PERBANDINGAN ESTIMASI *VALUE AT RISK* MENGGUNAKAN MULTIVARIAT GARCH-*VINE COPULA* *ARCHIMEDEAN* DAN *ELLIPTICAL*

EVI SAGITA
H051191026

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
2024

PERBANDINGAN ESTIMASI *VALUE AT RISK* MENGGUNAKAN MULTIVARIAT GARCH-*VINE COPULA* *ARCHIMEDEAN* DAN *ELLIPTICAL*

EVI SAGITA
H051191026

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Statistika

Program Studi Statistika

pada

PROGRAM STUDI STATISTIKA
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

SKRIPSI

PERBANDINGAN ESTIMASI *VALUE AT RISK* MENGGUNAKAN MULTIVARIAT GARCH-*VINE COPULA* *ARCHIMEDEAN* DAN *ELLIPTICAL*

yang disusun dan diajukan oleh

EVI SAGITA
H051191026

Skripsi,

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Statistik pada 16 Agustus 2024
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Statistika
Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:	Mengetahui:
Pembimbing tugas akhir,	Ketua Program Studi,
Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si.	Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.
NIP. 196209261987022001	NIP. 197708082005012002

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Perbandingan Estimasi *Value at Risk* menggunakan Multivariat GARCH-*Vine Copula Archimedean* dan *Elliptical*" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 16 Agustus 2024

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 024CBALX293038700

Evi Sagita

NIM H051191026

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas kasih, anugerah dan penyertaan-Nya yang luar biasa, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan baik. Segala kemuliaan hanya bagi nama-Nya yang telah memberi kekuatan dan hikmat dalam setiap langkah yang penulis tempuh selama masa studi ini sehingga penulis dimampukan untuk menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Perbandingan Estimasi *Value at Risk* menggunakan Multivariat GARCH-*Vine Copula Archimedean* dan *Elliptical*"** atas bimbingan dan arahan Ibunda terkasih **Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si** yang boleh senantiasa membimbing penulis dengan kasih dan keceriaan namun tidak melunturkan ketegasan dibalik kelemahlembutan yang senantiasa diberikan. Ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada Ibunda **Prof. Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si, M.Si** selaku dosen Pembimbing Akademik dan Penguji yang senantiasa berkenan mendampingi proses studi penulis sejak 2019 hingga penyelesaian tugas akhir, tidak hanya bimbingan akademik namun banyak nasehat yang berharga serta cinta kasih dibalik ketegasan yang menjadikan penulis lebih baik. Ucapan terima kasih kepada Ayahanda **Drs. Raupong, M.Si** selaku dosen penguji yang senantiasa meluangkan waktu dalam memberikan bimbingan, saran dan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari bantuan, dukungan dan bimbingan dari berbagai pihak yang senantiasa turut membantu dalam bentuk moril maupun materil sehingga dengan segala keterbatasan kemampuan dan pengetahuan penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan setinggi-tingginya kepada Ayahanda **Oktofianus Taruk Allo** dan Ibunda **Miji Pasodung** yang telah memberikan dukungan penuh, pengorbanan yang luar biasa, limpahan cinta dan kasih sayang, serta dengan ketulusan senantiasa menemani penulis dalam tiap langkah dengan doa dan restu mulianya. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada saudara-saudari terkasih **Triwanti Samita, Yosua Riantiardi** dan **Habel,** yang senantiasa mendukung dan membersamai penulis meski dari jauh.

Akhirnya, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada teman-teman MIPA 2019, Statistika 2019 dan Hipotesis 19 yang senantiasa membersamai penulis selama masa perkuliahan yang selalu memberikan motivasi dan dukungan serta kebersamaan yang tak ternilai, terkhusus yang selalu ada **(Agus, Anita, Aisyah, Apri, Atti, Cindy, Daus, Ferdi, Fino, Inci, Inda, Inna, Isal, Lesta, Lia). Keluarga Besar GMKI Cabang Makassar** terkhusus **Komisariat FMIPA Unhas**, keluarga rumah biru yang senantiasa membersamai penulis, memberi kasih setiap waktu, menjadi saudara dalam kesesakan, memberi makna kehidupan.

Makassar, 16 Agustus 2024

Evi Sagita

ABSTRAK

Evi Sagita. **Perbandingan Estimasi *Value at Risk* menggunakan Multivariat GARCH-*Vine Copula Archimedean* dan Elliptical** (dibimbing oleh Georgina Maria Tinungki).

Latar Belakang. *Value at Risk* merupakan alat ukur portofolio untuk memperkirakan kerugian maksimum dalam suatu periode pada tingkat kepercayaan tertentu. *Copula* digunakan untuk memodelkan ketergantungan non-linear antar aset, tetapi memiliki keterbatasan dalam kasus multivariat. *Vine Copula* mengatasi hal ini dengan mendekomposisi copula multivariat menjadi serangkaian copula bivariat, sehingga memberikan estimasi risiko yang lebih kompleks dan akurat. **Tujuan**. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan estimasi *Value at Risk* menggunakan Multivariat GARCH-*Vine Copula Archimedean* dan *Elliptical*. **Metode**. Penelitian ini menggunakan *Vine Copula* untuk mengestimasi *Value at Risk pada portofolio* dengan cara menentukan dekomposisi *Vine Copula* dan fungsi keluarga copulanya. Dekomposisi *Vine Copula* dilakukan dengan menggunakan *C-Vine Copula*. Pembentukan distribusi marginal menggunakan model GARCH berdistribusi *Student-t* untuk mengatasi adanya heteroskedastisitas. **Hasil.** Perbandingan model pada portofolio ketiga saham BBCA, BBRI dan BBNI periode 1 Januari 2019-28 Desember 2023 didapatkan model *C-Vine Copula* dengan fungsi *t-copula* adalah model terbaik untuk memodelkan data dengan nilai AIC -1071,84. **Kesimpulan.** Nilai VaR yang diperoleh sebesar 1,67%, 2,29% dan 4,15% dari dana investasi pada tingkat kepercayaan 90%, 95%, dan 99%.

Kata Kunci: GARCH, Portofolio, *Value at Risk*, *Vine Copula*.

ABSTRACT

Evi Sagita. **Comparison of Value at Risk Estimation Using Multivariate GARCH-Vine Copula: Archimedean and Elliptical Approaches** (supervised by Georgina Maria Tinungki).

Introduction. Value at Risk is a portfolio measurement tool to estimate the maximum loss in a period at a certain confidence level. Copulas are used to model non-linear dependencies between assets, but have limitations in the multivariate case. Vine Copula overcomes this by decomposing a multivariate copula into a series of bivariate copulas, thus providing more complex and accurate risk estimates. **Aim**. This study aims to obtain Value at Risk estimates using Multivariate GARCH-Vine Copula Archimedean and Elliptical. **Method**. This study uses Vine Copula to estimate the Value at Risk of the portfolio by determining the decomposition of Vine Copula and its copula family function. Vine Copula decomposition is done using C-Vine Copula. The formation of the marginal distribution uses the Student-t distributed GARCH model to overcome heteroscedasticity. **Results**. Comparison of models on the third portfolio of BBCA, BBRI and BBNI stocks for the period January 1, 2019-28 December 2023 obtained the C-Vine Copula model with the t-copula function is the best model for modeling data with an AIC value of -1071.84. **Conclusion**. The VaR values obtained are 1.67%, 2.29% and 4.15% of investment funds at the 90%, 95% and 99% confidence levels.

Keywords: GARCH, Portfolio, *Value at Risk*, *Vine Copula.*

DAFTAR ISTILAH

Istilah	Arti dan Penjelasan
Autoregressive	Model statistik yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antara nilai dalam deret waktu dan nilai-nilai sebelumnya. Dalam model AR, nilai saat ini diprediksi sebagai kombinasi linear dari nilai-nilai masa lalu
Bivariat	Analisis yang melibatkan dua variabel. Analisis ini bertujuan untuk memahami hubungan atau ketergantungan antara dua variabe
Copula	Fungsi matematika yang digunakan untuk menggambarkan ketergantungan antara variabel acak multivariat. Copula memungkinkan kita untuk memisahkan distribusi marginal dari ketergantungan struktur bersama
Dekomposisi	Proses memecah data deret waktu menjadi beberapa komponen, seperti tren, musiman, dan residual. Ini membantu dalam memahami pola dasar dan fluktuasi dalam data.
Fat Tails	Distribusi probabilitas yang memiliki ekor yang lebih tebal dibandingkan dengan distribusi normal. Ini menunjukkan bahwa kejadian ekstrem lebih sering terjadi daripada yang diprediksi oleh distribusi normal
Fluktuasi	Perubahan atau variabilitas dalam data deret waktu. Ini bisa melibatkan perubahan yang terjadi secara acak atau memiliki pola tertentu.
Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity	Model statistik yang digunakan untuk mengestimasi volatilitas dalam data deret waktu. Model ini mengasumsikan bahwa variansi kesalahan (volatilitas) bersifat dinamis dan tergantung pada variansi kesalahan masa lalu.
Heteroskedastisitas	Kondisi di mana variansi residual dalam model regresi tidak konstan. Ini berarti bahwa variansi kesalahan bervariasi dengan level variabel independen atau waktu.
Kurtosis	Ukuran statistik yang menggambarkan bentuk distribusi data, khususnya tinggi puncak dan ketebalan ekor dibandingkan dengan distribusi normal. Distribusi dengan kurtosis tinggi (leptokurtic) memiliki puncak yang lebih tinggi dan ekor yang lebih tebal.
Lag	Pergeseran waktu antara observasi dalam dataset yang digunakan untuk mengukur hubungan antara nilai-nilai dalam deret waktu dengan nilai-nilai sebelumnya

Istilah	Arti dan Penjelasan
Lagrange Multiplier	Konsep yang digunakan untuk menemukan titik optimum dari sebuah fungsi objektif yang terikat oleh satu atau lebih persamaan pembatas
Leptokurtic	Distribusi probabilitas yang memiliki puncak yang lebih tinggi dan ekor yang lebih tebal dibandingkan dengan distribusi normal. Ini menunjukkan adanya kejadian ekstrem yang lebih sering
Likelihood	Ukuran kemungkinan bahwa sekumpulan parameter tertentu dapat menghasilkan data yang diamati dalam model statistik. Ini sering digunakan dalam estimasi parameter dan pengujian hipotesis
Marginal	Distribusi probabilitas dari satu variabel dalam satu set variabel acak. Ini menggambarkan distribusi variabel tunggal tanpa memperhitungkan ketergantungan dengan variabel lainnya
Moving Average	Model statistik yang digunakan untuk menganalisis data deret waktu dengan cara mengambil rata-rata dari sejumlah nilai sebelumnya. Ini membantu dalam menghaluskan fluktuasi jangka pendek dan menyoroti tren jangka panjang
Multivariat	Analisis yang melibatkan lebih dari dua variabel. Analisis ini bertujuan untuk memahami hubungan dan ketergantungan antara beberapa variabel secara bersamaan.
Ordo	Tingkat atau derajat komponen yang digunakan dalam model
Return	Keuntungan atau kerugian yang dihasilkan dari investasi dalam suatu periode waktu tertentu. Ini biasanya dinyatakan sebagai persentase dari nilai awal investasi.
Skewness	Ukuran statistik yang menggambarkan asimetri dari distribusi data. Distribusi yang skewed kanan (positif) memiliki ekor yang lebih panjang di sisi kanan, sementara distribusi yang skewed kiri (negatif) memiliki ekor yang lebih panjang di sisi kiri.
Tree	Struktur data atau model yang digunakan untuk pengambilan keputusan. Dalam konteks statistik dan machine learning, decision tree digunakan untuk membangun model prediksi berdasarkan serangkaian aturan keputusan yang bercabang.

Istilah	Arti dan Penjelasan
Value at Risk	Ukuran statistik yang mengestimasi potensi kerugian maksimum dari suatu investasi dalam periode waktu tertentu dengan tingkat kepercayaan tertentu. VaR sering digunakan dalam manajemen risiko keuangan.
Vine-Copula	Metode yang menggunakan struktur pohon untuk membangun copula multivariat yang kompleks. Ini memungkinkan fleksibilitas dalam memodelkan ketergantungan antara banyak variabel acak
Volatility Clustering	Fenomena di mana periode volatilitas tinggi cenderung diikuti oleh periode volatilitas tinggi, dan periode volatilitas rendah cenderung diikuti oleh periode volatilitas rendah. Ini adalah karakteristik umum dari data keuangan
White Noise	Sinyal acak yang memiliki rata-rata konstan (biasanya nol), variansi konstan, dan tidak ada autokorelasi

DAFTAR SINGKATAN DAN LAMBANG

LAMBANG/SINGKATAN	**Arti dan Penjelasan**
ϕ_p	Koefisien AR berordo *p*
θ_q	Koefisien MA berordo *q*
α_i	Koefisien *lagrange*
a_t	Residual ARIMA yang memenuhi asumsi *white noise*
B	operator *backshift*
$F_0(x)$	nilai distribusi kumulatif distribusi normal
n	jumlah total aset dalam portofolio
P_t	harga saham pada akhir periode t
R_i	*return* dari aset i
R_t	*return* pada periode t
R_p	*return* portofolio
$S_{(x)}$	nilai distribusi kumulatif sampel
SE	standar *error*
Sup_x	nilai supremum untuk semua x dari $\left\|S_{(x)} - F_0(x)\right\|$
w_i	bobot investasi dalam aset i
Y_t	nilai data pada waktu t
ACF	*Autocorrelation Function*
ADF	*Augmented Dickey Fuller*
AIC	*Akaike Information Criterion*
ARIMA	*Autoregressive Integrated Moving Average*
GARCH	*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*
LL	Log *Likelihood*
LM	*Lagrange Multiplier*
PACF	*Partial Autocorrelation Function*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran **Halaman**

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Portofolio adalah kumpulan dari berbagai aset finansial yang dimiliki oleh investor, baik individu maupun institusi, dengan tujuan utama untuk mencapai diversifikasi dan mengurangi risiko. Pembentukan portofolio dilakukan agar mencapai diversifikasi, yang dapat mengurangi risiko total dengan menggabungkan aset-aset yang memiliki korelasi rendah atau negatif. Dengan demikian, meskipun beberapa aset dalam portofolio mungkin mengalami penurunan nilai, aset lain yang tidak berkorelasi dapat membantu menjaga stabilitas dan potensi return dari keseluruhan portofolio, sehingga pengukuran risiko menjadi hal yang sangat krusial. Salah satu alat ukur digunakan untuk mengukur risiko terbesar dalam portofolio adalah *Value at Risk* (VaR). VaR adalah ukuran statisik yang digunakan untuk memperkirakan kerugian maksimum yang mungkin terjadi selama periode waktu tertentu pada tingkat kepercayaan tertentu (Hull, 2015).

Salah satu pendekatan umum dalam menghitung VaR adalah metode variansi-kovariansi. Metode ini berasumsi bahwa *return* aset berdistribusi normal dan ketergantungan antar aset dapat diukur melalui korelasi linear. Namun, distribusi return keuangan sering kali memiliki *fat tails*, yang berarti bahwa kejadian ekstrem (*outlier)* memiliki probabilitas yang lebih tinggi terjadi daripada yang diprediksi oleh distribusi normal, hal tersebut ditandai dengan kurtosis yang lebih tinggi dari normal, adanya fenomena *volatility clustering* juga menjadi karakteristik umum dari distribusi return keuangan. Selain itu, asumsi normalitas pada data finansial jarang terpenuhi, dan struktur ketergantungan antar saham sering kali bersifat *non-linear*. Hal ini menyebabkan estimasi VaR menjadi tidak valid, sehingga risiko yang diperoleh dari estimasi VaR dengan metode ini sering kali lebih rendah dari risiko yang sesungguhnya dihadapi. Untuk mengatasi hal tersebut, diperlukan pendekatan yang lebih fleksibel dan akurat dalam memodelkan distribusi *return* dan ketergantungan antar aset. Salah satu pendekatan yang sesuai adalah penggunaan *Copula* (Jorion, 2002).

Copula adalah fungsi yang dapat menggabungkan beberapa distribusi marginal menjadi distribusi bersama, yang memungkinkan pemodelan ketergantungan *non-linear* secara lebih akurat (Nelsen, 2006). Cherubini, Luciano, dan Vecchiato (2004) menekankan bahwa penggunaan *Copula* dalam keuangan memberikan fleksibilitas yang lebih besar dalam menangkap ketergantungan kompleks antar aset, sehingga menghasilkan estimasi VaR yang lebih realistis. Beberapa peneliti telah mengaplikasikan *Copula* untuk mengestimasi nilai VaR pada Portofolio. Renggani (2017) mengestimasi nilai VaR portofolio menggunakan *Elliptical Copula* untuk portofolio bivariat dari indeks saham LQ45 yaitu PT Bukit Asam Tbk (PTBA.JK) dan PT Bank Rakyat Indonesia Tbk (BBRI.JK). Kemudian Pintari (2018) mengaplikasikan Archimedean Copula untuk mengestimasi VaR pada portofolio saham LQ45, selanjutnya Sadadang (2020) menggunakan *Gumbel D-Vine Copula* untuk mengestimasi nilai VaR pada portofolio.

Pendekatan *Copula* memiliki beberapa keterbatasan terutama dalam kasus *multivariat*, yaitu penentuan fungsi *Copula* yang sulit, keterbatasan keluarga *Copula* serta *Copula* hanya mampu memodelkan struktur ketergantungan yang terlalu sederhana (Geidosch, 2016). Untuk mengatasi keterbatasan dari model *Copula* maka diperkenalkan model *Vine Copula*. Aas, Czado, Frigessi, dan Bakken (2009) menjelaskan bahwa *Vine Copula* memungkinkan pemodelan ketergantungan *non-linear* yang lebih kompleks dengan mendekomposisi *copula multivariat* menjadi serangkaian copula berpasangan *(bivariat)* yang diperoleh dari keluarga *Copula bivariat*. Model *Vine Copula* menggabungkan distribusi marginal dari masing-masing variabel, yang kemudian diintegrasikan menjadi distribusi *multivariat*. Umumnya, data finansial mengindikasikan adanya sifat heterokedastisitas, sehingga untuk menanganinya digunakan model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH) untuk membantu menghilangkan efek heteroskedastisitas sebelum data digabungkan dalam model *Vine Copula*.

Berdasarkan uraian tersebut, maka pada penelitian ini akan dilakukan penerapan perhitungan *Value at Risk* pada portofolio menggunakan metode GARCH-Vine Copula, khususnya pada portofolio multivariat. Sehingga penulis mengangkat judul **"Perbandingan Estimasi *Value at Risk* menggunakan Multivariat GARCH-*Vine Copula Archimedean* dan *Elliptical*"**, agar investor dapat mengetahui risiko yang akan diperoleh apabila berinvestasi pada suatu portofolio.

1.2 Batasan Masalah

1. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data indeks harga saham penutupan harian mulai 1 Januari 2019 sampai 28 Desember 2023 dari PT Bank Central Asia Tbk (BBCA.JK), PT Bank Rakyat Indonesia Tbk (BBRI) dan PT Bank Mandiri Tbk (BMRI).
2. Penelitian ini akan membatasi penggunaan *Vine Copula* untuk memodelkan distribusi gabungan dari model marginal harga saham dari beberapa saham yang berbeda.

1.3 Tujuan Penelitian

1. Memperoleh Model Copula terbaik untuk estimasi *Value at Risk* (VaR) pada Portofolio dari keluarga *Archimedean* dan keluarga *Elliptical.*
2. Membandingkan hasil estimasi *Value at Risk* (VaR) pada Portofolio menggunakan Metode GARCH-*Vine Copula* dari keluarga *Archimedean* dan keluarga *Elliptical.*
3. Mendapatkan perkiraan besar risiko yang harus ditanggung oleh investor dari hasil estimasi *Value at Risk* (VaR) pada Portofolio menggunakan Metode GARCH-*Vine Copula.*

1.4 Manfaat Penelitian

Secara teoritis, penelitian ini menambah pengetahuan dan kemampuan penulis dalam melakukan analisis data *time series* serta menambah wawasan mengenai metode GARCH-*Vine Copula* dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Secara praktis, penelitian ini dapat menjadi bahan pertimbangan dan masukan bagi investor dan institusi keuangan terhadap praktik investasi dan manajemen keuangan yang efektif dan efisien.

1.5 Teori

1.5.1. Portofolio

Portofolio adalah kumpulan aset investasi milik perseorangan atau kelompok yang bertujuan untuk mengurangi risiko dan meningkatkan potensi *return* dengan menggabungkan berbagai aset yang memiliki korelasi rendah atau negatif. *Return* adalah ukuran kinerja investasi yang menunjukkan keuntungan atau kerugian yang diperoleh dari investasi dalam periode tertentu. *Return* digunakan untuk mengevaluasi kinerja investasi dan mengukur seberapa baik investasi tersebut menghasilkan keuntungan relatif terhadap nilai yang diinvestasikan. *Return* dari aset tunggal dapat dihitung dengan rumus berikut (Bodie dkk, 2014):

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1}$$

Keterangan:

R_t : *return* pada periode t
P_t : harga saham pada akhir periode t
P_{t-1} : harga saham pada akhir periode sebelumnya

Return portofolio yang terdiri dari beberapa aset dapat dihitung dengan menggabungkan return dari masing-masing aset, yang diberi bobot sesuai proporsi investasi dari setiap aset sebagai berikut (Bodie dkk, 2014):

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \tag{2}$$

Keterangan:

R_p : *return* portofolio
n : jumlah total aset dalam portofolio
w_i : bobot investasi dalam aset i
R_i : *return* dari aset i

1.5.2. Uji *Kolmogorov Smirnov*

Uji Kolmogorov Smirnov adalah salah satu metode *non-parametrik* yang digunakan untuk menguji kenormalan data dengan hipotesis (Zar, 2010):

H_0 : Data berasal dari populasi berdistribusi normal
H_1 : Data tidak berasal dari populasi berdistribusi normal

dengan statistik uji yang digunakan yaitu:

$$D = Sup_x |S_n(x) - F_0(x)| \tag{3}$$

Keterangan:
$S_n(x)$: nilai distribusi kumulatif sampel
$F_0(x)$: nilai distribusi kumulatif distribusi normal
Sup_x : nilai supremum untuk semua x dari $\left|S_{(x)} - F_0(x)\right|$
apabila nilai $D > D_{(1-a),n}$ maka diambil keputusan tolak H_0 dengan $D_{(1-a),n}$ merupakan nilai tabel Kolmogorov-Smirnov untuk tingkat α signifikansi dan n merupakan banyaknya observasi.

1.5.3. Uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF)

Uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) adalah tes statistik yang digunakan untuk menentukan apakah sebuah *time series* memiliki unit root yang menunjukkan bahwa data tersebut tidak stasioner. Time series yang tidak stasioner memiliki mean, varians, dan autokovarians yang berubah sepanjang waktu, sementara data stasioner memiliki nilai-nilai ini yang konstan sepanjang waktu. Hipotesis Uji ADF adalah sebagai berikut:
H_0 : Data berasal dari populasi berdistribusi normal
H_1 : Data tidak berasal dari populasi berdistribusi normal
dengan statistik uji yang digunakan yaitu:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4}$$

Keterangan:
Δy_t : adalah perubahan dari satu period eke periode berikutnya, atau $y_t - y_{t-1}$
α : konstanta (intercept)
β : koefisien trend waktu (digunakan jika ada trend deterministic dalam data)
γ : koefisien yang diuji untuk menentukan keberadaan unit root
y_{t-1} : nilai lag dari variabel yang diuji
δ_i : koefisien untuk lag perbedaan terotasi dari variabel dependennya
k : jumlah lag yang digunakan dalam model
ε_t : residual

1.5.4. Proses *Autoregressive Moving Average* (ARIMA)

Model *Autoregressive* (AR) dengan order p dinotasikan dengan AR (p) atau ARIMA $(p, 0, 0)$. Menurut (Wei, 2006) bentuk umum AR (p) dapat dinotasikan sebagai:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{5}$$

Keterangan:
Y_t : nilai data pada waktu t
$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_p$: koefisien *autoregressive*
$Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots, Y_{t-p}$: nilai data pada waktu $t-1, t-2, t-3, \dots, t-p$
ε_t : residual *(noise)* pada waktu t

Bentuk umum model *Moving Average* pada tingkat order q yang dapat dituliskan $MA(q)$ atau ARIMA $(0, 0, q)$ didefinisikan sebagai:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{6}$$

Keterangan:
Y_t : nilai data pada waktu t

ε_t : residual *(noise)* pada waktu t
$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q$: koefisien *moving average*
$\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots, \varepsilon_{t-q}$: residual pada waktu $t-1, t-2, t-3, \dots, t-p$

Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA) merupakan suatu bentuk kombinasi antara proses *autoregressive* dan *moving average* yang sering disebut dengan proses ARMA dengan ordo p dan q yang ditulis ARMA (p, q) atau ARIMA $(p, 0, q)$. Bentuk umum model ini adalah:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (7)$$

Keterangan:
Y_t : nilai data pada waktu t
$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_p$: koefisien *autoregressive*
$Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots, Y_{t-p}$: nilai data pada waktu $t-1, t-2, t-3, \dots, t-p$
ε_t : residual *(noise)* pada waktu t
$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q$: koefisien *moving average*
$\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots, \varepsilon_{t-q}$: residual pada waktu $t-1, t-2, t-3, \dots, t-p$

Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) merupakan model ARMA (p, q) yang tidak stasioner. Bentuk umum model ARIMA (p, d, q) adalah:

$$(1-B)^d \left(Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \phi_3 Y_{t-3} - \cdots - \phi_p Y_{t-p}\right) = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (8)$$

Keterangan:
Y_t : nilai data pada waktu t
$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_p$: koefisien *autoregressive*
$Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots, Y_{t-p}$: nilai data pada waktu $t-1, t-2, t-3, \dots, t-p$
ε_t : residual *(noise)* pada waktu t
$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q$: koefisien *moving average*
$\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots, \varepsilon_{t-q}$: residual pada waktu $t-1, t-2, t-3, \dots, t-p$
B : operator *backshift,* yaitu $BY_t = Y_{t-1}$
d : tingkat diferensiasi untuk mencapai stasioneritas

Identifikasi model ARIMA dapat dilakukan melalui pemeriksaan plot ACF yang menunjukkan order q dan PACF yang menunjukkan order p. Pengujian signifikansi parameter dapat dilakukan dengan hipotesis:

AR (*Autoregressive*)
$H_0: \phi = 0$
$H_1: \phi \neq 0$
MA (*Moving Average*)
$H_0: \theta = 0$
$H_1: \theta \neq 0$
dengan statistik uji yang digunakan yaitu

Untuk AR

$$t_{hit}(AR) = \frac{\hat{\phi}}{SE(\hat{\phi})} \tag{9}$$

Keterangan:

$\hat{\phi}$: estimator dari ϕ, yaitu

$SE(\hat{\phi})$: standar *error* yang diestimasi dari ϕ

Metode kuadrat terkecil digunakan untuk mengestimasi parameter sebagai berikut:

$$\hat{\phi} = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{10}$$

Keterangan:

X : Matriks lag dari nilai data pada waktu $t-1, t-2, t-3, \dots, t-p$

Y : Vektor nilai data pada waktu t

Standar error dari $\hat{\phi}$ adalah akar dari diagonal matriks kovarians:

$$SE(\hat{\phi}) = \sqrt{Var(\hat{\phi})} \tag{11}$$

Matriks kovarians residual ($Var(\hat{\phi})$) dapat dihitung sebagai berikut:

$$Var(\hat{\phi}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \tag{12}$$

Varians residual (σ^2) dapat dihitung sebagai berikut:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \hat{e}_t^2}{n-p-1} \tag{13}$$

Keterangan:

n : jumlah observasi

p : jumlah parameter

$\hat{e}$: residuals yang diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\hat{e} = Y - X\hat{\phi} \tag{14}$$

Untuk MA

$$t_{hit}(MA) = \frac{\hat{\theta}}{SE(\hat{\theta})} \tag{15}$$

Keterangan:

$\hat{\theta}$: estimator dari θ

$SE(\hat{\theta})$: standar *error* yang diestimasi dari θ

Untuk mendapatkan estimasi parameter θ dapat dilakukan dengan meminimalkan *sum of squares* dari residual ε_t dengan cara mengambil turunan parsial dari SSE terhadap θ untuk menemukan nilai minimal.

$$\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{t=1}^{n} (\Delta Y_t - \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})^2 \tag{16}$$

Standar error dari estimasi $\hat{\theta}$ dapat dihitung sebgai berikut:

$$SE(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} (\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta})^2}} \tag{17}$$

Apabila nilai $|t_{hit}| > t_{\frac{\alpha}{2};df=n-n_p}$ atau $p - value < \alpha$ maka diambil Keputusan tolak H_0 dengan $t_{\frac{\alpha}{2};df=n-n_p}$ merupakan nilai kritis dari distribusi t dengan derajat kebebasan (df) sebesar $n - n_p$ dimana n merupakan ukuran sampel dan n_p merupakan jumlah parameter yang diestimasi dalam model.

1.5.5. Uji *Ljung Box* dan Uji *Lagrange Multiplier*

Uji Ljung-Box (Q) digunakan untuk menguji apakah ada autokorelasi dalam residual dari model time series hingga lag tertentu dengan hipotesis sebagai berikut (Hanke, 2005):

$H_0: r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$ (tidak ada autokorelasi)
H_1: minimal ada satu $r_k \neq 0$ untuk $k = 1, 2, \ldots, K$
Statistik Uji:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K}\frac{r_k^2}{n-k} \tag{18}$$

Keterangan:
n : banyak observasi
k : banyak lag yang diuji
r_k : autokorelasi sampel pada lag-k

Autokorelasi sampel pada lag-k dapat dihitung sebagai berikut:

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k}(X_i - \bar{X}) - (X_{i+k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n-k}(X_i - \bar{X})^2)} \tag{19}$$

Keterangan:
X_i : nilai observasi ke-i
$\bar{X}$: rata-rata dari nilai observasi

Keputusan terhadap hipotesis autokorelasi residual didasarkan apabila nilai $Q \leq x^2_{[\alpha:db]}$ tabel dengan derajat bebas (db) adalah K dikurangi banyak parameter pada model atau $p - value$ dari statistic uji Q lebih besar dari nilai α, maka terima H_0 yang artinya residual memenuhi asumsi *white noise*

Uji *Lagrange Multipier* adalah pengujian untuk mengetahui keberadaan ARCH atau keberadaan heteroskedastisitas dalam runtun waktu. Langkah pertama dari uji ini adalah mengestimasi model ARIMA dari data dan mendapatkan residualnya (ε_t).. Langkah selanjutnya yaitu meregresikan residual kuadrat dengan menggunakan konstanta dan nilai residual sampai lag ke-m, $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \ldots, \varepsilon_{t-m}^2$ sehingga membentuk persamaan sebagai berikut:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m\varepsilon_{t-m}^2; t = m+1, \ldots, T \tag{20}$$

Nilai m dapat ditentukan dengan melihat PACF residual kuadrat (Tsay, 2005). Hasil regresi ini akan menghasilkan nilai yang akan digunakan untuk menguji hipotesis berikut:

$H_0: \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ (tidak terdapat unsur ARCH)
H_1: minimal ada satu $\alpha_m \neq 0$ (terdapat unsur ARCH)

Statistik Uji:

$$LM = nR^2 \tag{21}$$

Keterangan:

n : jumlah observasi

R^2 : koefisien determinasi dari regresi tambahan yang dilakukan pada residual kuadrat

Koefisien determinasi R^2 adalah rasio dari penjelasan varians oleh model regresi tambahan sebagai berikut:

$$R^2 = \frac{SSR_0 - SSR_1}{SSR_0} \tag{22}$$

Keterangan:

$SSR_0 = \sum_{t=m+1}^{T} (\varepsilon_t^2 - \overline{\omega})^2$: *sum of squares* residual dari model tanpa lag.

$SSR_1 = \sum_{t=m+1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2$: *sum of squares residual* dari model tanpa lag.

$\overline{\omega} = \frac{1}{n} (\sum_{t-1}^{T} \varepsilon_t^2)$: rata-rata sampel dari ε_t^2

$\hat{\varepsilon}_t$: residual kuadrat terkecil

T : jumlah total observasi

m : jumlah *lag* yang diuji

Kriteria keputusan:

Apabila $LM > \chi_m^2(\alpha)$ atau nilai $p - value$ dari LM lebih kecil dari α, maka H_0 ditolak yang mengindikasikan data memiliki efek ARCH/GARCH atau bersifat heteroskedastisitas.

1.5.6. Model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*

Model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH) (p, q) memiliki persamaan umum sebagai berikut:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \tag{23}$$

dengan $p \geq 0, q > 0, \omega > 0, \alpha_i \geq 0$, untuk $i = 1, \ldots, q$, dan $\beta_j \geq 0, j = 1, \ldots, p$.

Diasumsikan semua parameter adalah positif. Bila $p = q = 1$, maka diperoleh estimator GARCH (1,1) dengan masing-masing distribusi adalah normal standar (GARCH-n) atau *Student-t* standar (GARCH-t), maka model didefinisikan sebagai berikut:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \tag{24}$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \tag{25}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{26}$$

1.5.7. Uji Dependensi

Dalam kondisi hubungan non linear antar variabel, korelasi Kendall Tau dapat digunakan sebagai ukuran dependensi alternatif (Matteis, 2001). Uji korelasi Kendall Tau dilakukan dengan hipotesis yang digunakan adalah:

$H_0: \tau = 0$ (dua variabel independen)

$H_0: \tau \neq 0$ (dua variabel tidak independen)

Statistik Uji:

$$Z = \sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}}|\tau| \tag{27}$$

dengan

$$\tau = \frac{c-d}{c+d} = \frac{c-d}{\binom{n}{2}} \tag{28}$$

Keterangan:

c : banyak pasangan konkordan

d : menyatakn banyak pasangan diskordan

dengan kriteria keputusan apabila $Z > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ maka H_0 ditolak.

1.5.8. *Copula*

Copula merupakan suatu fungsi distribusi multivariat yang digunakan untuk menggambarkan dependensi antara beberapa variabel acak. *Copula* memungkinkan pemodelan struktur dependensi terpisah dari distribusi marginal dari variabel-variabel tersebut. Dengan menggunakan *copula*, kita dapat membangun distribusi bersama (joint distribution) yang mempertahankan sifat-sifat distribusi marginal dan dependensi antar variabel (Nelsen, 2006).

1.5.9. *Copula Archimedean*

Copula Archimedean adalah salah satu jenis *copula* yang digunakan untuk memodelkan ketergantungan antara dua atau lebih variabel acak. *Copula Archimedean* dikenal dengan kesedhanaan dalam konstruksi dan fleksibilitasnya dalam menangani berbagai jenis ketergantungan. Misalkan φ adalah fungsi generator yang kontinu, monoton menurun, dan memenuhi $\varphi(1) = 0$. Untuk copula berdimensi d, *copula Archimedean* C dapat didefinisikan sebagai:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + (\varphi(u_2) + \cdots (\varphi(u_d)) \tag{29}$$

Keterangan:

φ : fungsi generator *Archimedeaan*

φ^{-1} : invers fungsi generator *Archimedean*

$u_i \epsilon [0,1]$ untuk $i = 1,2, \dots, d$.

a. *Copula Clayton*

Fungsi generator *Copula Clayton* adalah

$$\varphi(t) = (1 + \theta t)^{-1/\theta} \tag{30}$$

Keterangan:

θ : parameter *copula clayton* yang mengendalikan Tingkat ketergantungan antara variabel-variabel

t : nilai input untuk fungsi generator, hasil dari penjumlahan $\varphi(u_i)$.

Invers fungsi generator *Copula Clayton* diperoleh sebagai berikut

$$\varphi(\varphi^{-1}(t)) = t \tag{31}$$

Misalkan $y = \varphi^{-1}(t)$, maka

$$\varphi(y) = t \tag{32}$$

$$(1 + \theta y)^{-1/\theta} = t \tag{33}$$

$$1 + \theta y = t^{-1/\theta} \tag{34}$$

$$\theta y = t^{-1/\theta} - 1 \tag{35}$$

$$y = \frac{t^{-1/\theta} - 1}{\theta} \tag{36}$$

Sehingga, invers fungsi generator *Copula Clayton* adalah

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{t^{-1/\theta} - 1}{\theta} \tag{37}$$

Fungsi *Copula* berdimensi d didefinisikan sebagai berikut:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \varphi^{-1} \sum_{i=1}^{d} \varphi(u_i) \tag{38}$$

Substitusi $\varphi(u_i)$ ke dalam fungsi copula

$$\varphi(u_i) = u_i^{-\theta} - 1 \tag{39}$$

Maka, penjumlahan $\varphi(u_i)$ untuk semua i adalah

$$\sum_{i=1}^{d} \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{d} (u_i^{-\theta} - 1) = \sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta} - d \tag{40}$$

Substitusi hasil penjumlahan tersebut ke invers fungsi generator

$$\varphi^{-1} \sum_{i=1}^{d} \varphi(u_i) = \varphi^{-1} \sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta} - d \tag{41}$$

Gunakan invers fungsi generator $\varphi^{-1}(t)$

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{t^{-1/\theta} - 1}{\theta} \tag{41}$$

Sehingga

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta} - d\right) = \frac{(\sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta} - d)^{-1/\theta} - 1}{\theta} \tag{42}$$

Maka, fungsi *Copula Clayton* berdimensi *d* adalah

$$C^{Clay}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \frac{(\sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta} - d)^{-1/\theta} - 1}{\theta} \tag{43}$$

b. *Copula Gumbel*

Fungsi generator *Copula Gumbel* adalah

$$\varphi(t) = \exp\,(-t^{\theta}) \tag{44}$$

Keterangan:

θ : parameter *copula gumbel* yang mengendalikan Tingkat ketergantungan antara variabel-variabel

t : nilai input untuk fungsi generator, hasil dari penjumlahan $\varphi(u_1)$.

Invers fungsi generator *Copula Gumbel* diperoleh sebagai berikut

$$\varphi(\varphi^{-1}(t)) = t \tag{45}$$

Misalkan $y = \varphi^{-1}(t)$, maka

$$\varphi(y) = t \tag{46}$$

$$\exp(-y^{\theta}) = t$$

$$y^{\theta} = -\ln t \tag{47}$$

$$y = (-\ln t)^{1/\theta}$$

Sehingga, invers fungsi generator *Copula Gumbel* adalah

$$\varphi^{-1}(t) = (-\ln t)^{1/\theta} \tag{48}$$

Fungsi *Copula* berdimensi d didefinisikan sebagai berikut:

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_d) = \varphi^{-1} \sum_{i=1}^{d} \varphi(u_i) \tag{49}$$

Substitusi $\varphi(u_i)$ ke dalam fungsi copula

$$\varphi(u_i) = \exp(-(-\ln u_i)^{\theta}) \tag{50}$$

Maka, penjumlahan $\varphi(u_i)$ untuk semua i adalah

$$\sum_{i=1}^{d} \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{d} \exp(-(-\ln u_i)^{\theta}) \tag{51}$$

Substitusi hasil penjumlahan tersebut ke invers fungsi generator

$$\varphi^{-1} \sum_{i=1}^{d} \varphi(u_i) = \varphi^{-1} \sum_{i=1}^{d} \exp(-(-\ln u_i)^{\theta}) \tag{52}$$

Gunakan invers fungsi generator $\varphi^{-1}(t)$

$$\varphi^{-1}(t) = (-\ln t)^{1/\theta} \tag{53}$$

Sehingga

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{d} \exp(-(-\ln u_i)^{\theta})\right) = (-\ln(\sum_{i=1}^{d} \exp(-(-\ln u_i)^{\theta}))^{1/\theta} \tag{54}$$

Maka, fungsi *Copula Gumbel* berdimensi *d* adalah

$$C^{Gu}(u_1, u_2, \ldots, u_d) = (-\ln(\textstyle\sum_{i=1}^{d} \exp(-(-\ln u_i)^{\theta}))\displaystyle)^{1/\theta} \tag{55}$$

c. *Copula Frank*

Fungsi generator *Copula Frank* adalah

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right) \tag{56}$$

Keterangan:

θ : parameter *copula frank* yang mengendalikan Tingkat ketergantungan antara variabel-variabel

t : nilai input untuk fungsi generator, hasil dari penjumlahan $\varphi(u_1)$.

Invers fungsi generator *Copula Frank* diperoleh sebagai berikut

$$\varphi(\varphi^{-1}(t)) = t \tag{57}$$

Misalkan $y = \varphi^{-1}(t)$, maka

$$\varphi(y) = t \tag{58}$$

$$-\frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{e^{-\theta y}-1}{e^{-\theta}-1}\right) = t \tag{59}$$

$$\ln\left(\frac{e^{-\theta y}-1}{e^{-\theta}-1}\right) = -\theta t \tag{60}$$

$$\frac{e^{-\theta y}-1}{e^{-\theta}-1} = e^{-\theta t} \tag{61}$$

$$e^{-\theta y} - 1 = e^{-\theta t}(e^{-\theta}-1) \tag{62}$$

$$e^{-\theta y} = 1 + e^{-\theta t}(e^{-\theta}-1) \tag{63}$$

$$-\theta y = \ln\left(1 + e^{-\theta t}(e^{-\theta}-1)\right) \tag{64}$$

$$y = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + e^{-\theta t}(e^{-\theta}-1)\right) \tag{65}$$

Sehingga, invers fungsi generator *Copula Frank* adalah

$$\varphi^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + e^{-\theta t}(e^{-\theta}-1)\right) \tag{66}$$

Fungsi *Copula* berdimensi d didefinisikan sebagai berikut:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \varphi^{-1}\sum_{i=1}^{d}\varphi(u_i) \tag{67}$$

Substitusi $\varphi(u_i)$ ke dalam fungsi copula

$$\varphi(u_i) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{e^{-\theta u_i}-1}{e^{-\theta}-1}\right) \tag{68}$$

Maka, penjumlahan $\varphi(u_i)$ untuk semua i adalah

$$\sum_{i=1}^{d}\varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{e^{-\theta u_i}-1}{e^{-\theta}-1}\right)\right) \tag{69}$$

Substitusi hasil penjumlahan tersebut ke invers fungsi generator

$$\varphi^{-1}\sum_{i=1}^{d}\varphi(u_i) = \varphi^{-1}\sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{e^{-\theta u_i}-1}{e^{-\theta}-1}\right)\right) \tag{70}$$

Gunakan invers fungsi generator $\varphi^{-1}(t)$

$$\varphi^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + e^{-\theta t}(e^{-\theta}-1)\right) \tag{71}$$

Sehingga

$$\varphi^{-1}\sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{e^{-\theta u_i}-1}{e^{-\theta}-1}\right)\right) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + e^{-\theta t}(e^{-\theta}-1)\right) \tag{72}$$

Maka, fungsi *Copula Frank* berdimensi *d* adalah

$$C^{Fr}(u_1, u_2, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + e^{-\theta t}(e^{-\theta}-1)\right) \tag{73}$$

1.5.10. *Copula Elliptical*

a. *Copula Gaussian*

Fungsi *copula Gaussian* menggunakan distribusi normal multivariat dengan matriks kovariansi Σ untuk menggabungkan nilai seragam $u_1, u_2, \dots, u_d$ sebagai berikut:

$$C^{Gauss}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \Phi_d(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_d); \Sigma) \quad (74)$$

Keterangan:
Φ_d : distribusi normal multivariat dengan matriks kovarians Σ.
Σ : matriks kovariansi yang mencerminkan ketergantungan antara variabel.
Φ^{-1} : fungsi distribusi kumulatif normal standar invers.

b. *Copula t*

$$C^t(u_1, u_2, \dots, u_d) = t_{v,\Sigma}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2), \dots, t_v^{-1}(u_d)) \quad (75)$$

Keterangan:
$t_{v,\Sigma}$: distribusi *t-Student* multivariat dengan derajat kebebasan v dan matriks kovarians Σ.
Σ : matriks kovariansi yang mencerminkan ketergantungan antara variabel.
t_v^{-1} : fungsi distribusi kumulatif *t-Student* invers.

1.5.11. Nilai *Akaike Information Criterion* (AIC)

Nilai AIC adalah ukuran yang digunakan dalam pemodelan statistic untuk membandingkan model-model yang berbeda. AIC memberikan penilaian terhadap model yang menggabungkan kesesuaian model (fit) dan kompleksitas model. AIC membantu memilih model terbaik yang memiliki keseimbangan antara kompleksitas dan ketepatan, nilai AIC dapat ditentukan dengan:

$$AIC = 2k - 2\ln(L) \quad (76)$$

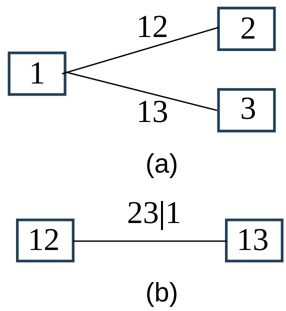
Keterangan:
k : jumlah parameter dalam model
L : *likelihood* dari model yang diberikan yang merupakan fungsi residual error
Nilai AIC yang lebih rendah menunjukkan model yang lebih baik, karena mengindikasikan model yang pas dengan baik namun tidak terlalu kompleks.

1.5.12. *Vine-Copula*

Konstruksi dari fungsi distribusi multi-dimensi menjadi semakin rumit ketika dimensinya semakin bertambah. *Vine Copula* atau yang dikenal juga dengan *Pair copula* memberikan cara yang fleksibel dalam mengkonstruksi distribusi multivariat. Ide pokok dari *pair* copula yaitu menjelaskan bahwa copula multivariat dapat didekomposisikan menjadi pasangan copula bivariate.

Vine copula diterapkan jika sedikitnya 3 dimensi peubah acak yang ingin diketahui fungsi bersamanya. Dengan vine copula, fungsi densitas d dimensi dapat diperoleh dengan melakukan dekomposisi sehingga diperoleh hasil kali dari densitas marginalnya dengan dengan densitas copula berpasangan. Dalam melakukan pemilihan model yang tepat haruslah menentukan struktur (*tree*) keluarga copula, dan menduga parameter copula. Untuk menentukan struktur (*tree*) digunakan C-vine copula.

C-Vine Copula memiliki struktur grafik *(tree)* dengan setiap *tree* memiliki node yang unik yaitu yang dihubungkan ke seluruh node. Jika terdapat d dimensi, maka banyaknya *tree* adalah $d - 1$. Misal, untuk 3 dimensi, maka diperoleh 2 *tree* sebagai berikut:



Gambar 1. *C-Vine Copula 3* dimensi (a) *Tree* 1; (b) *Tree* 2

Gambar 1 menunjukkan bahwa variabel 1 bertindak sebagai variabel kunci dalam *C-Vine* yang berinteraksi dengan seluruh variabel dalam data. Oleh karena itu, pembentukan *C-Vine* akan menguntungkan ketika suatu variabel telah diketahui sebagai variabel kunci. Selanjutnya variabel kunci ini menjadi akar dari struktur *C-Vine* (Liu, 2011).

Sehingga fungsi densitas *C-Vine* menurut dekomposisi pada Gambar 1 adalah:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1).f_2(x_2).f_3(x_3).c_{12}\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \\ .c_{13}\big(F_1(x_1), F_3(x_3)\big).c_{23|1}\big(F_2(x_2|x_1), F_3(x_3|x_1)\big) \quad (77)$$

Secara umum fungsi densitas, *C-Vine* berdimensi d adalah

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^{d} f(x_k) \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{j,j+i|1,\dots,j-1} \\ \Big(F\big(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}\big), F\big(x_{j+i}|x_1, \dots, x_{j-1}\big)\Big) \quad (78)$$

Keterangan:

$f_i(x_i)$: fungsi densitas marginal dari X_i
$F_i(x_i)$: fungsi distribusi kumulatif dari X_i
c_{ij} : *copula* bivariat (X_i, X_j)
$c_{ij|k}$: *copula* bivariat (X_i, X_j) yang dikondisikan pada X_k
$c_{ij|kl}$: *copula* bivariat (X_i, X_j) yang dikondisikan pada X_k dan X_l

1.5.13. Estimasi Parameter

Estimasi parameter *copula* dapat diperoleh dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* (MLE). Pada bagian ini akan dijelaskan estimasi parameter dari densitas *C-Vine* dengan MLE. Asumsikan terdapat d variabel pada T titik waktu, estimasi parameter dapat dilakukan secara simultan terhadap distribusi marginal dan pasangan copula metode MLE. Namun, komputasi dengan metode ini akan semakin kompleks seiring bertambahnya dimensi variabel (Liu, 2011). Oleh karena itu, pada pembahasan ini digunakan metode *Inference Function for Margins* (IFM) dimana estimasi parameter dilakukan dalam dua tahap dan dasar dari tiap tahapnya menggunakan pendekatan log *likelihood* (Joe, 1996). Pada tahap pertama metode IFM, dilakukan estimasi parameter dari distribusi marginal.

Fungsi *likelihood* untuk C-*Vine Copula* dapat diuraikan berdasarkan struktur tree yang digunakan untuk memodelkan ketergantungan antara variabel. Berikut adalah bentuk umum fungsi *likelihood* untuk C-*Vine Copula*:

$$l_{C-Vine}(x;\gamma) = \sum_{k=1}^{d}\sum_{t=1}^{T}\log\left(f(x_k)\right) \quad (78)$$

$$+\sum_{j=1}^{d-1}\sum_{i=1}^{d-j}\sum_{t=1}^{T}\log\left(c_{j,j+i|1,\dots,j-1}\left(F\left(x_{j,t}|x_{1,t},\dots,x_{j-1,t}\right),F\left(x_{j+i,t}|x_{1,t},\dots,x_{j\prime-1,t}\right)\right)\right)$$

Keterangan:

$x_{i,t}$: nilai observasi dari X_i pada waktu t
$f_i(x_i)$: fungsi densitas marginal dari X_i
$F_i(x_i)$: fungsi distribusi kumulatif dari X_i
c_{ij} : *copula* bivariat (X_i, X_j)
$c_{ij|k}$: *copula* bivariat (X_i, X_j) yang dikondisikan pada X_k

1.5.14. *Value at Risk*

Value at Risk (VaR) merupakan alat ukur yang dapat menghitung besarnya kerugian terburuk yang dapat terjadi dengan mengetahui posisi asset, tingkat kepercayaan sakan terjadinya risiko, dan jangka waktu penempatan *asset (time horizon)* (Jorian, 2002).

VaR pada tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$VaR = W_0 Z_{1-\alpha}\sigma(Rp) \quad (79)$$

Keterangan:

W_0 : nilai awal investasi
$\sigma(Rp)$:adalah standar deviasi *return* portofolio.

BAB II
METODE PENELITIAN

2.1. Sumber Data

Data yang digunakan pada penelitian ini merupakan data dari tiga saham LQ45 yaitu data saham PT Bank Central Asia Tbk (BBCA.JK), PT Bank Rakyat Indonesia Tbk (BBRI.JK) dan PT Bank Mandiri Tbk (BMRI.JK) yang diperoleh situs https://finance.yahoo.com. Data yang digunakan adalah data harga penutupan saham mulai dari 1 Januari 2019-28 Desember 2023..

2.2. Variabel penelitian

Variabel yang digunakan pada penelitian ini adalah *return* harga penutupan saham harian PT Bank Central Asia Tbk (BBCA.JK), PT Bank Rakyat Indonesia Tbk (BBRI.JK) dan PT Bank Mandiri Tbk (BMRI.JK).

2.3. Prosedur Penelitian

2.3.1 Eksplorasi Data

Melakukan eksplorasi data untuk mengetahui gambaran umum data masing-masing saham

1. Menghitung *return* harga saham menggunakan persamaan (1).
2. Mengidentifikasi karakteristik data dengan analisis deskriptif pada *return* harga saham.
3. Melakukan uji *Kolmogorov Smirnov* untuk menunjukkan ketidaknormalan distribusi menggunakan persamaan (3).

2.3.2 Pemodelan Marginal dengan GARCH

1. Melakukan uji stasioneritas, kemudian setelah data dinyatakan stasioner maka dilanjutkan dengan menentukan ordo model ARIMA menggunakan plot ACF dan PACF, kemudian menentukan model ARIMA terbaik dengan kriteria AIC.
2. Melakukan pengujian efek ARCH terhadap residual ARIMA untuk mengetahui ada tidaknya heteroskedastisitas.
3. Membentuk model marginal GARCH menggunakan model marginal GARCH menggunakan metode maksimum *likelihood* untuk mengatasi masalah heteroskedastisitas kemudian menggunakan distribusi Student-t pada residual GARCH dan mengidentifikasi struktur kebergantungan model marginal.

2.3.3 Membentuk distribusi gabungan dari dua model marginal dengan *Vine Copula*

1. Menentukan dekomposisi *Vine Copula* yang digunakan.
2. Mengestimasi parameter *Vine Copula*.
3. Memilih Memilih *Copula* terbaik berdasarkan kriteria AIC.

2.3.4 Estimasi *Value at Risk*

1. Melakukan estimasi *Value at Risk* menggunakan model *Copula* terpilih.
2. Menghitung besar risiko berdasarkan estimasi *Value at Risk.*
3. Menarik Kesimpulan dan saran