mempunyai grafik yang tidak memenuhi persamaan diferensialnya di suatu titik pada waktu t tertentu dan diperoleh pula hasil pemetaan dari solusi tersebut memiliki lebih dari satu nilai. Sehingga, Persamaan (8) dikonstruksi ke dalam bentuk formulasi lemah yang berbentuk persamaan integral. Solusi dari formulasi lemah nya diperluas pada ruang L^2. Untuk menentukan solusi lemah Persamaan Burger atau Persamaan (8), akan dilakukan langkah-langkah berikut:

Pertama, kalikan Persamaan (8) dengan suatu fungsi uji $\phi \in V(\Omega)$, dengan $V = \{\phi \in L^2(\Omega);\ D\phi^j \in L^2; \phi \in C_0^\infty;\ \phi(R) = 0,\ \ j = 1,2, \dots ,\}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\phi + \frac{\partial(f(u))}{\partial x}\phi = 0.$$

Kemudian hasil diatas diintegralkan terhadap Ω, sehingga diperoleh

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\phi\, dx + \int_\Omega \frac{\partial(f(u))}{\partial x}\phi\, dx = 0. \tag{10}$$

Dengan menggunakan sifat integral parsial, maka suku kedua Persamaan (9) menjadi

$$\int_\Omega \frac{\partial(f(u))}{\partial x}\phi\, dx = [f(u)\ \phi]_a^b - \int_\Omega f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x}dx.$$

Karena ϕ merupakan suatu fungsi uji, maka $\phi(b) = \phi(a) = 0$ sehingga

$$\int_\Omega \frac{\partial(f(u))}{\partial x}\phi\, dx = -\int_\Omega f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x}dx.$$

Akibatnya Persamaan (8) menjadi

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\phi\, dx - \int_\Omega f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x}dx = 0.$$

Selanjutnya, dengan memasukkan flux $f(u) = \frac{u^2}{2}$, maka

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\phi\, dx - \int_\Omega \frac{u^2}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x}dx = 0. \tag{11}$$

Jadi, Persamaan (10) merupakan formulasi lemah dari persamaan (8). (Iqbal, 2022) Solusi u dari Persamaan (10) disebut sebagai solusi lemah sesuai definisi berikut.

Definisi 1.18 *Suatu fungsi* $u : [0,T] \to V(\Omega)$ *merupakan solusi dari Formulasi lemah (10) jika*

$\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\phi\, dx - \int_\Omega \frac{u^2}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x}dx = 0$$

untuk setiap $t \in [0,T]$.

(Hunter, 2014)

1.7.12 Metode Galerkin

Metode Galerkin adalah metode yang digunakan untuk menemukan solusi persamaan diferensial yang kompleks dengan menyederhanakannya menjadi masalah yang lebih mudah dipecahkan. Dalam proses ini, melibatkan masalah besar dan berdimensi-tak hingga diubah menjadi ruang solusi yang lebih kecil dan berdimensi-hingga. Proyeksi solusi dari ruang besar ke ruang kecil ini membuat masalah lebih terkelola. (Hunter, 2014)

Berikut adalah langkah-langkah yang terdapat dalam metode Galerkin:

1. Mengonstruksikan solusi pendekatan dari formulasi lemah.
2. Menunjukkan solusi pendekatan dan turunannya terbatas pada ruang solusi lemahnya menggunakan *energy estimates*.
3. Menunjukkan kekonvergenan solusi pendekatan ke solusi lemah yang akan menjadi pembuktian keberadaan solusi lemah.

Teorema 1.4 *(Teorema Banach-Alouglu) Misalkan X adalah suatu Ruang Banach. Misalkan (f_n) adalah suatu barisan yang terbatas di X^* (dual dari X) dan (g_n) adalah suatu barisan yang terbatas di X. Maka secara berurut, (f_n) memiliki sebuah subbarisan yang weak-* konvergen ke f di X^* dan (g_n) memiliki sebuah subbarisan yang weak konvergen ke g di X.*

(Rudin, 1991)

Teorema 1.5 *(Mean Value) Jika f dan g merupakan fungsi yang kontinu pada $[a, b]$, maka terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian sehingga*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx. \tag{12}$$

Pembuktian Teorema ini dapat dilihat pada Kouba (2010).

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

dengan $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai fungsi yang terintegralkan pada $[a, b]$. (Murty, 2019)

Teorema 1.6 *Diberikan V, L^2, dan V^* adalah ruang Hilbert dengan $V \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow V^*$. Jika $p \in L^2(0, T; V)$ dan $p_t \in L^2(0, T; V^*)$, maka*

$$\frac{d}{dt}\|p\| = 2\langle p_t, p\rangle. \tag{14}$$

Pembuktian persamaan di atas dapat dilihat pada Hunter (2014), halaman 208.

Ketaksamaan Young

Ketaksamaan Young menyatakan bahwa untuk semua $a,b \geq 0$ dan untuk $p, q > 1$ yang memenuhi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, berlaku

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{13a}$$

Misalkan $a = \alpha(f(x))$ dan $b = \beta(g(x))$, serta $p = q = 2$, maka ketaksamaan Young menjadi

$$\alpha(f(x)) \cdot \beta(g(x)) \leq \frac{\left(\alpha(f(x))\right)^2}{2} + \frac{\left(\beta(g(x))\right)^2}{2}$$

$$2\alpha\beta f(x)g(x) \leq \left(\alpha(f(x))\right)^2 + \left(\beta(g(x))\right)^2$$

$$2\alpha\beta f(x)g(x) \leq \alpha^2\left(f(x)\right)^2 + \beta^2\left(g(x)\right)^2$$

$$2\alpha\beta \int_a^b f(x)\, g(x)\; dx \leq \alpha^2 \int_a^b \left(f(x)\right)^2\; dx + \beta^2 \int_a^b \left(g(x)\right)^2\; dx. \qquad \textit{(13b)}$$

(Hardy et al, 1934)

Ketaksamaan Minkowski

Ketaksamaan Minskowski adalah hasil mendasar dalam ruang L^p yang menyatakan bahwa untuk setiap fungsi f dan g dalam ruang L^p, berlaku

$$\left(\int (f(x) + g(x))^p\; dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int \left(f(x)\right)^p\; dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int \left(g(x)\right)^p\; dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Untuk $p = 2$

$$\left(\int (f(x) + g(x))^2\; dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int \left(f(x)\right)^2\; dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int \left(g(x)\right)^2\; dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int \left(\left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2 + 2f(x)g(x)\right)\; dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int \left(f(x)\right)^2\; dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int \left(g(x)\right)^2\; dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int \left(\left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2\right)\; dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int \left(f(x)\right)^2\; dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int \left(g(x)\right)^2\; dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \textit{(13c)}$$

(Gerald, 1999)

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini bersifat pengembangan keilmuan dengan hasil kajiannya berupa konstruksi teori yang bernilai keilmuan tinggi sehingga dapat digunakan dalam penelitian selanjutnya dan mempunyai nilai terapan pada berbagai bidang ilmu, diantaranya bidang fisika khususnya dinamika fluida. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini adalah metode Galerkin yang mengacu pada langkah-langkah penelitian teoritik.

2.1 Tempat dan Waktu Penelitian

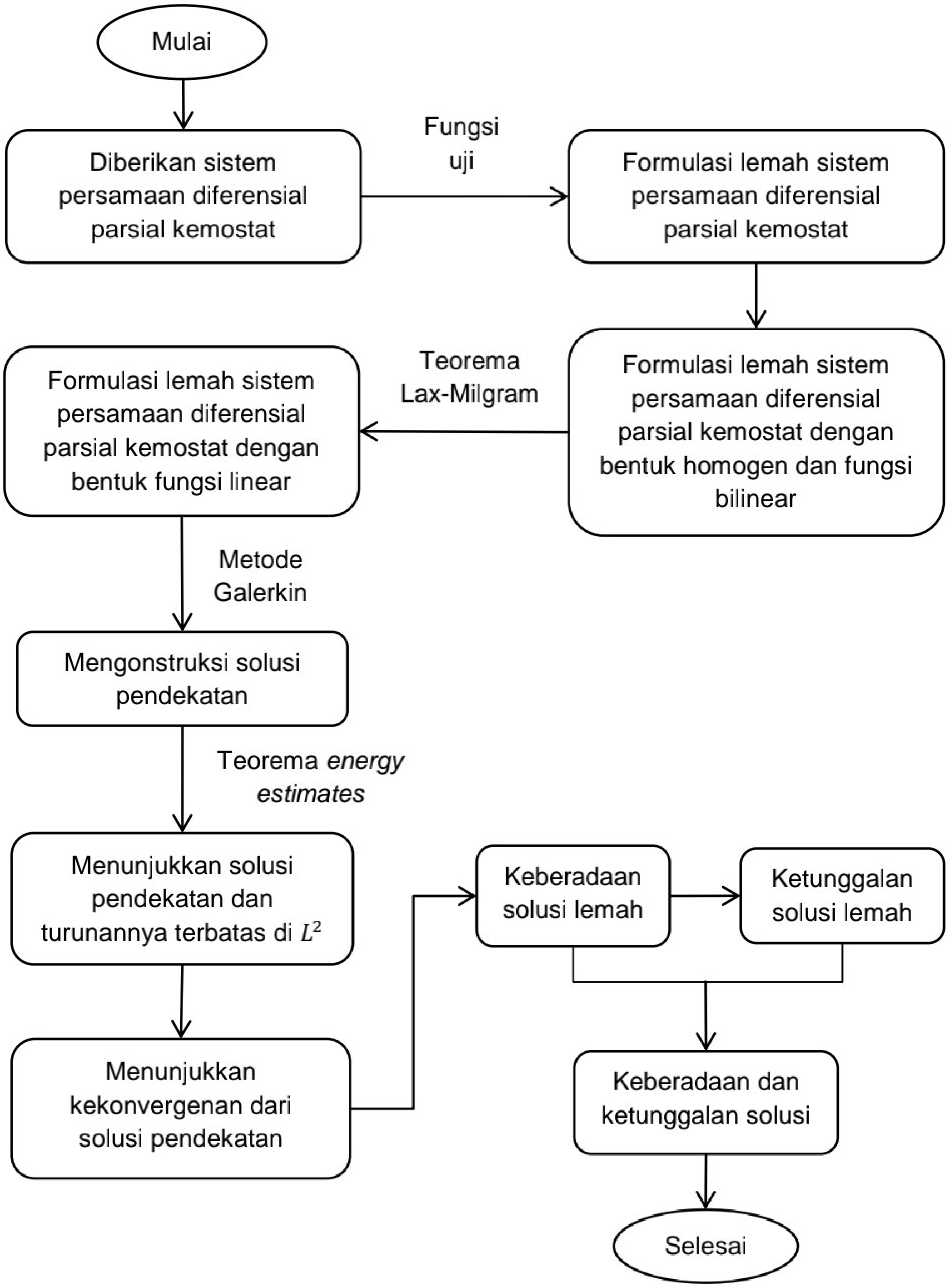
Penelitian ini dilakukan pada tahun 2024 di Perpustakaan Univeritas Hasanuddin dan Laboratorium Aljabar Program Studi Matematika FMIPA Univeritas Hasanuddin.

2.2 Jenis dan Tahapan Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi pustaka untuk mendapatkan informasi tentang keberadaan dan ketunggalan solusi lemah dari persamaan diferensial parsial. Informasi ini dikumpulkan dari buku, artikel, karya ilmiah, dan sumber-sumber lainnya. Berikut prosedur kerja dalam penelitian ini yaitu:

1) Melakukan studi pustaka dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai paper dan jurnal yang berfokus pada penelitian ini.
2) Mengonstruksi formulasi lemah dari model matematika sistem kemostat.
3) Mengonstruksi solusi pendekatan dari formulasi lemah yang memenuhi kondisi syarat awal dan syarat batasnya dari model matematika sistem kemostat.
4) Menunjukkan solusi pendekatan dan turunannya terbatas di ruang L^2.
5) Menunjukkan kekonvergenan solusi pendekatan yang akan menjadi pembuktian keberadaan solusi lemah.
6) Membuktikan ketunggalan solusi lemah.

2.3 Alur Kerja



Gambar 3. Alur Kerja