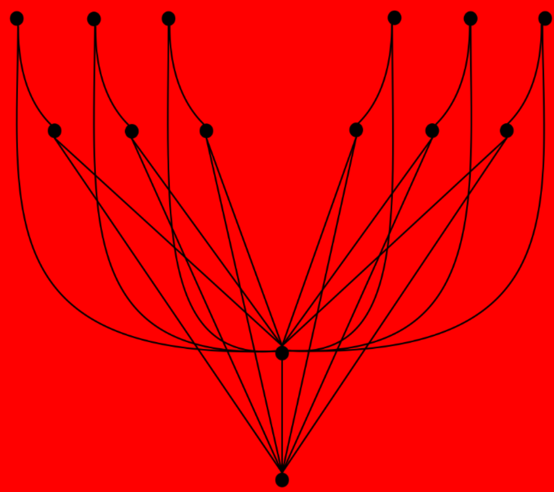
BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF TERATAI TERMODIFIKASI



LENNY CHEN
H011171305

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF TERATAI TERMODIFIKASI

LENNY CHEN

H011171305

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF TERATAI TERMODIFIKASI

LENNY CHEN
H011171305

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

HALAMAN PENGESAHAN

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF TERATAI TERMODIFIKASI

LENNY CHEN
H011171305

Skripsi,

telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Sarjana Program Studi Matematika pada tanggal 5 Agustus 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika
Deparatemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan, Pembimbing Utama	Mengesahkan, Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. **NIP. 19680803 199202 1 001**	**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** **NIP. 19700807 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680429 200212 1001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "**Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf Teratai Termodifikasi**" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing (**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** sebagai Pembimbing Utama dan **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** sebagai Pembimbing Pertama). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 5 Agustus 2024

Lenny Chen
NIM H011171305

UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf Teratai Termodifikasi**” sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada program studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan, bimbingan, dukungan dan motivasi dari bebagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga dan teristimewa kepada Ayahanda **Eddy Chen** dan Ibunda **Sherly Hosana** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan kesabaran dan penuh kasih sayang serta senantiasa memberikan doa dan dukungan keras sehingga dapat menjadi motivasi bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih pula atas dukungan dan doa kepada adik-adik saya tercinta **Chindy Chen** dan **Sianny Chen**. Pada kesempatan ini pula, penulis juga ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
4. **Bapak Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar dan tulus meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
6. **Bapak Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D.** selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat serta dukungan telah membimbing penulis menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
7. **Ibu Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku dosen penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan saran serta kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
8. **Bapak** dan **Ibu Dosen Departemen Matematika** yang telah membimbing, mendidik, dan memberikan ilmunya kepada penulis. Serta seluruh staf yang telah membantu dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.

9. Teman-teman **Matematika 2017** terkhususnya **Akin, Cahyudi, Denis, Dilla, Esty, Fatir, Indi, Heru, Kade, Kaye, Nisa, Riswan, Teka, Upi** yang telah memberi kenangan terindah dalam masa perkuliahan hingga penyusunan tugas akhir serta senantiasa membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Semoga kita semua senantiasa diberi kesehatan dan kesempatan untuk bersama-sama lagi kedepannya.
10. **Reynaldi, S.Si.** yang selalu menemani dan mendukung penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang juga telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya apabila terdapat banyak kekurangan dalam penyusunan skipsi ini. Akhir kata, semoga tulisan dapat memberikan manfaat untuk pembaca.

Penulis,

Lenny Chen

ABSTRAK

LENNY CHEN. **Basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi** (dibimbing oleh Amir Kamal Amir dan Nurdin).

Latar belakang. Nilai eigen dan basis ruang eigen adalah dua hal yang saling berkaitan dan merupakan konsep penting dalam aljabar linear. Basis ruang eigen dapat digunakan untuk menghitung nilai eigen dari matriks yang merepresentasikan graf. **Tujuan**. Menentukan bentuk umum basis dari ruang eigen pada matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi, terkhususnya graf teratai termodifikasi terhubung Trh_{2n+1} dan graf teratai termodifikasi bermahkota Trm_{2n+5}. **Metode**. Penelitian dibagi ke dalam lima tahap, yakni: 1) mengonstruksi graf teratai termodifikasi; 2) menyusun matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi; 3) menentukan nilai eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi; 4) menentukan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi; 5) menentukan bentuk umum basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi. **Hasil**. Basis ruang eigen graf teratai termodifikasi terhubung Trh_{2n+1} untuk $\lambda = -1$ terdiri dari $m(\lambda = -1) = 2n - 1$ elemen vektor eigen yang berbeda. Basis ruang eigen graf teratai termodifikasi terhubung Trh_{2n+1} untuk $\lambda = 1$ terdiri dari $m(\lambda = 1) = 2n - 1$ elemen vektor eigen yang berbeda. Basis ruang eigen graf teratai termodifikasi bermahkota Trm_{2n+5} untuk $\lambda = -2$ terdiri dari $m(\lambda = -2) = 2n + 3$ elemen vektor eigen yang berbeda. Basis ruang eigen graf teratai termodifikasi bermahkota Trm_{2n+5} untuk $\lambda = 2$ terdiri dari $m(\lambda = 2) = 2n + 3$ elemen vektor eigen yang berbeda. **Kesimpulan**. Karena banyaknya jumlah nilai eigen yang kembar sama dengan banyaknya jumlah vektor eigen yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen maka dapat disimpulkan multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometri $(\alpha(\lambda) = \beta(BRE_\lambda))$.

Kata kunci: graf teratai termodifikasi; matriks ketetanggaan; nilai eigen; basis ruang eigen

ABSTRACT

***Lenny Chen**. Eigen basis of the adjacency matrix of the modified lotus graph. (supervised by Amir Kamal Amir and Nurdin).*

***Background**. Eigenvalues and eigenvectors are interrelated and fundamental concepts in linear algebra. Eigenvector bases can be used to calculate the eigenvalues of matrices representing graphs. **Aim**. To determine the general form of the basis of the eigenspace for the adjacency matrix of modified lotus graph, specifically the connected modified lotus graph* Trh_{2n+1} *and the crowned modified lotus graph* Trm_{2n+5}*. **Method**. The research is divided into five stages: 1) constructing the modified lotus graph; 2) formulating the adjacency matrix of the modified lotus graph; 3) determining the eigenvalues of the adjacency matrix of the modified lotus graph; 4) determining the eigen basis of the adjacency matrix of the modified lotus graph; 5) determining the general form of the basis of the eigenspace for the adjacency matrix of the modified lotus graph. **Results**. The eigen basis of the connected modified lotus graph* Trh_{2n+1} *for* $\lambda = -1$ *consists of* $m(\lambda = -1) = 2n - 1$ *distinct eigenvectors. The eigen basis of the connected modified lotus graph* Trh_{2n+1} *for* $\lambda = 1$ *consists of* $m(\lambda = 1) = 2n - 1$ *distinct eigenvectors. The eigenvector basis of the crowned modified lotus graph* Trm_{2n+5} *for* $\lambda = -2$ *consists of* $m(\lambda = -2) = 2n + 3$ *distinct eigenvectors. The eigenvector basis of the crowned modified lotus graph* Trm_{2n+5} *for* $\lambda = 2$ *consists of* $m(\lambda = 2) = 2n + 3$ *distinct eigenvectors. **Conclusion**. Since the number of repeated eigenvalues is equal to the number of corresponding eigenvectors for each eigenvalue, it can be concluded that the algebraic multiplicity equals the geometric multiplicity* $(\alpha(\lambda) = \beta(BRE_\lambda))$*.*

***Keywords**: modified lotus graph; adjacency matrix; eigenvalues; eigen basis*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu cabang ilmu matematika adalah aljabar linear. Aljabar linear adalah bidang studi matematika yang mempelajari system persamaan linear, matriks, vektor, dan transformasi linear. Graf juga merupakan salah satu aplikasi dari aljabar linear. Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namum memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.

Namun graf tidak hanya direpresentasikan dalam bentuk gambar tetapi dapat juga direpresentasikan dalam bentuk matriks. Matriks pertama kali ditemukan oleh Arthur Cayley (1821-1895), pada awalnya matriks hanya dianggap permainan karena tidak bisa diaplikasikan. Barulah pada tahun 1925 matriks digunakan pada mekanika kuantum. Selanjutnya matriks mengalami perkembangan yang pesat dan digunakan dalam berbagai bidang.

Matriks dapat digunakan untuk merepresentasikan graf dalam beberapa bentuk, seperti matriks ketetanggaan, matriks kebersisian, dan matriks hubung. Matriks ketetanggaan merepresentasikan hubungan antara simpul-simpul pada graf, di mana elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j menunjukkan apakah simpul i dan j terhubung atau tidak. Selain itu, matriks ketetanggaan juga dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen dan derajat titik pada graf sederhana. (Saputri, Kiftiah, & Fran, 2020)

Nilai eigen dan basis ruang eigen adalah dua hal yang saling berkaitan dan merupakan konsep penting dalam aljabar linear. Basis ruang eigen dapat digunakan untuk menghitung nilai eigen dari matriks yang merepresentasikan graf. Berdasarkan beberapa uraian di atas, penulis tertarik untuk menemukan basis ruang eigen pada matriks ketetanggaan graf serta menuangkan hasilnya dalam bentuk skripsi dengan rencana judul **"Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf Teratai Termodifikasi"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah "Bagaimana menentukan bentuk umum basis dari ruang eigen pada matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi?"

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah menentukan bentuk umum basis dari ruang eigen pada matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan tidak menyimpang dari tujuan penelitian, maka perlu adanya batasan yaitu untuk graf teratai termodifikasi terhubung Trh_{2n+1} dengan $n \geq 1$ dan graf teratai termodifikasi bermahkota Trm_{2n+5} dengan $n \geq 1$ dengan menggunakan nilai eigen bulat yang muncul berulang pada setiap graf.

1.5 Landasan Teori

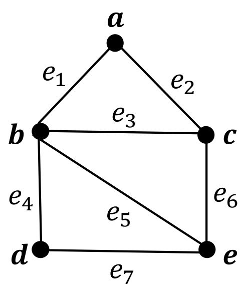
Berikut ini adalah beberapa landasan teori yang digunakan dalam tugas akhir ini diantaranya:

1.5.1. Graf

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul. (Munir, 2010)

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$.

Contoh :

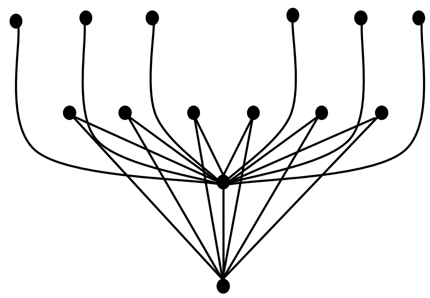


Gambar 1. 1 Graf G

Dari Gambar 1.1 Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$ dan mempunyai 7 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 7$, dimana $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (b, e), (c, e), (d, e)\}$. Graf G dapat pula ditulis sebagai $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ dimana $e_1 = (a, b)$, $e_2 = (a, c)$, $e_3 = (b, c)$, $e_4 = (b, d)$, $e_5 = (b, e)$, $e_6 = (c, e)$, $e_7 = (d, e)$.

1.5.2. Graf Teratai

Graf teratai dibentuk dari graf lengkap K_1 korona graf bintang S_n. Sebanyak $n - 1$ titik pada graf bintang menghasilkan satu titik baru dan titik baru tersebut terhubung pada titik pusat graf bintang.



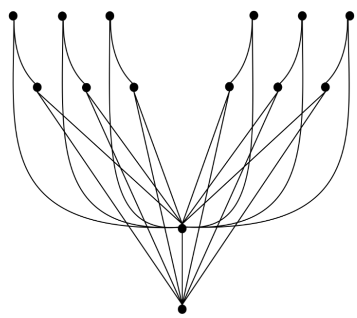
Gambar 1. 2 Graf Teratai Tr_7

Graf teratai mempunyai $n-1$ titik berderajat dua, $n-1$ titik berderajat satu, satu titik berderajat $2n-1$, dan satu titik berderajat n. Graf teratai berorde $2n$ dinotasikan Tr_n untuk $n \geq 3$ dengan label titik dan sisi sebagai berikut : $V(Tr_n) = \{v_i \mid 0 \leq i \leq n\} \cup \{v'_i \mid 0 \leq i \leq n\}$.

$E(Tr_n) = \{e_j, e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ dengan $e_i = v_0 v'_i$; $0 \leq i \leq n$, $e_i = v_0 v_j$; $1 \leq j \leq n$, dan $e_i = v'_0 v_i$; $1 \leq i \leq n$. (Hasmawati, 2020)

1.5.3. Graf Teratai Termodifikasi Terhubung

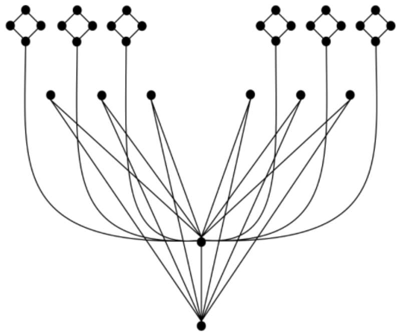
Graf teratai termodifikasi terhubung adalah graf yang mempunyai $2n$ titik berderajat tiga, $2n$ titik berderajat dua, satu titik berderajat $2n-1$, dan satu titik berderajat $4n+1$. Graf teratai termodifikasi terhubung berorde $4n+2$ dinotasikan Trh_{2n+1} untuk $n \geq 1$.



Gambar 1. 3 Graf Teratai Termodifikasi Terhubung Trh_7

1.5.4. Graf Teratai Termodifikasi Bermahkota

Graf teratai termodifikasi bermahkota adalah graf yang mempunyai $2n$ titik berderajat tiga, $8n$ titik berderajat dua, satu titik berderajat $2n+1$, dan satu titik berderajat $4n+1$. Graf teratai termodifikasi bermahkota berorde $10n+2$ dinotasikan Trm_{2n+5} untuk $n \geq 1$.



Gambar 1. 4 Graf Teratai Termodifikasi Bermahkota Trm_7

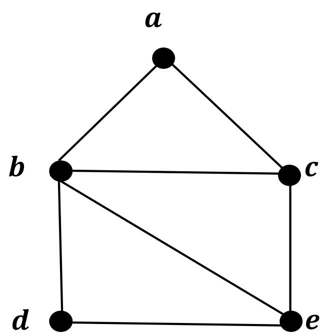
1.5.5. Matriks Ketetanggaan (*Adjacent*)

Matriks ketetanggan merupakan salah satu matriks yang diperoleh dari merepresentasikan suatu graf dengan cara melihat hubungan antar simpul yang ada pada suatu graf tersebut. (Saputri, Kiftiah, & Fran, 2020)

Definisi 1.5.5.1 Misalkan G adalah sebuah graf (sederhana dan tak berarah) dengan himpunan simpul $V(G) = \{1, \ldots, n\}$. Matriks *adjacent* dari G ditunjukkan sebagai matriks $n \times n$, $A_G = (A_{ij})$, dimana

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{untuk hal yang lain} \end{cases}$$

Contoh 1.5.5.1 Bentuk matriks ketetanggan dari graf di bawah adalah



$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.5.6. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 1.5.6.1 Jika A merupakan matriks berordo $n \times n$, maka vektor taknol x pada R^n disebut vektor eigen dari A (atau dari operator matriks T_A) jika A_x merupakan perkalian skalar dari x, yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Untuk sembarang skalar λ, skalar λ disebut nilai eigen dari A (atau dari T_A). Dan x disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. (Howard Anton, 2010)

Definisi 1.5.6.2 Jika A adalah matriks berordo $n \times n$, maka λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$. Agar λ menjadi nilai eigen dari A, persamaan ini harus memiliki solusi taknol untuk x.

Definisi 1.5.6.3 Perhatikan bahwa persamaan $Ax = \lambda x$ dapat pula ditulis sebagai $Ax = \lambda I x$ atau sama dengan berikut $(\lambda I - A)x = 0$, dimana $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ jika hanya jika x merupakan solusi nontrivial dari $(\lambda I - A)x = 0$

Contoh 1.5.6.1 Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks berordo 2×2 di bawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 1.5.6.2 bahwa nilai eigen dari A adalah solusi dari persamaan $det(\lambda I - A) = 0$ sehingga dapat ditulis sebagai :

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0$$

Diperoleh

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Maka dapat dilihat bahwa nilai eigen dari A adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$.

Selanjutnya berdasarkan definisi 1.5.6.3, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan 2 nilai eigen di atas jika dan hanya jika x merupakan solusi nontrivial dari $(\lambda I - A)x = 0$, sehingga

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 3$, persamaannya adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusinya adalah $x_1 = \frac{1}{2} t \text{ dan } x_2 = t$, sehingga vektor eigennya adalah

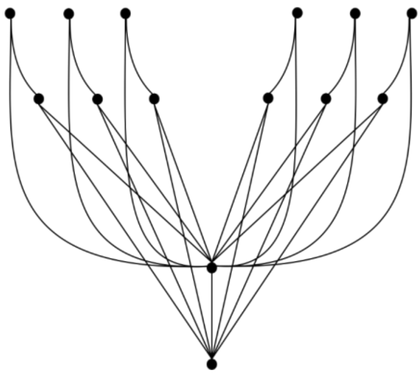
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} t \\ t \end{bmatrix}$$

1.5.7. Spektrum Graf

Spektrum graf adalah kumpulan nilai eigen berbeda dan multiplisitasnya. Spektrum graf berupa matriks yang memuat nilai eigen pada baris pertama dan multiplisitas pada baris kedua. (Agustina, Kusumastuti, & Fran, 2022)

Definisi 1.5.7.1 Misalkan $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen berbeda dari sebuah matriks G dan $m(\lambda_1),\ m(\lambda_2), \dots ,\ m(\lambda_n)$, maka spektrum dapat dinyatakan dengan matriks berordo $2 \times n$ yang memuat $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1),\ m(\lambda_2), \dots ,\ m(\lambda_n)$ pada baris kedua. Jadi spektrum graf dinotasikan sebagai $Spec\ (G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$ (Biggs, 1993).

Contoh 1.5.7.1 Tentukan spektrum dari graf di bawah ini



Gambar 1. 5 Graf Teratai Termodifikasi Terhubung Trh_7

Berdasarkan Definisi 1.5.5.1 maka diperoleh matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi terhubung sebagai berikut :

$$A = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{l} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix}
-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda
\end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan *software* MATLAB diperoleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$\lambda^{14} - 25\lambda^{12} - 24\lambda^{11} + 135\lambda^{10} + 120\lambda^{9} - 335\lambda^{8} - 240\lambda^{7} + 455\lambda^{6} + 240\lambda^{5} - 351\lambda^{4} - 120\lambda^{3} + 145\lambda^{2} + 24\lambda - 25 = 0$$

Diperoleh solusi nilai eigen sebagai berikut :

$\lambda_1 = -3{,}1224$, $\lambda_2 = -2{,}4357$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -1$, $\lambda_5 = -1$, $\lambda_6 = -1$, $\lambda_7 = -1$,
$\lambda_8 = 0{,}6729$, $\lambda_9 = 1$, $\lambda_{10} = 1$, $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{12} = 1$, $\lambda_{13} = 1$, $\lambda_{14} = 4{,}8852$

Sehingga spektrum dari graf teratai termodifikasi terhubung Trh_7 adalah sebagai berikut :

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} 4{,}8852 & 1 & 0{,}6729 & -1 & -2{,}4357 & -3{,}1224 \\ 1 & 5 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5.8. Ruang Eigen dan Basis

Definisi 1.5.8.1 Vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor taknol x yang memenuhi $Ax = \lambda x$. Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan λ merupakan vektor taknol di ruang penyelesaian dari $(\lambda I - A)x = 0$. Ruang penyelesaian ini disebut ruang eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 1.5.8.1 Berdasarkan contoh 1.5.7.1 telah diperoleh solusi nilai eigennya yaitu sebagai berikut.

$\lambda_1 = -3{,}1224$, $\lambda_2 = -2{,}4357$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -1$, $\lambda_5 = -1$, $\lambda_6 = -1$, $\lambda_7 = -1$,
$\lambda_8 = 0{,}6729$, $\lambda_9 = 1$, $\lambda_{10} = 1$, $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{12} = 1$, $\lambda_{13} = 1$, $\lambda_{14} = 4{,}8852$

Berdasarkan Definisi 1.5.8.1 akan dicari basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = -1$.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Gauss-Jordan pada *software* MATLAB diperoleh matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dimisalkan $x_{14} = t, x_{12} = s, x_{10} = r, x_8 = q, x_6 = p$, diperoleh

$x_{13} + x_{14} = 0,\ x_{13} = -t$

$x_{11} + x_{12} = 0,\ x_{11} = -s$

$x_9 + x_{10} = 0,\ x_9 = -r$

$x_7 + x_8 = 0,\ x_7 = -q$

$x_5 + x_6 = 0,\ x_5 = -p$

$x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} + x_{14} = 0,\ x_4 = -p - q - r - s - t$

$x_3 - x_6 - x_8 - x_{10} - x_{12} - x_{14} = 0,\ x_3 = p + q + r + s + t$

$x_2 = 0,\ x_1 = 0$

Maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ -p \\ -p \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ -q \\ 0 \\ 0 \\ -q \\ q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ -r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ -s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p, q, r, s, t \in \mathbb{R}$$

Sehingga vektor eigennya adalah

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan vektor eigen di atas, maka basis ruang eigen dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$BRE_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Selanjutnya akan dicari basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Gauss-Jordan pada *software* MATLAB diperoleh matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dimisalkan $x_{14} = t, x_{12} = s, x_{10} = r, x_8 = q, x_6 = p$, diperoleh

$x_{13} + x_{14} = 0$, $x_{13} = t$

$x_{11} + x_{12} = 0$, $x_{11} = s$

$x_9 + x_{10} = 0$, $x_9 = r$

$x_7 + x_8 = 0$, $x_7 = q$

$x_5 + x_6 = 0$, $x_5 = p$

$x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} + x_{14} = 0$, $x_4 = -p - q - r - s - t$

$x_3 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} + x_{14} = 0$, $x_3 = -p - q - r - s - t$

$x_2 = 0$, $x_1 = 0$

Maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \\ -p \\ p \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ -q \\ 0 \\ 0 \\ q \\ q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \\ -r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -s \\ -s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -t \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p, q, r, s, t \in \mathbb{R}$$

Sehingga vektor eigennya adalah

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan vektor eigen di atas, maka basis ruang eigen dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$BRE_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

BAB II
METODE PENELITIAN

2.1. Jenis Penelitian

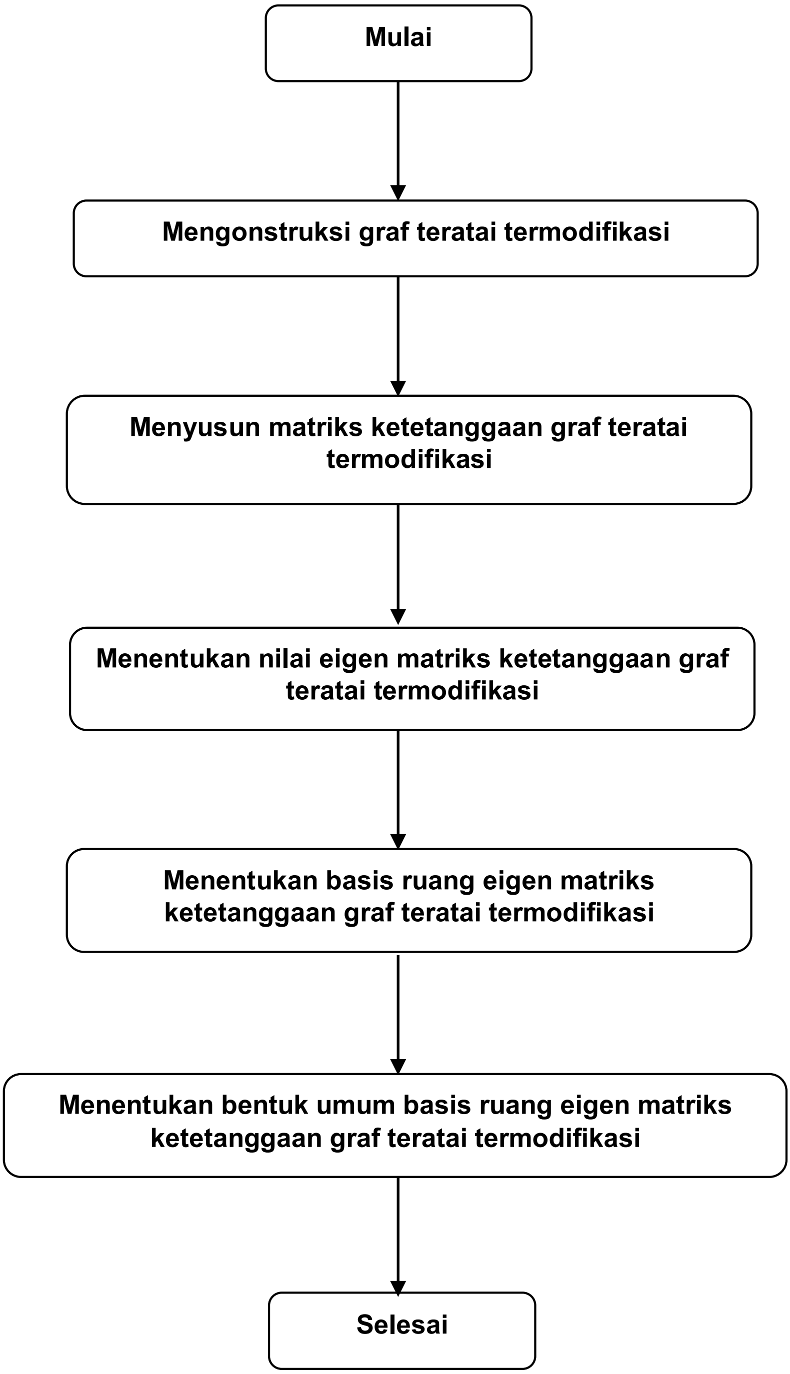
Metode yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah studi pustaka, yakni metode penelitian yang menggunakan sumber data pustaka sebagai objek penelitian. Dalam metode ini, peneliti melakukan pengumpulan data dari berbagai sumber pustaka seperti buku, jurnal, artikel, dan lainnya yang berkaitan dengan topik penelitian.

2.2. Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Perpustakaan dan Laboratorium Aljabar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin dimulai sejak bulan Januari tahun 2023.

2.3. Tahapan Penelitian

1. Melakukan studi pustaka terkait dengan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi.
2. Menentukan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi dengan alur sebagai berikut


Mulai
Mengonstruksi graf teratai termodifikasi
Menyusun matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi
Menentukan nilai eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi
Menentukan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi
Menentukan bentuk umum basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf teratai termodifikasi
Selesai