DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, W. 2005. Mine Geology, exploration methods, ore processing, resource estimation, and project development. PT. Inco: Sorowako.

Ahmad, W. 2006. Fundamentals of Chemistry, Mineralogy, Weathering Processes and Laterite Formation. PT.Vale Inco: Sorowako.

Ahmad, W. 2009. Fundamentals of Chemistry, Mineralogy, Weathering Processes, Formation and Exploration. PT.Vale Inco: Sorowako.

Al-Amri, A.M. 2018. Principle of Geophysics. Riyadh: King Saud University.

Alqadri, A. 2021. Aplikasi Geolistrik Resistivitas dalam Perencanaan Pembangunan Jembatan Penghubung Pulau Buton dan Pulau Muna, Sulawesi Tenggara. Universitas Hasanuddin: Makassar.

Cai, J. T., Ruan, B. Y., Zhao, G. Z., & Zhu, G. P. 2013. Two-Dimensional Modeling of Complex Resistivity Using Finite Element Method. Chinese Journal of Geophysics, 50(6), 1615-1624.

Coggon. J. H (1971). Electromagnetic And Electrical Modeling By The Finite Element Method. Geophysics, Vol. 36, No.1, 132-155.

Dahlin, T., dan Zhou, B. 2006. Multiple-gradient array measurements for multichannel 2D resistivity imaging. Near Surface Geophysics. European Association of Geoscientists & Engineers (EAGE).

Elias, M. 2001. Global Lateritic Nickel Resources. CSA Australia Pty Ltd, New Caledonia Nickel Conference 25th, 2001.

Fajar, M. 2022. Penentuan Zona Intrusi Air Laut Menggunakan Metode Tahanan Jenis di Kelurahan Soreang, Kabupaten Maros. Universitas Hasanuddin: Makassar.

Golightly, J. 1979. Geologi of Soroako Nickeliferous Laterite Deposits. Int. Laterite Simp. New Orleans.

Grandis, H. 2009. Pengantar Inversi Geofisika. Himpunan Ahli Geofisika Indonesia (HAGI): Bandung.

Inrian, F.A. 2023. Identifikasi Profil Nikel Laterit Berdasarkan Respon Metode Electrical Resistivity Tomography (ERT) dan Korelasinya Dengan Data Bor Area “FAI” Pada Konsesi PT. Vale Indonesia Tbk. Sorowako, Kabupaten Luwu Timur, Sulawesi Selatan. Skripsi Teknik Geofisika, Universitas Pembangunan Nasional “Veteran”: Yogyakarta.

Looke, M.H. 2004. Tutorial: 2-D and 3-D Electrical Imaging Surveys. Geotomo Software. Penang, Malaysia.

Lowrie, W. 2007. Second Edition: Fundamentals of Geophysics. Cambridge University Press: Cambridge.

Osborne, R.C dan Waraspati, D. 1986. Applied Mine Geology at PT. Inco, Soroako, South Sulawesi, Indonesia.

Pinandhito, H.S. 2018. Identifikasi Profil Deposit Nikel Laterit Berdasarkan Analisis ERT dan Data Bor Lapangan “VDM” Area PT. Vale Indonesia, Tbk. Universitas Gadjah Mada: Yogyakarta.

Sasaki, Y. 1989. Two-dimensiomal Joint Inversion of Magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data. Geophysiscs. Vol. 54 No.2, 254-262.

Sukamto, R. 1975. Geologi Sulawesi. Departemen Pertambangan dan Energi. Direktorat Jenderal Geologi dan Sumber Daya Mineral, Pusat Penelitian dan Pengembangan.

Surawan, Y. 2014. Optimalisasi Penggunaan ERT Konfigurasi Gradient Dalam Memaksimalkan Eksplorasi Nikel Laterit. Universitas Hasanuddin: Makassar.

Syamsuddin. 2007. Penentuan Struktur Bawah Permukaan Bumi Dangkal Dengan Menggunakan Metoda Geolistrik Tahanan Jenis 2D Studi Kasus Potensi Tanah Longsor di Panawangan, Ciamis. Tesis. Program Studi Geofisika Terapan. Bandung: Institut Teknologi bandung.

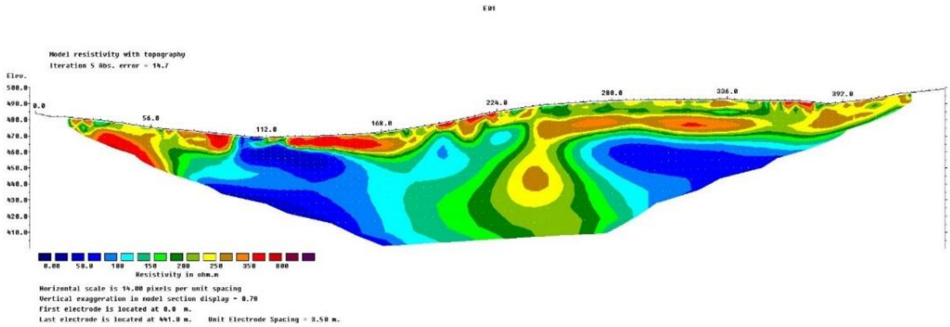
Telford, W.M., Geldart., dan Sheriff, R. 1990. Applied Geophysics Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

USGS. 1996-2023. Minerals Commodity Summaries. US Geological Survey (USGS), Reston, Virginia, USA, https://www.usgs.gov/centers/national-minerals-information-center/nickel-statistics-and-information.

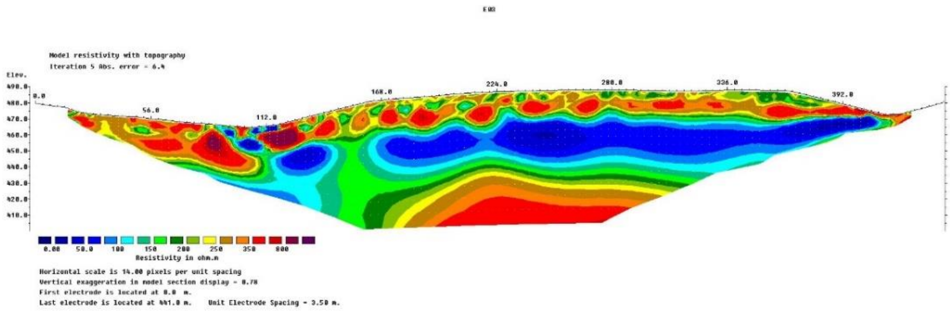
LAMPIRAN

Lampiran 1 Hasil Inversi Data ERT di *East Block*

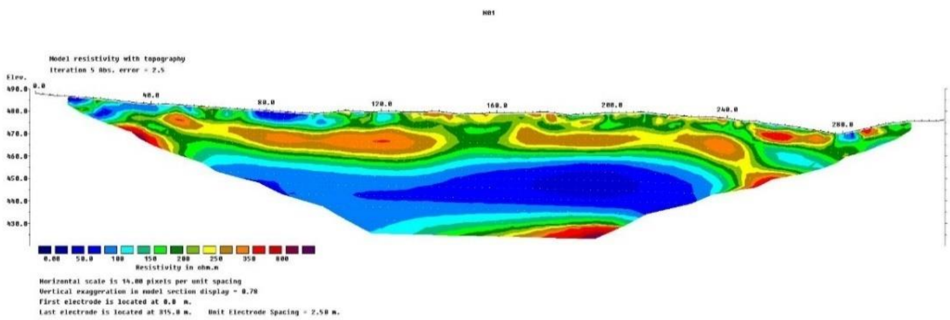
Lintasan E01



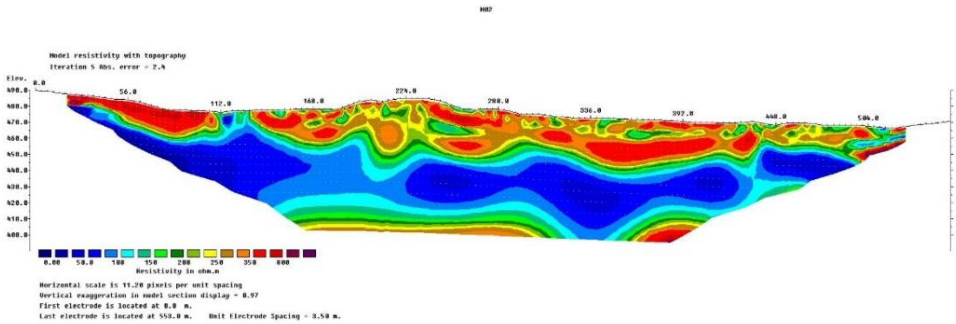
Lintasan E03



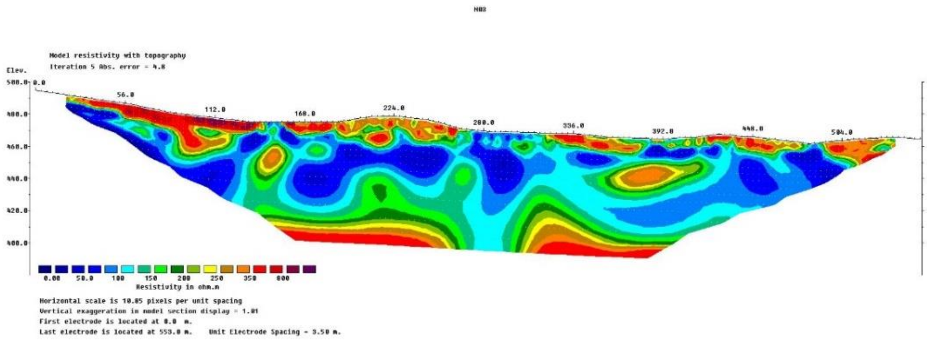
Lintasan N01



Lintasan N02

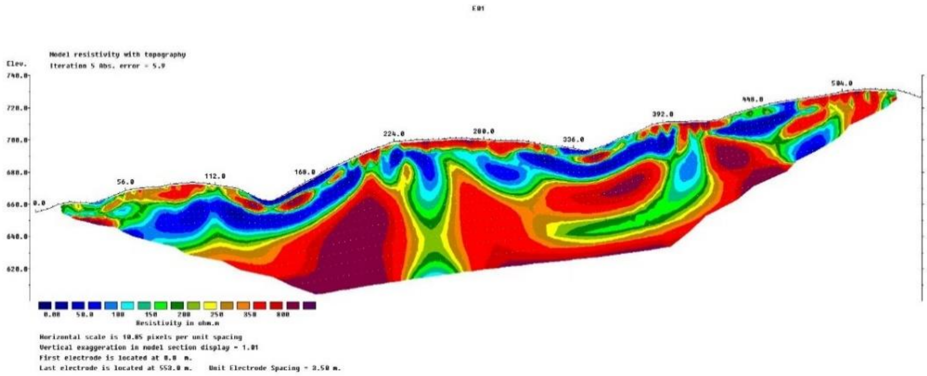


Lintasan N03

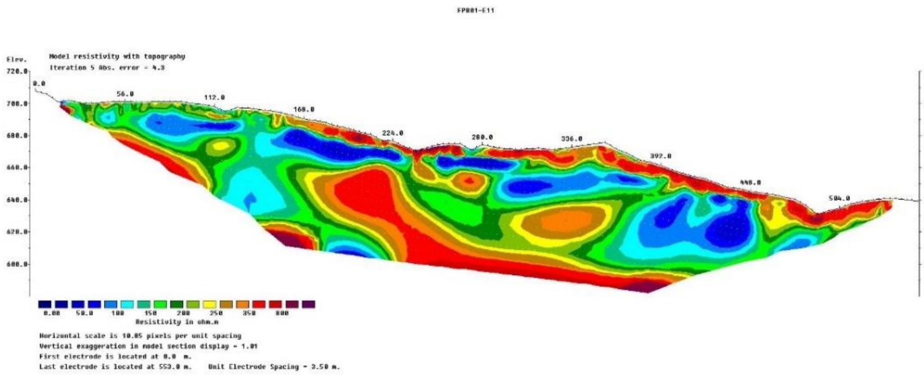


Lampiran 2 Hasil Inversi Data ERT di *West Block*

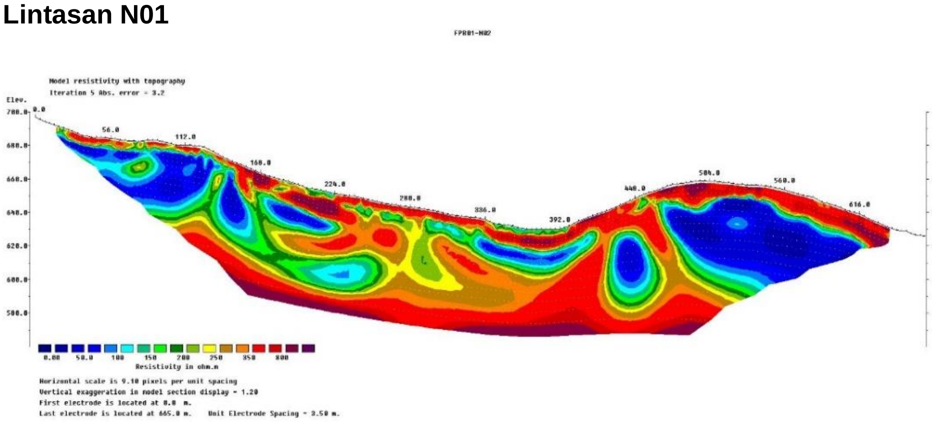
Lintasan E02



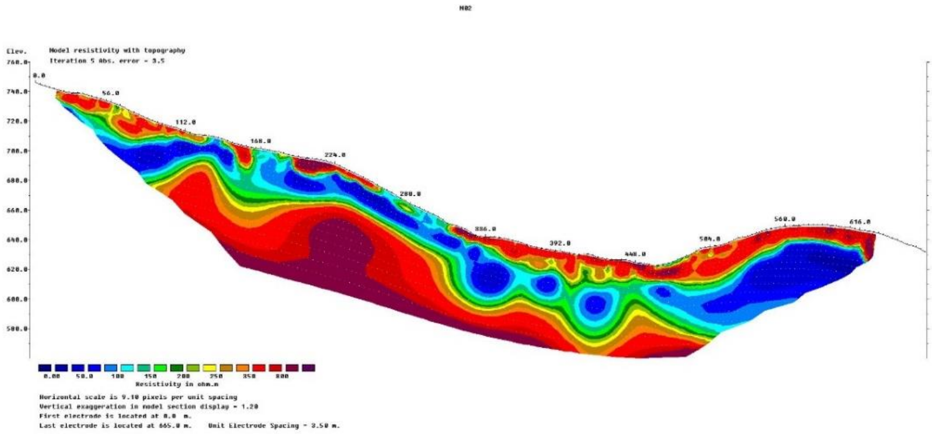
Lintasan E03



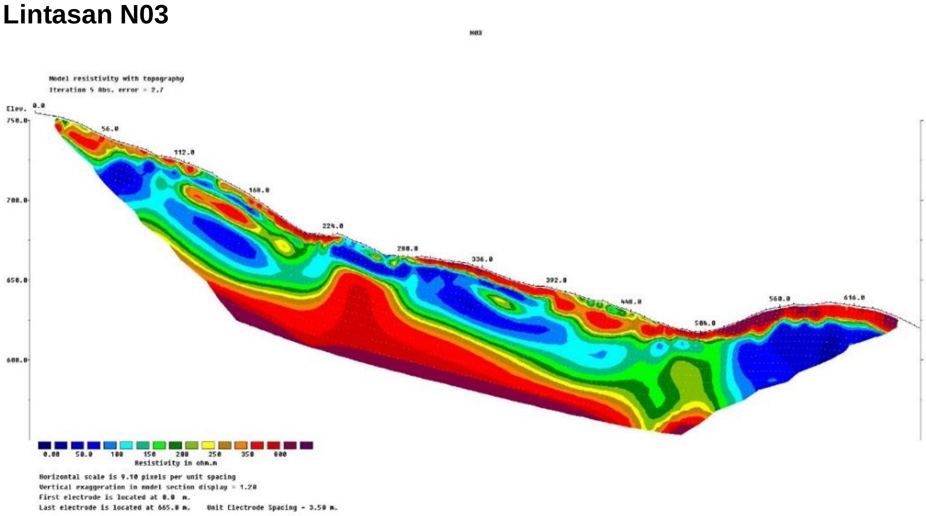
Lintasan N01



Lintasan N02



Lintasan N03



Lampiran 3 Pemodelan ke Depan (*Forward modeling)*

Pemodelan ke depan adalah proses untuk memprediksi distribusi potensial listrik pada setiap titik dipermukaan tanah, berdasarkan persamaan yang menggambarkan aliran arus listrik melalui tanah dengan distribusi resistivitas yang tidak homogen. Proses ini penting dalam inversi karena diperlukan untuk menghitung nilai resistivitas semu teoritis/kalkulasi. Nilai ini kemudian dibandingan dengan nilai terukur dari data lapangan untuk mengevaluasi kesesuaian model terhadap kondisi sebenarnya di bawah permukaan. Metode yang sering digunakan dalam pemodelan kedepan adalah metode *Finite Difference* (FD) dan metode *Finite Element* (FE). *Finite Element* membagi domain menjadi elemen-elemen kecil yang lebih fleksibel dalam bentuk seperti *rectangular* atau *triangular*. Setiap elemen memiliki titik-titik simpul (Nodes), dimana potensial dihitung dan kemudian di interpolasi di seluruh elemen. Metode FE cocok untuk daerah dengan topografi yang kompleks atau batas yang tidak beraturan (Looke, 2004).

Untuk mendapatkan kesesuaian antara model teoritis (respon model) dan data lapangan, dilakukan proses coba-coba (*trial and error)* dengan cara mengubah nilai parameter modelnya. Istilah "*Forward Modeling"* tidak hanya mencakup perhitungan respon model tetapi juga merupakan proses coba-coba secara manual untuk mendapatkan model yang memberikan respon yang cocok dengan data lapangan. Penggunaan *Forward Modeling* dalam kasus ketika terdapat *noise* yang cukup besar lebih efektif digunakan (Grandis, 2009).

- **Dalam metode geolistrik, penerapan *finite element* dalam mencari potensial arus.**

Ketika ada sumber arus (I) yang mengalir keluar atau masuk, maka untuk menghitung distribusi potensial (V) dengan konduktivitas listrik (σ) tidak homogen, maka digunakan persamaan Poisson.

$$\nabla(\sigma.\nabla V) = I$$

Pada kenyataannya arus dialirkan melalui probe yang terbatas (arus dialirkan melalui suatu alat atau antarmuka fisik dengan ukuran dan bentuk tertentu bukan melalui titik yang benar-benar kecil atau tidak berdimensi). Untuk tujuan pemodelan, arus dianggap berasal dari sumber titik. Oleh karena itu, sumber arus dapat di jelaskan oleh fungsi delta Diract (δ) dan arus titik (I) (Coggon, 1971). Jika A merupakan titik sumber arus, maka:

$$\nabla(\sigma.\nabla V) = I\delta(A)$$

Dimana (σ) merupakan konduktivitas dan ∇V ialah perubahan potensial. Maka dengan menerapkan transformasi Fourier Cosinus akan didapatkan nilai potensialnya.

$$V_{(x,y,k)} = \int_0^{\infty} V_{x,y,z}\, Cos\,(Kz)dz$$

Dengan menggunakan fungsi Bessel dengan pendekatan batas tak hingga, maka variasi potensial listrik pada penampang geolistrik 2D diberikan oleh:

$$F(v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\sigma\,(\nabla V)^2 + \frac{1}{2}\sigma k^2 V^2 - I\delta(A)V\right] d\Omega$$

Daerah domain Ω didiskritisasi menjadi beberapa elemen berbentuk segiempat seperti pada gambar. Jumlah node total adalah n, maka integral domain Ω didekomposisi menjadi integral untuk setiap elemen e (Cai dkk., 2007).

$$F(v) = \sum_{\Omega} \int_{e} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{\nabla V})^2\, \boldsymbol{d\Omega} + \sum_{\Omega} \int_{e} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma k^2 V^2}\, \boldsymbol{d\Omega} - \sum_{\Omega} \int_{e} \boldsymbol{I\delta(A)V\, d\Omega}$$

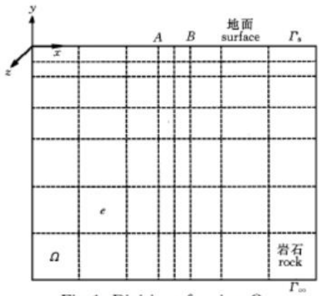


Fig. 1 Division of region Ω

Jika persamaan diatas diselesaikan pada setiap suku masing-masing maka;

1. Suku pertama

$$\sum_{\Omega} \int_{e} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{\nabla V})^2\, \boldsymbol{d\Omega} = \sum_{\Omega} \int_{e} \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

- Apabila potensial (V) terhadap x diturunkan secara parsial maka

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{i-1}^{n} \frac{\partial N_1}{\partial x} V_1 \quad ; n = node$$

$$= \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)^T V_e$$

Dengan $V_e = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T dan \frac{\partial N_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x}\right)^T, maka$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 = \boldsymbol{V_e^T} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{V_e}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x}\right)^T (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

- Apabila potensial (V) terhadap y diturunkan secara parsial maka

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}} = \sum_{i-1}^{n} \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial \mathrm{y}} V_1 \quad ; n = node$$

$$= \left(\frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial \mathrm{y}}\right)^T V_e$$

Dengan $V_e = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T dan \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial \mathrm{y}} = \left(\frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_4}{\partial \mathrm{y}}\right)^T, maka$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{y}}\right)^2 = \boldsymbol{V}_e^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{y}}\right)^T \boldsymbol{V}_e$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}}\right)^2 = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T \left(\frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_4}{\partial \mathrm{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{N}_4}{\partial \mathrm{y}}\right)^T (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

Dengan mensubtitusikan ke dalam persamaan awal pada suku pertama maka;

$$\sum\nolimits_{\Omega} \int_{e} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{\sigma}\, (\boldsymbol{\nabla V})^2\, \boldsymbol{d\Omega}$$

$$= \int_{e} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{\sigma} \left[\boldsymbol{V}_e^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{V}_e^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{y}}\right)^T \boldsymbol{V}_e \right] \boldsymbol{dxdy}$$

Jika $\boldsymbol{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{y}}\right)^T$ merupakan matriks maka $[K_{1e}]$

$$\sum\nolimits_{\Omega} \int_{e} \frac{1}{2} \sigma\, (\nabla V)^2\, d\Omega = \frac{1}{2} V_e^T [K_{1e}] V_e$$

Dimana

$$K_{1e} = \int_{e} \sum_{i=1}^{4} \sigma \left[\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}\right)^T \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{y}}\right)^T \right] dxdy$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left\{ \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \sigma \left[\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \xi}\right)^T \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \eta}\right)^T \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \eta}\right) \right] d\xi d\eta \right\}$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \sigma \left[\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \xi}\right)^T \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \eta}\right)^T \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \eta}\right) \right] d\xi d\eta$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathbf{1}e} = \boldsymbol{\sigma} \int_{-\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} \int_{-\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} [\mathbf{B}]^{\mathbf{T}} [\boldsymbol{B}]\, \boldsymbol{d\xi d\eta}$$

Untuk mendapatkan matriks $[B]$ atau *shape funcation* maka terlebih dahulu membuat fungsi uji linear menggunakan persamaan Polinomial Langrange lalu menurunkan fungsi uji tersebut terhadap arah ξ dan η.

Langkah-langkah dalam menyelesaikan pemodelan kedepan menggunakan *finite element* adalah melakukan diskritisasi atau *meshing*, dalam satu domain dibagi menjadi beberapa elemen. Kemudian mencari pola dan bentuk distribusi menggunakan *polynomial* atau perpindahan dan turunannya pada setiap mesh untuk melihat perpindahan dari arah x dan y. Desain mesh yang digunkaan untuk komputasi sangatlah penting. Jumlah node menentukan tingkat resolusi spasial, karena itu pemilihan node memiliki dampak yang signifikan terhadap akurasi.

Arah koordinat horizontal diwakili oleh $\xi(xi)$ dan arah koordinat vertikal diwakili oleh $\eta(eta)$. Setiap node memiliki 2 DOF (*Degree of freedom*/derajat kebebasan) yaitu node dapat mengalami perpindahan kearah x atau vertikal yang dinyatakan dalam (u) dan perpindahan kearah y atau horizontal dinyatakan dalam (v) seperti pada gambar. Dalam pendekatan linear 2D untuk perpindahan node $(u\ dan\ v)$ dan shape function (N) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ a_4 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

a. Shape Function (Fungsi Bentuk)

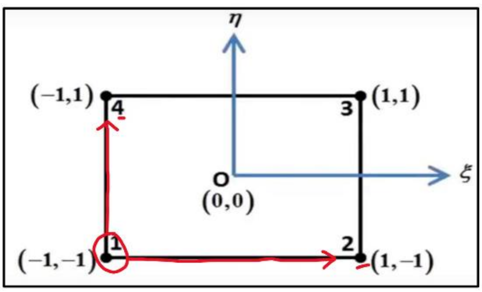
Setiap node memiliki fungsi bentuk yang berbeda-beda, sehingga pada elemen dengan 4 node akan diperoleh 4 shape function juga. Untuk menghitung shape function setiap node dapat digunakan polynomial Langrange 2D (Xiong, 2022):

$$N_k = \frac{\xi - \xi_m}{\xi_k - \xi_m}\ x\ \frac{\eta - \eta_m}{\eta_k - \eta_m}$$

Dengan k adalah titik node, dan m adalah titik node yang terhubung dengan node yang dicari.

- **Shape function Node 1**

  Pada node 1 memiliki DOF kearah x menuju node 2 dan kearah y menuju node 4



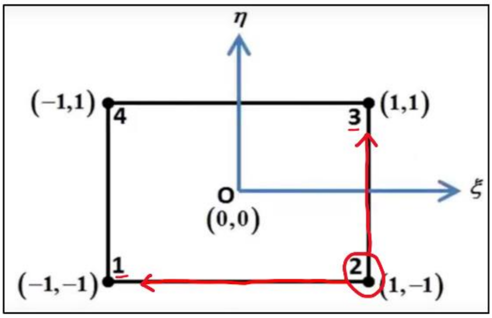
$$N_1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}\ x\ \frac{\eta - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4}$$

$$N_1 = \frac{\xi - 1}{-1 - 1}\ x\ \frac{\eta - 1}{-1 - 1}$$

$$N_1 = \frac{-(1 - \xi)}{-2}\ x\ \frac{-(1 - \eta)}{-2}$$

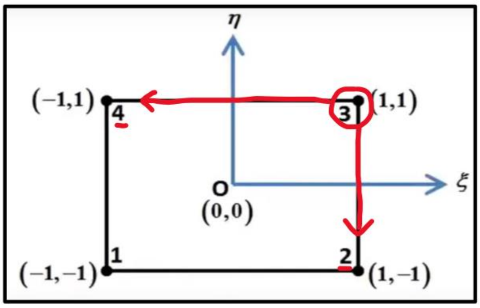
$$N_1 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}$$

- **Shape function Node 2**
  Pada node 2 memiliki DOF kearah x menuju node 1 dan kearah y menuju node 3



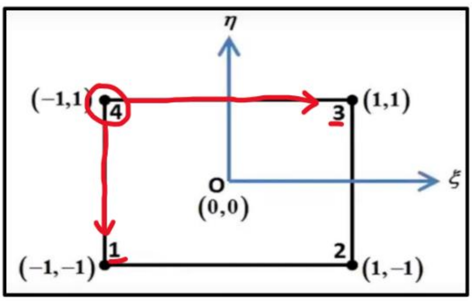
$$N_2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\, x\, \frac{\eta - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3}$$
$$N_2 = \frac{\xi - (-1)}{-1 - (-1)}\, x\, \frac{\eta - 1}{-1 - 1}$$
$$N_2 = \frac{(1 + \xi)}{2}\, x\, \frac{-(1 - \eta)}{-2}$$
$$N_2 = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

- **Shape function Node 3**
  Pada node 3 memiliki DOF kearah x menuju node 4 dan kearah y menuju node 2



$$N_3 = \frac{(\xi - \xi_4)(\eta - \eta_2)}{(\xi_3 - \xi_4)(\eta_3 - \eta_2)}$$
$$N_3 = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)}\, x\, \frac{\eta - (-1)}{1 - (-1)}$$
$$N_3 = \frac{(1 + \xi)}{2}\, x\, \frac{(1 + \eta)}{2}$$
$$N_3 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

- **Shape function Node 4**
  Pada node 4 memiliki DOF kearah x menuju node 4 dan kearah y menuju node



$$N_4 = \frac{(\xi - \xi_3)(\eta - \eta_1)}{(\xi_4 - \xi_3)(\eta_4 - \eta_1)}$$
$$N_4 = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)}\, x\, \frac{\eta - (-1)}{1 - (-1)}$$
$$N_4 = \frac{(1 + \xi)}{2}\, x\, \frac{(1 + \eta)}{2}$$
$$N_4 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks maka *shape funcation* pada setiap nodenya yaitu

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Dari shape function dapat dihitung matriks $[B]$ dengan mensubstitusi shape function setiap node.

1. Dalam arah horizontal (ξ)

- Untuk N_1

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)}{\partial \xi}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1-\eta-\xi+\xi\eta}{\partial \xi}$$

$$= \frac{1}{4}(0-0-1+\eta)$$

$$= \frac{1}{4}(-1+\eta)$$

- Untuk N_2

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)}{\partial \xi}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1-\eta+\xi-\xi\eta}{\partial \xi}$$

$$= \frac{1}{4}(0-0+1-\eta)$$

$$= \frac{1}{4}(1-\eta)$$

- Untuk N_3

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)}{\partial \xi}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1+\eta+\xi+\xi\eta}{\partial \xi}$$

$$= \frac{1}{4}(0+0+1+\eta)$$

$$= \frac{1}{4}(1+\eta)$$

- Untuk N_4

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)}{\partial \xi}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1+\eta-\xi-\xi\eta}{\partial \xi}$$

$$= \frac{1}{4}(0 + 0 - 1 - \eta)$$

$$= \frac{1}{4}(-1 - \eta)$$

2. Dalam arah vertikal (η)

- Untuk N_1

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)}{\partial \eta}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1 - \eta - \xi + \xi\eta}{\partial \eta}$$

$$= \frac{1}{4}(0 - 1 - 0 + \xi)$$

$$= \frac{1}{4}(-1 + \xi)$$

- Untuk N_2

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)}{\partial \eta}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1 - \eta + \xi - \xi\eta}{\partial \eta}$$

$$= \frac{1}{4}(0 - 1 + 0 - \xi)$$

$$= \frac{1}{4}(-1 - \xi)$$

- Untuk N_3

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)}{\partial \eta}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta + \xi + \xi\eta}{\partial \eta}$$

$$= \frac{1}{4}(0 + 1 + 0 + \xi)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \xi)$$

- Untuk N_4

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)}{\partial \eta}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta - \xi - \xi\eta}{\partial \eta}$$

$$= \frac{1}{4}(0 + 1 - 0 - \xi)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \xi)$$

Substitusi ke dalam matriks $[B]$, sehingga diperoleh matriks $[B]$ sebagai berikut:

$$[B] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ 0 & (-1+\xi) & 0 & (-1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \\ (-1+\xi) & (-1+\eta) & (-1-\xi) & (1-\eta) & (1+\xi) & (1+\eta) & (1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks $[B]^T$ ditranspose kan, sehingga diperoleh:

$$[B]^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (-1+\xi) \\ 0 & (-1+\xi) & (-1+\eta) \\ (1-\eta) & 0 & (-1-\xi) \\ 0 & (-1-\xi) & (1-\eta) \\ (1+\eta) & 0 & (1+\xi) \\ 0 & (1+\xi) & (1+\eta) \\ (-1-\eta) & 0 & (1-\xi) \\ 0 & (1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix}$$

$$[C]^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1+\xi) \\ (-1+\eta) \\ (-1-\xi) \\ (1-\eta) \\ (1+\xi) \\ (1+\eta) \\ (1-\xi) \\ (-1-\eta) \end{bmatrix}$$

Dengan mensubtitusikannya ke dalam persamaan, maka didapatkan matriks K_{1e}.

$$K_{1e} = \sigma \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[B]\, d\xi d\eta$$

$$K_{1e} = \sigma \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 \\ 0 & (-1+\xi) \\ (1-\eta) & 0 \\ 0 & (-1-\xi) \\ (1+\eta) & 0 \\ 0 & (1+\xi) \\ (-1-\eta) & 0 \\ 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ 0 & (-1+\xi) & 0 & (-1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

Nilai konduktivitas dalam persamaan di dapatkan dari nilai konduktivitas titik datum untuk mendapatkan nilai pada setiap node nya. Jika mensubtitusikan semua persamaan ke dalam persamaan di suku pertama, maka akan menjadi :

$$\sum_{\Omega}\int_{e} \frac{1}{2}\sigma\,(\nabla V)^2\, d\Omega = \frac{1}{2}V_e^T \left(\int_{-x}^{x}\int_{-y}^{y} \sigma \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \right] d\xi d\zeta \right) V_e$$

Perkalian matriks suku pertama ini akan menghasilkan matriks 8x8 yang mewakili luasan area elemen

$$[K_{1e}] \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

2. Suku kedua

$$\sum\nolimits_{\Omega} \int_{e} \frac{1}{2}\sigma k^2 V^2 \, d\Omega = \frac{1}{2} V_e^T \left\{ \int_e \sum_{j=1}^{4} N_j \sigma_j (k^2 N^T N) \, dxdy \right\} V_e = \frac{1}{2} V_e^T K_{e2} V_e$$

$$K_{e2} = \int_2 \sum_{j=1}^{4} N_j \sigma_j (k^2 N^T N) dxdy$$

$$K_{e2} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [\mathrm{C}]^{\mathrm{T}} [C] \, d\xi d\eta$$

$$K_{e2} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (-1+\xi) \\ (-1+\eta) \\ (-1-\xi) \\ (1-\eta) \\ (1+\xi) \\ (1+\eta) \\ (1-\xi) \\ (-1-\eta) \end{bmatrix} [(-1+\xi) \quad (-1+\eta) \quad (-1-\xi) \quad (1-\eta) \quad (1+\xi) \quad (1+\eta) \quad (1-\xi) \quad (-1-\eta$$

Perkalian matriks suku kedua akan menghasilkan matriks 8x8 yang mewakili luasan area elemen

$$[K_{2e}] \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

3. Suku ketiga

$$\sum\nolimits_{\Omega} \int_{e} I\delta(A) V \, d\Omega = \frac{1}{2} I \, V_A = V^T P$$

Pada persamaan ini dapat menghitung kontribusi batas antar elemen lainnya ketika medan listriknya mengalami perubahan secara signifikan. Pada persamaan ini pula diterapkan kondisi batas (*boundry condition).*

Setelah didapatkan persamaan di setiap suku maka disubtitusikan ke dalam persamaan 4. dengan $F(V) = 0,$ maka

$$F(V) = \frac{1}{2} V_e^t K_{1e} V_e + \frac{1}{2} V_e^t K_{2e} V_e - V^T P$$

$$= V^T K \, V - V^T P$$

$$= KV - P$$

Dengan K adalah matriks orde 8x8 yang merupakan penjumlahan dari $(K_{1e} + K_{2e})$, V adalah vektor kolom yang merupakan potensial listrik dari semua titik elemen dalam domain *wave number*. Dengan F(V)= 0, maka

$$KV = P$$

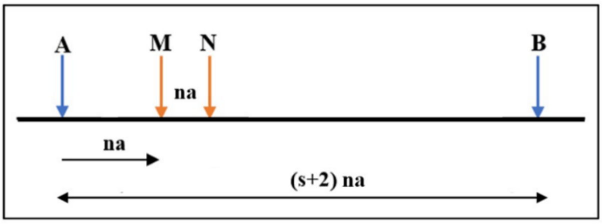
$$V = K^{-1} P$$

$$\{V\} = [K_{1e} + K_{2e}]^{-1} \{P\}$$

$$\{V\} = \left[\left(\sigma \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^T \, [B] \, d\xi d\eta \right) + \left(\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [\mathrm{C}]^{\mathrm{T}} [C] \, d\xi d\eta \right) \right]^{-1} \{P\}$$

Persamaan linear $(KV = P)$ diselesaikan untuk memperoleh potensial listrik (V) dari setiap elemen dalam domain.

Lampiran 4 Faktor Geometeri Konfigurasi Gradient



$$r_1 = AM = na$$
$$r_2 = MB = (s+1)na$$
$$r_3 = AN = 2na$$
$$r_4 = NB = sna$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)\right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{1}{na} - \frac{1}{(s+1)na}\right) - \left(\frac{1}{2na} - \frac{1}{sna}\right)\right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{s}{(s+1)na}\right) - \left(\frac{s-2}{2sna}\right)\right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{2s^2}{2(s+1)sna}\right) - \left(\frac{s^2 - 2 + s - 2}{2(s+1)sna}\right)\right]^{-1}$$

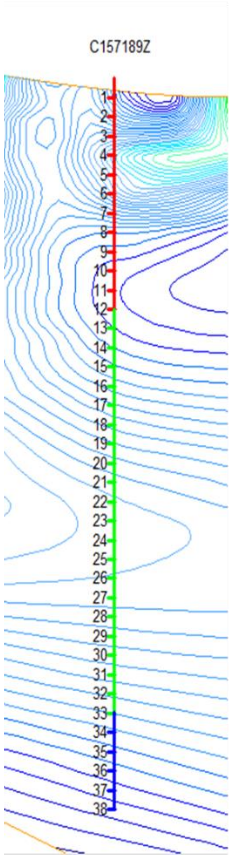
$$K = 2\pi \left[\frac{2s^2 - (s^2 + s - 2)}{2(s+1)sna}\right]^{-1}$$

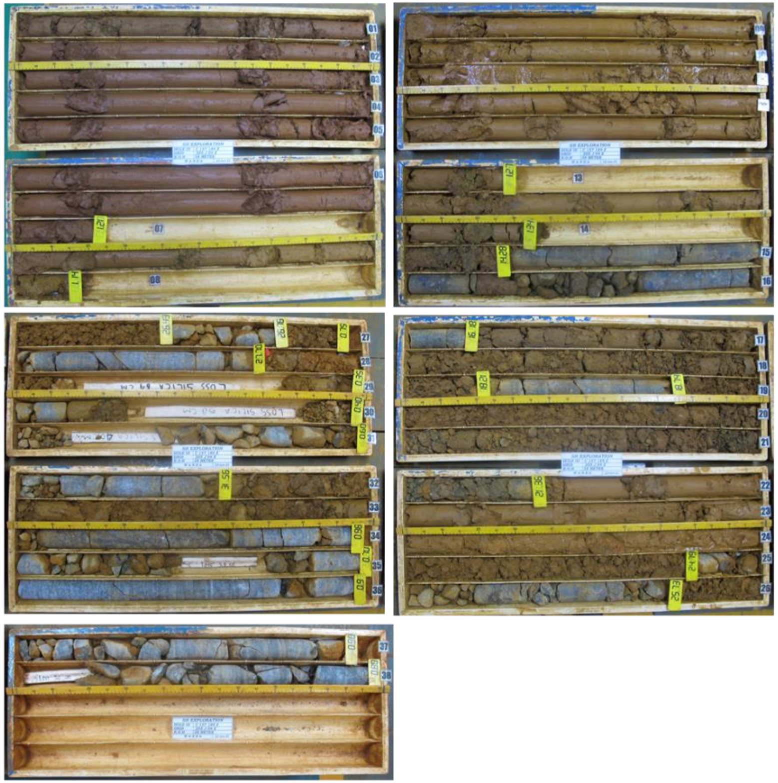
$$K = 2\pi \left[\frac{s^2 + s - 2}{2(s+1)sna}\right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \frac{2(s+1)sna}{s^2 + s - 2}$$

$$K = \frac{4\pi(s+1)sna}{s^2 + s - 2}$$

Lampiran 5 Fotocore & Data *Assay* sebagai data pendukung dalam interpretasi





BHID	FROM	TO	NITOT	COTOT	FETOT	SIO2TOT	MGOTOT	LYR	LYRCHMIS	MATERIAL
C157189Z	0	1	0.717	0.047	32.54	18.39	5.09	LIM	SAP	LIM
C157189Z	1	2	0.432	0.023	30.23	18.13	1.62	LIM	LIM	LIM
C157189Z	2	3	0.421	0.022	31.79	13.48	1.23	LIM	LIM	LIM
C157189Z	3	4	0.5	0.029	32.76	13.9	1.32	LIM	LIM	LIM
C157189Z	4	5	0.449	0.024	31.97	13.3	1.05	LIM	LIM	LIM
C157189Z	5	6	0.413	0.02	29.22	18.58	1.18	LIM	LIM	LIM
C157189Z	6	7	0.486	0.036	31	16.19	1.15	LIM	LIM	LIM
C157189Z	7	8	0.941	0.063	41.2	9.99	1.06	LIM	LIM	LIM
C157189Z	8	9	1.036	0.078	42.82	8.54	1.03	LIM	LIM	LIM
C157189Z	9	10	1.065	0.084	43.07	9.92	0.9	LIM	LIM	LIM
C157189Z	10	11	1.13	0.087	38.64	18.99	2.2	LIM	LIM	LIM
C157189Z	11	12	1.288	0.043	34.8	28.97	2.78	LIM	SIL	LIM
C157189Z	12	13	1.435	0.056	24.17	34.08	11.19	SAP	SAP	SAP
C157189Z	13	14	1.638	0.044	20.91	35.41	14.11	SAP	SAP	SAP
C157189Z	14	14.28	1.81	0.04	16.24	38.39	19.47	SAP	SAP	SAP
C157189Z	14.28	15	1.152	0.017	6.56	41.11	36.92	SAP	FRK	BLD
C157189Z	15	16	1.50467447	0.01798968	7.28271	43.43287792	33.41802702	SAP	SAP	BLD
C157189Z	16	16.18	1.067	0.016	6.67	41.87	35.48	SAP	SAP	BLD
C157189Z	16.18	17	1.37	0.026	13.22	43.38	20.14	SAP	SAP	SAP
C157189Z	17	18	1.61	0.026	13.28	43.21	21.5	SAP	SAP	SAP
C157189Z	18	18.21	1.535	0.023	13.26	40.45	22.13	SAP	SAP	SAP
C157189Z	18.21	18.74	0.58750502	0.015	6.26399197	43.21911923	37.9895881	SAP	FRK	BLD
C157189Z	18.74	19	1.489	0.029	15.59	45.06	17.01	SAP	SAP	SAP
C157189Z	19	20	1.517	0.035	19.08	40.75	14.75	SAP	SAP	SAP
C157189Z	20	21	1.607	0.023	10.99	45.67	23.28	SAP	SAP	SAP
C157189Z	21	21.36	1.26285869	0.01837189	8.70230977	42.54661232	30.53645837	SAP	SAP	SAP
C157189Z	21.36	22	1.479	0.048	25.93	35.89	11.74	SAP	SAP	SAP
C157189Z	22	23	1.326	0.037	24.05	38.39	12.53	SAP	SAP	SAP
C157189Z	23	24	1.394	0.05	25.5	35.21	11.96	SAP	SAP	SAP
C157189Z	24	24.79	1.584	0.046	23.09	38.72	12.89	SAP	SAP	SAP
C157189Z	24.79	25	0.521	0.015	7.71	43.33	38.16	SAP	FRK	BLD
C157189Z	25	25.73	0.73527463	0.014	6.68186647	44.76606973	37.45687389	SAP	FRK	BLD
C157189Z	25.73	26	1.058	0.033	16.28	44.35	19.19	SAP	SAP	SAP
C157189Z	26	26.43	0.967	0.031	15.43	43.72	20.8	SAP	SAP	SAP
C157189Z	26.43	26.76	0.466	0.015	7.41	45.09	38.9	SAP	FRK	BLD
C157189Z	26.76	27	0.918	0.026	13.98	43.44	20.68	SAP	SAP	SAP
C157189Z	27	27.7	0.368	0.015	6.7	45.16	39.9	SAP	FRK	BLD
C157189Z	27.7	28	0.897	0.031	15.73	43.24	21.98	SAP	SAP	SAP
C157189Z	28	29	0.514	0.015	7.44	58.55	26.11	SAP	SIL	SAP
C157189Z	29	30	0.70967739	0.01812591	8.77065165	52.23943886	27.27922767	SAP	SIL	SAP
C157189Z	30	31	0.42497071	0.01412125	6.38774187	49.95822518	33.82797028	SAP	FRK	BLD
C157189Z	31	31.56	0.36826289	0.01462294	6.51016465	46.09034014	37.46374888	SAP	FRK	BLD
C157189Z	31.56	32	1.118	0.026	12.07	53.67	16.07	SAP	SIL	SAP
C157189Z	32	33	1.27	0.033	15.41	45.38	18.87	SAP	SAP	SAP
C157189Z	33	34	0.42355739	0.01447071	6.25412123	45.05882831	36.53461259	BRK	FRK	BRK
C157189Z	34	35	0.74834695	0.01565808	7.2080578	45.15226906	36.01926478	BRK	FRK	BRK
C157189Z	35	36	0.24547114	0.01469203	6.10539873	45.49923924	41.76452788	BRK	FRK	BRK
C157189Z	36	37	0.37913483	0.015	6.69141896	44.7470207	40.89914828	BRK	FRK	BRK
C157189Z	37	38	0.3327427	0.015	6.65236312	45.52689173	38.93643872	BRK	FRK	BRK

Lampiran 6 Pembuktian Rumus Geolistrik

Potensial akibat arus tunggal di dalam bumi
Ditinjau Laplacian dari koordinat bola (Bumi), dimana bumi dalam keadaan statis, sehingga hanya ditinjau fungsi jari-jari, maka sudut θ dan $\emptyset$ diabaikan.

$$\boldsymbol{\nabla^2} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial r}} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial r}} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\emptyset^2}\right)$$

$$\nabla^2 = \frac{d}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$$

$$\nabla^2 V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis seperti dibawah ini

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv}{dr}\right)$$

Karena $\nabla^2 V = 0,$ maka

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

r^2 pindah ke ruas kanan, sehingga:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0.r^2$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

Kemudian di integralkan

$$\int \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = \int 0, \text{dimana 0 adalah konstanta}$$

$$r^2\frac{dV}{dr} = A \text{ (konstanta)}$$

$$\boldsymbol{\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}}$$

$$dV = \frac{A}{r^2}dr$$

Kemudian diintegralkan lagi, sehingga

$$\int dV = \int \frac{A}{r^2}dr$$

$$V = -\frac{A}{r} + B$$

Memasukkan syarat batas $V = 0\ ketika\ r = \infty$, menjadi:

$$0 = -\frac{A}{\infty} + B$$

$$0 = 0 + B$$

$B = 0$ →ketika syarat batas $V = 0. r = \infty$

$$\boldsymbol{V = -\frac{A}{r}}$$

Karane yang ditinjau rapat arus (J), diketahui $J = \frac{I}{A}$. Karena yang ditinjau bola maka luas permukaan (A) adalah $4\pi r^2$.

$$J = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$J = -\sigma \nabla V$$

$$I = 4\pi r^2 J$$

$$I = 4\pi r^2(-\sigma \nabla V) \rightarrow \quad \nabla V = \frac{dV}{dr}$$

$$I = -4\pi r^2 \sigma \frac{dV}{dr} \rightarrow \quad \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$I = -4\pi r^2 \sigma \frac{A}{r^2}$$

$$I = -4\pi\sigma A$$

$$A = -\frac{I}{4\pi\sigma}$$

$$A = -\frac{I}{4\pi\left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

$$\boldsymbol{A = -\frac{I\rho}{4\pi}}$$

$$V = -\frac{1}{r}\left(-\frac{I\rho}{4\pi}\right)$$

$$\boldsymbol{V = \left(\frac{I\rho}{4\pi}\right)\frac{1}{r}}$$

$$\rho = \frac{4\pi r V}{I}$$

Potensial akibat arus tunggal di permukaan bumi

Udara di atas permukaan dianggap ($\sigma = 0$) maka garis equipotensial membentuk setengah bola ($A = 2\pi r^2$).

$$J = \frac{I}{A}$$

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}$$

$$I = 2\pi r^2 J$$

$$I = 2\pi r^2(-\sigma\nabla V)$$

$$I = 2\pi r^2\left(-\sigma\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$I = -2\pi r^2\sigma\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{r}^2}$$

$$I = -2\pi\sigma A$$

$$A = -\frac{I}{2\pi\sigma}$$

$$\boldsymbol{A = -\frac{I\rho}{2\pi}}$$

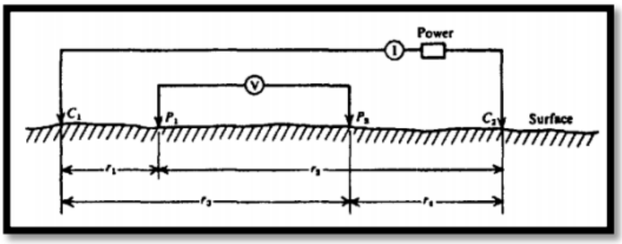
substitusi nilai $A = -\frac{I\rho}{2\pi}$ ke persamaan $V = -\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{r}}$

$$V = -\frac{1}{r}\left(-\frac{I\rho}{2\pi}\right)$$

$$\boldsymbol{V = \left(\frac{I\rho}{2\pi}\right)\frac{1}{r}}$$

$$\rho = \frac{2\pi r V}{I}$$

Potensial Listrik Yang Dipengaruhi oleh dua elektroda arus listrik



dimana:

$r_1 = C_1P_1$

$r_2 = C_1P_2$

$r_3 = C_2P_1$

$r_4 = C_2P_2$

karena $V = -\frac{A}{r}$ dimana $A = -\frac{I\rho}{2\pi}$

$$V_1 = -\frac{A_1}{r_1}$$

$$V_1 = -\frac{1}{r_1}\left(-\frac{I\rho}{2\pi}\right)$$

$$\boldsymbol{V_1 = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1}\right)}$$

$$V_2 = -\frac{A_2}{r_2}$$

$$V_2 = -\frac{1}{r_2}\left(\frac{I\rho}{2\pi}\right)$$

$$\boldsymbol{V_2 = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_2}\right)}$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \left(-\frac{I\rho}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boldsymbol{V = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$V_t = V_1 + V_2$$

$$V_t = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_3}\right) + \left(-\frac{I\rho}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{r_4}\right)$$

$$\boldsymbol{V_t = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)}$$

$$\Delta V = \boldsymbol{\frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)}$$

$$\Delta V = \boldsymbol{\frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)}$$