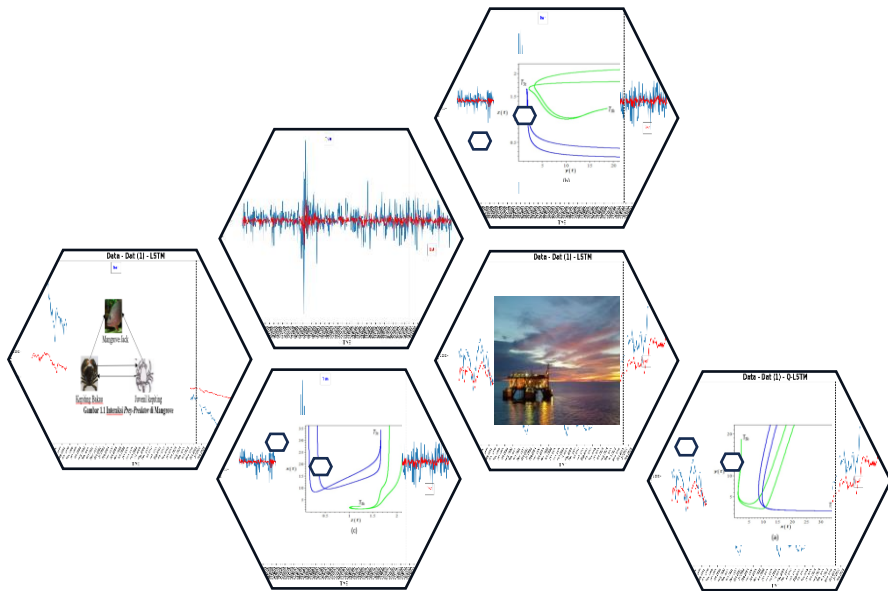


**ANALISIS STABILITAS DINAMIKA MODEL MIGRASI *PREY*–*PREDATOR* DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE III DAN KOMPETISI *INTER-SPESIFIK* SERTA TOKSISITAS YANG DISERAP *PREY***

***STABILITY ANALYSIS OF PREY–PREDATOR MIGRATION MODEL DYNAMICS WITH TYPE III HOLLING RESPONSE FUNCTION AND INTER-SPECIFIC COMPETITION AND TOXICITY ABSORBED BY PREY***



**SYAMSUL AGUS**

**H023202002**



**PROGRAM STUDI DOKTOR MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2024**

Analisis Stabilitas Dinamika Model Migrasi *Prey– Predator* dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Kompetisi *Inter-Spesifik* serta Toksisitas yang diserap *Prey*

*Stability Analysis of Prey–Predator Migration Model Dynamics with Type III Holling Response Function and Inter-Specific Competition and Toxicity Absorbed by Prey*

Syamsul Agus

**H023202002**



PROGRAM STUDI DOKTOR MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR

2024

Analisis Stabilitas Dinamika Model Migrasi *Prey– Predator* dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Kompetisi *Inter-Spesifik* serta Toksisitas yang Diserap *Prey*

*Stability Analysis of Prey–Predator Migration Model Dynamics with Type III Holling Response Function and Inter-Specific Competition and Toxicity Absorbed by Prey*

DISERTASI

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar doktor

Program Studi

S3 MATEMATIKA

Disusun dan diajukan oleh

Syamsul Agus

**H023202002**

Kepada

PROGRAM STUDI DOKTOR MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA dan ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

## DISERTASI

Analisis Stabilitas Dinamika Model Migrasi *Prey– Predator* dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Kompetisi *Inter-Spesifik* serta Toksisitas yang Diserap *Prey*

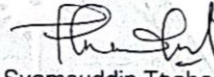
Syamsul Agus  
H023202002

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Doktor pada tanggal 16 Agustus 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Pada

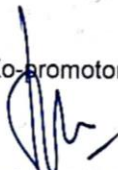
Program Studi Doktor Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Hasanuddin  
Makassar

Mengesahkan  
Promotor



Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.  
NIP. 196801141994121001

Ko-promotor



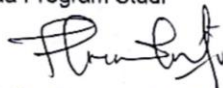
Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.  
NIP. 198009042003122001

Ko-promotor



Dr. Khaeruddin, M.Sc.  
NIP. 196509141991031003

Ketua Program Studi



Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.  
NIP. 196801141994121001



Dekan Fakultas MIPA

~~Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.~~  
NIP. 197305151997021002

PERNYATAAN KEASLIAN DISERTASI dan PELIMPAHAN HAK  
CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa disertasi yang berjudul "Analisis Stabilitas Dinamika Model Migrasi *Prey– Predator* dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Kompetisi *Inter-Spesifik* serta Toksisitas yang Diserap *Prey* " adalah benar karya saya dengan arahan dari tim pembimbing Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc., sebagai pembimbing utama dan Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si., serta Dr. Khaeruddin, M.Sc., sebagai pembimbing pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka disertasi ini. Sebagian dari isi disertasi ini telah dipublikasikan dalam prosiding dan jurnal internasional terindeks Scopus yaitu

1. ICOS2022 AIP Conf. Proc. 2774. 060007-1-060007-8. <https://doi.org/10.1063/5.0165994> Published by AIP Publishing. 978-0-7354-4759-2/S30.00 dengan judul "Stability Analysis of Prey-Predator Model Migration in Mangrove Ecosystem with Holling Type-III Response Function."
2. E3S Web of Conferences 483. 03003(2024). ISST 2023. <https://doi.org/10.1051/e3scomf/202448303003> dengan judul "Stability Analysis of Prey-predator Model Migration with Holling Type-III Response Function in The Presence of Competition and Toxicity."
3. Journal Nonlinear Dynamics and systems Teory dengan judul "The Dynamics and Stability of Prey-Predator Model Migration with Holling Type-III Response Function and Interspecific Competition in Prey".  
Submit, 30 April 2024.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa disertasi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 15 Juli 2024



Syamsul Agus

NIM H023202002

## UCAPAN TERIMA KASIH

Saya bersyukur kepada Allah SWT karena dengan rahmat dan karunianya disertasi ini dapat selesai dengan baik. Penelitian yang saya lakukan dapat terlaksana dengan sukses dan disertasi ini dapat terampungkan atas bimbingan, diskusi dan arahan Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc., sebagai promotor, Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si., dan Dr. Khaeruddin, M.Sc., sebagai ko-promotor. Saya juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada penguji Prof. Dr. Jeffry Kusuma., Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M. Sc., Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc., dan Prof. Syafruddin Side, S.Si, M.Si, Ph.D., sebagai penguji eksternal.

Ucapan terima kasih juga saya ucapkan kepada pimpinan Universitas Hasanuddin beserta jajarannya dan pada dosen pengajar program doktor Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memfasilitasi dan membimbing kami dalam menempuh studi. Selanjutnya ucapan terima kasih kepada Dr. Ismail, S.Pi, M.Sc., sebagai teman diskusi dan bertanya, terima kasih juga pada teman sejawat mahasiswa program doktor matematika Universitas Hasanuddin serta teman-teman lainnya yang tidak disebutkan satu persatu.

Akhirnya, kepada almarhum kedua orang tua tercinta saya mengucapkan limpah terima kasih dan sembah sujud atas doa, pengorbanan dan motivasi mereka selama saya menempuh Pendidikan. Penghargaan yang besar juga saya sampaikan kepada isteri tercinta dan seluruh keluarga atas motivasi dan dukungan yang tak ternilai.

Penulis,  
Syamsul Agus

## ABSTRAK

SYAMSUL AGUS. **Analisis Stabilitas Dinamika Model Migrasi *Prey*– *Predator* dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Kompetisi *Inter-Spesifik* serta Toksisitas yang diserap *Prey*** (dibimbing oleh Syamsuddin Toaha, Kasbawati, dan Khaeruddin).

Disertasi ini mengusulkan dan membahas model matematika yang menggambarkan interaksi *prey-predator* berdasarkan fenomena yang terjadi dalam ekosistem mangrove. Kepiting bakau bermigrasi dari area bebas menuju area terlindungi ataupun dari area terlindungi menuju area bebas. Interaksi tersebut mempertimbangkan kematian alami *prey*, kompetisi *inter-spesifik prey*, serta toksisitas logam berat yang diserap *prey* di area bebas maupun di area terlindungi. *Predator* mangrove jack memangsa kepiting bakau di area bebas. Pemangsaan predasi *predator* Mangrove jack diasumsikan dengan fungsi respon Holling tipe III, yakni *mangrove jack* mencari mangsa lain Ketika *prey* kepiting bakau mulai berkurang. Tujuan penelitian ini adalah 1. membangun model interaksi *prey-predator* di ekosistem mangrove yang terdiri dari a). Kematian alami *prey*, b). Kompetisi *inter-spesifik prey*, c). Toksisitas yang diserap *prey*. 2. Menentukan titik kesetimbangan sistem, menganalisis kestabilan titik keseimbangan interior setiap system. 3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik. Metode penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dalam pemodelan matematika. Metode penelitian ini dianalisis secara analitik dan numerik dengan mempelajari beberapa literatur yang telah dihimpun dari pengamatan dan hasil studi. Keberadaan titik kesetimbangan interior  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  model dianalisis dan diselidiki kestabilannya menggunakan metode linearisasi dan uji stabilitas Routh-Hurwitz. Simulasi numerik dilakukan untuk memverifikasi hasil analisis dan perilaku populasi. Penggunaan nilai parameter yang sesuai sehingga diperoleh titik kesetimbangan interior yang stabil. Hasil analisis titik kesetimbangan interior  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  pada masing-masing kasus merupakan titik yang stabil. Perubahan populasi *prey-predator* serta titik kesetimbangan terlihat akibat adanya migrasi, namun tetap stabil. Populasi *predator* meningkat signifikan dengan peningkatan migrasi *prey* di area bebas, sebaliknya ketika migrasi *prey* di area terlindungi meningkat, populasi *predator* mengalami penurunan. Kompetisi *inter-spesifik* dan toksisitas *prey* memberikan dampak terhadap populasi *prey-predator* semakin menurun, namun tetap stabil dan lestari untuk jangka waktu tertentu. Populasi *prey* yang mengalami peningkatan di area terlindungi berkontribusi positif terhadap keberlangsungan hutan mangrove.

Kata kunci: migrasi, fungsi respon Holling tipe III, kompetisi *Inter-spesifik*, dan toksisitas

## ABSTRACT

SYAMSUL AGUS. Stability Analysis of Prey–Predator Migration Model Dynamics with Type III Holling Response Function and Inter-Specific Competition and Toxicity absorbed by Prey (supervised by Syamsuddin Toaha, Kasbawati, and Khaeruddin).

This dissertation proposes and discusses a mathematical model that describes prey-predator interactions based on phenomena that occur in mangrove ecosystems. Mangrove crabs migrate from free areas to protected areas or from protected areas to free areas. This interaction takes into account the natural death of prey, inter-specific competition between prey, and the toxicity of heavy metals absorbed by prey in free and protected areas. Mangrove jack predators catch mangrove crabs in free areas. Mangrove jack predator predation is assumed to use a type III Holling response function, namely mangrove jacks look for other prey when mangrove crab prey begins to decrease. The aim of this research is 1. to build a prey-predator interaction model in the mangrove ecosystem which consists of a). Natural death of prey, b). Inter-specific prey competition, c). Toxicity absorbed by prey. 2. Determine the system equilibrium point, analyze the stability of the interior balance point of each system. 3. Interpret the results of numerical simulations. This research method is qualitative research in mathematical modeling. This research method is analyzed analytically and numerically, namely by studying several references that has been collected from observations and research results. The existence of the interior equilibrium point,  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  of the model, its stability is analyzed and investigated using the linearization method and the Routh-Hurwitz stability test. Numerical simulations were carried out to verify the analysis results and population behavior. Use appropriate parameter values to obtain a stable interior equilibrium point. The results of the analysis of the interior equilibrium point  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  in each case are a stable point. Changes in the prey-predator population and the equilibrium point can be seen due to migration, but remain stable. The predator population increases significantly with increasing prey migration in free areas, conversely, when prey migration in protected areas increases, the predator population decreases. Inter-specific competition and prey toxicity have an impact on the prey-predator population decreasing, but remaining stable and sustainable for a certain period of time. The increasing prey population in protected areas makes a positive contribution to the sustainability of mangrove forests.

Keywords: migration, Holling type III response function, inter-specific competition, and toxicity.



## DAFTAR ISI

DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR GAMBAR .....	x
DAFTAR TABEL .....	xi
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Ruang Lingkup Penelitian .....	4
1.6 Kebaharuan Penelitian .....	5
<b>BAB II ANALISIS STABILITAS MODEL MIGRASI <i>PREY-PREDATOR</i> DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE-III DI EKOSISTEM MANGROVE .....</b>	<b>6</b>
2.1 Abstrak .....	6
2.2 Pendahuluan .....	6
2.3 Metode Penelitian.....	7
2.3.1 Tahapan Penelitian .....	8
2.3.2 Konstruksi Model.....	9
2.4 Hasil Analisis .....	10
2.4.1 Model Migrasi <i>Prey-Predator</i> .....	10
2.4.2 Titik Keseimbangan.....	11
2.4.3 Analisis kestabilan.....	13
2.4.4 Simulasi Numerik .....	14
2.5 Kesimpulan .....	19
2.6 Daftar Pustaka .....	19
<b>BAB III ANALISIS STABILITAS MODEL MIGRASI <i>PREY-PREDATOR</i> DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE-III DAN KOMPETISI <i>INTER-SPESIFIK PREY</i>.....</b>	<b>21</b>
3.1 Abstrak .....	21
3.2 Pendahuluan .....	21
3.3 Metode penelitian .....	22
3.3.1 Tahapan Penelitian .....	23
3.3.2 Kontruksi Model.....	24

3.4	Hasil Analisis .....	25
3.4.1	Model Kompetisi Migrasi <i>Prey-Predator</i> .....	25
3.4.2	Kepositifan dan Keterbatasan Solusi .....	26
3.4.3	Analisis Titik Keseimbangan dan Stabilitas Lokal .....	28
3.4.4	Simulasi Numerik .....	33
3.5	Kesimpulan .....	40
3.6	Daftar Pustaka .....	40
BAB IV ANALISIS STABILITAS MODEL MIGRASI <i>PREY-PREDATOR</i> DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE-III SERTA KOMPETISI <i>INTER-SPEKIFIK</i> DAN TOKSISITAS <i>PREY</i> .....		42
4.1	Abstrak .....	42
4.2	Pendahuluan .....	42
4.3	Metode Penelitian .....	44
4.3.1	Tahapan Penelitian .....	45
4.3.2	Konstruksi Model .....	46
4.4	Hasil Analisis .....	47
4.4.1	Model kompetisi dan toksisitas migrasi <i>prey-predator</i> .....	47
4.4.2	Analisis titik keseimbangan dan stabilitas lokal .....	48
4.4.3	Simulasi Numerik .....	53
4.5	Hasil dan Pembahasan .....	54
4.5.1	Pengaruh migrasi terhadap populasi <i>prey-predator</i> .....	55
4.5.2	Efek kompetisi <i>inter-spesifik prey</i> .....	55
4.5.3	Pengaruh toksisitas terhadap populasi <i>prey-predator</i> .....	56
4.6	Kesimpulan .....	57
4.7	Daftar Pustaka .....	57
BAB V PENUTUP .....		60
5.1	Kesimpulan Umum .....	60
5.2	Masalah Terbuka .....	61
DAFTAR PUSTAKA .....		61

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1 Interaksi <i>Prey-Predator</i> di Mangrove.....	3
Gambar 2 Tahapan Penelitian .....	8
Gambar 3 Konstruksi model migrasi <i>prey-predator</i> .....	9
Gambar 4 Kurva solusi populasi <i>prey</i> ( $x$ ).....	17
Gambar 5 Kurva solusi populasi <i>prey</i> ( $y$ ).....	17
Gambar 6 Kurva solusi populasi <i>predator</i> ( $z$ ).....	17
Gambar 7 Tahapan Penelitian .....	23
Gambar 8 Konstruksi Model Migrasi Kompetisi <i>Prey-Predator</i> .....	24
Gambar 9 Diagram Kompartemen Model Migrasi <i>Prey-Predator</i> .....	25
Gambar 10 Efek migrasi terhadap <i>Prey-Predator</i> .....	35
Gambar 11 Tahapan Penelitian .....	45
Gambar 12 Konstruksi Model Migrasi Kompetisi dan Toksisitas <i>Prey</i> .....	46
Gambar 13 Diagram Kompartemen Model Migrasi <i>Prey-Predator</i> .....	47
Gambar 14 Perilaku populasi (a) <i>prey</i> ( $x$ ), (b) <i>prey</i> ( $y$ ), (c) <i>predator</i> ( $z$ ).....	54

**DAFTAR TABEL**

Tabel 1 Pengaruh Migrasi Titik Kesetimbangan Interior $T_3(x^*, y^*, z^*)$ .....	18
Tabel 2 Pengaruh Kematian Alami Titik Kesetimbangan Interior $T_3(x^*, y^*, z^*)$ .....	18
Tabel 3 Deskripsi variabel dan parameter .....	25
Tabel 4 Pengaruh migrasi kestabilan titik keseimbangan interior dan nilai eigen ...	38
Tabel 5 Pengaruh kompetisi kestabilan titik keseimbangan interior dan nilai eigen	39
Tabel 6 Deskripsi variabel dan parameter .....	47
Tabel 7 Pengaruh migrasi terhadap populasi <i>prey-predator</i> .....	55
Tabel 8 Pengaruh kompetisi terhadap populasi <i>prey-predator</i> .....	56
Tabel 9 Pengaruh toksisitas terhadap populasi <i>prey-predator</i> .....	56

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Ekosistem mangrove terhubung dengan estuaria serta wilayah pesisir dan pulau-pulau kecil dengan ekosistem yang lengkap. Ekosistem mangrove merupakan jalur migrasi bagi habitat jenis-jenis ikan dan organisme lainnya untuk mencari makan, bertelur, dan berpijah. Berbagai jenis ikan terutama jenis ikan *karnivora* masuk ke mangrove saat air laut pasang untuk mencari makan. Kakap merah atau mangrove jack (*Lutjanidae*) adalah salah satu spesies ikan *predator* yang terdapat di sekitar ekosistem mangrove (Nagelkerken *et al.*, 2008; Primavera, 1997).

Kepiting bakau dan hutan mangrove memiliki hubungan interaksi yang kuat. Kepiting bakau selain berperan besar dalam mendekomposisi bahan organik, juga berperan meningkatkan pertukaran oksigen dalam sedimen melalui aktifitas bioturbasi. Area mangrove merupakan habitat alami bagi kepiting. *Juvenil* kepiting bakau akan bermigrasi kembali ke estuaria, dan berangsur-angsur memasuki kawasan mangrove dan berkembang menjadi kepiting dewasa (Vay, 2001).

Pencemaran lingkungan perairan yang ditimbulkan dari logam berat dapat berpotensi mengendap di ekosistem mangrove. Menurut Hasimuna *et al.* (2021) beberapa logam berat diantaranya Cu, Co, Fe, Mn, Pb dan Zn menimbulkan resiko ekologis. Pandiyan *et al.* (2021) sesuai hasil kajiannya menyatakan Hg, Cr dan Co lebih besar pada sedimen, toksisitas Ni dan Cd masing-masing lebih tinggi pada polychaeta (cacing) dan moluska, namun toksisitas Cu dan Pb lebih besar pada kepiting dan toksisitas Zinc lebih besar pada ikan. Abdul *et al.* (2021) dalam hasil kajiannya menyatakan peningkatan jumlah toksisitas Cd dalam sedimen pada dermaga diduga dari kegiatan kapal penangkapan ikan di lokasi tersebut.

Menurut Meirikayanti *et al.* (2018) pencemaran perairan sungai Wonorejo yang disebabkan logam berat diduga memberi dampak bagi kepiting dan biota air yang dapat menghambat pertumbuhan hingga kematian. Dampak ekologis akibat rusaknya ekosistem mangrove adalah hilangnya berbagai spesies flora dan fauna yang berasosiasi dengan ekosistem mangrove. Dampak ekologis tersebut dalam jangka panjang dapat mengganggu keseimbangan ekosistem mangrove khususnya dan ekosistem pesisir umumnya (Majid *et al.*, 2016).

Dinamika populasi dalam pemodelan matematika dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena alam yang terjadi baik yang sederhana hingga yang kompleks, serta dapat digunakan untuk memprediksi perilaku sistem untuk jangka waktu sekarang, maupun akan datang (Toaha, 2013).. Interaksi *prey-predator* dimodelkan dalam sistem persamaan diferensial mulanya diperkenalkan sebagai model Lotka-Volterra. Populasi *prey* awalnya diasumsikan tumbuh secara

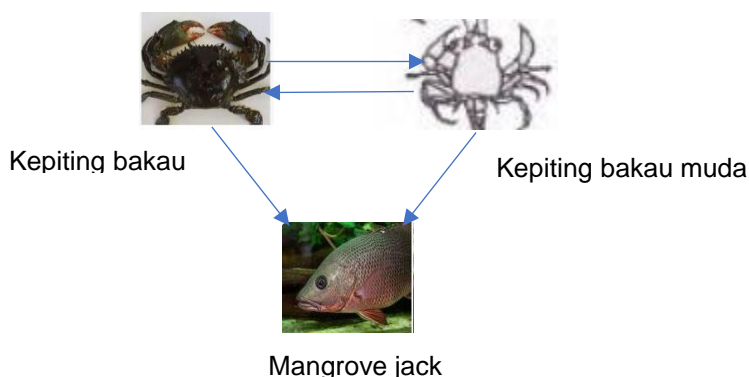
eksponensial kemudian tahun 1960 Leslie and Gower menyatakan bahwa populasi *prey-predator* tumbuh secara logistik dan dibatasi oleh jumlah *prey* yang tersedia. Selanjutnya Ibrahim, 2021; Ji *et al.*, 2009, mengasumsikan bahwa daya dukung lingkungan ketika terjadi kelangkaan makanan favorit, *predator* beralih memangsa *prey* lain.

Fungsi respon seperti yang dibahas Mapunda & Sagamiko, 2021; Panja, 2020, menyatakan model interaksi *prey-predator* dalam ekologi dikenal dengan fungsi respon yakni jumlah makanan yang dikonsumsi oleh *predator* sebagai fungsi kepadatan makanan. Selanjutnya Mertoja *et al.* (2018) menyatakan bahwa Holling tahun 1953 memperkenalkan fungsi respon Holling tipe I, tipe II dan tipe III. Kemudian Sarwardi *et al.*, 2012, 2013; Wei & Li, 2012; Xu *et al.*, 2017, menulis fungsi respon Holling tipe II. Fungsi respon berbeda dalam dinamika interaksi populasi selalu menarik berbagai peneliti dinamika populasi untuk dikaji (Alsakaji *et al.*, 2021; Didiharyono *et al.*, 2021; Djilali & Ghanbari, 2021; Jana *et al.*, 2012; Rindone & Eggleston, 2011; Savitri & Abadi, 2015). Penggunaan fungsi respon disesuaikan dengan karakteristik populasi yang dimangsa. Penulis Barhoom & Al-Nassir, (2021) menguji model *prey-predator* dengan fungsi respons Holling tipe III dengan asumsi terdapat batasan setiap *predator* mengonsumsi makanan pada tingkat trofik tertentu di rantai makanan.

Setiap spesies makhluk hidup pada umumnya melakukan migrasi dari satu area ke area yang lain. Migrasi spesies merupakan aktivitas perpindahan spesies dari satu tempat ke tempat lain dengan penyesuaian terhadap kondisi alam yang menguntungkan untuk eksistensi hidup dan keturunannya. Salah satu hal menarik yang banyak dikaji dalam interaksi *prey-predator* adalah model migrasi *prey-predator* yakni suatu spesies bermigrasi dari area terlindungi ke area bebas, ataupun sebaliknya spesies bermigrasi dari area bebas ke area terlindungi. Model *prey-predator* dengan migrasi telah banyak dibahas oleh berbagai penulis Huo *et al.*, 2012; Lv *et al.*, 2013; Pradhan *et al.*, 2017. Berbagai spesies melakukan migrasi mencari kondisi alam yang menguntungkan untuk eksistensi hidup dan keturunannya serta untuk mencari makan. Model migrasi *prey-predator* dengan keberadaan burung pemangsa di kedua area, serta penangkapan ikan hanya pada area bebas tangkap (Agnihotri & Nayyer, 2018; Sharma & Gupta, 2014).

Kompetisi merupakan interaksi suatu spesies dengan spesies lain yang menggunakan sumber daya yang sama dan saling memperebutkan sumber daya tersebut untuk bertahan hidup. Model migrasi *prey-predator* dengan melibatkan kompetisi intra-spesifik predator (Chakraborty *et al.*, 2011; Jana *et al.*, 2012). Selanjutnya Subchan (2020) menambahkan dengan fungsi respon Holling tipe III. Model migrasi *prey-predator* menambahkan adanya spesies yang terinfeksi toksik akibat adanya pencemaran lingkungan (Lemnaouar *et al.*, 2020, 2021; Yang & Jia, 2016).

Kematian alami dari setiap spesies biasanya disebabkan oleh beberapa faktor diantaranya perubahan lingkungan yang ekstrim. Penelitian yang dilakukan sebelumnya berkaitan model interaksi migrasi *prey-predator* pada umumnya tidak mempertimbangkan kematian alami *prey*. Dalam penelitian ini memperkenalkan model Interaksi dinamika migrasi *prey-predator* berdasarkan fenomena dalam ekosistem mangrove. Perilaku migrasi *prey* (kepiting bakau) di area terlindungi maupun *prey* (kepiting bakau) di area bebas akan berinteraksi dengan *predator* mangrove jack yang dikenal dengan ikan kakap merah (*Lutjanidae*). Predasi *predator* diasumsikan memangsa *prey* dengan fungsi respon Holling tipe III berdasarkan beberapa faktor ketersediaan makanan, yakni *predator* akan mencari mangsa lain ketika mangsa utama mulai berkurang di sekitar ekosistem mangrove. Model interaksi tersebut seperti diilustrasikan Gambar 1



Gambar 1. Interaksi *Prey-Predator* di Mangrove

Kajian disertasi ini diawali dengan mengkonstruksi dan menganalisis model migrasi Interaksi *prey-predator* di ekosistem mangrove.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dalam penelitian ini mengkonstruksi model interaksi *prey-predator* dengan migrasi *prey* di dua area yaitu area terlindungi di mangrove ke area bebas di luar mangrove ataupun sebaliknya dari area bebas ke area terlindungi. *Predator* diasumsikan memangsa *prey* dengan fungsi respon Holling III. Konstruksi model dalam penelitian ini dikembangkan dengan asumsi yakni *predator* memangsa *prey* di area bebas, adanya kompetisi internal *predator*, kompetisi *inter-spesifik*, dan toksisitas dari *prey*. Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan dapat dirumuskan beberapa permasalahan yang dapat diselesaikan dalam penelitian ini:

1. Bagaimana model interaksi migrasi *prey-predator* di ekosistem mangrove diasumsikan *predator* memangsa *prey* di area bebas dengan fungsi respon Holling tipe III, terdapat kematian alami *prey-predator* serta kompetisi *intra-spesifik predator* yang terdiri atas

- a. Model interaksi *prey-predator* terdapat kematian alami *prey*?
  - b. Model interaksi *prey-predator* terdapat kematian alami dan kompetisi *inter-spesifik prey*?
  - c. Model interaksi *prey-predator* dengan kematian alami *prey*, kompetisi *inter-spesifik* dan toksisitas *prey*?
2. Bagaimana dinamika perubahan populasi masing-masing sistem?
  3. Bagaimana simulasi numerik model interaksi tersebut dan solusi masing-masing sistem?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian disertasi ini adalah sebagai berikut

1. Membangun model interaksi *prey-predator* di ekosistem mangrove diasumsikan predator memangsa *prey* di area bebas dengan fungsi respon Holling tipe III, terdapat kematian alami *prey-predator* serta kompetisi *intra-spesifik predator* yang terdiri
  - a. Model interaksi *prey-predator* terdapat kematian alami *prey*.
  - b. Model interaksi *prey-predator* terdapat kematian alami dan kompetisi *inter-spesifik prey*.
  - c. Model interaksi *prey-predator* dengan kematian alami *prey*, kompetisi *inter-spesifik* dan toksisitas *prey*.
2. Menentukan titik kesetimbangan sistem, menganalisis kestabilan titik keseimbangan interior setiap sistem.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik.

### 1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi konstribusi pada pengembangan model matematika dinamika *predator-prey*, khususnya untuk mengetahui gambaran perubahan dinamika populasi kepiting bakau dan mangrove jack, selain itu diharapkan sebagai bahan pertimbangan pihak terkait dalam pengelolaan lingkungan hidup juga kebijakan pengelolaan penangkapan kepiting di alam untuk mengatasi permasalahan kestabilan ekosistem suatu populasi *prey* maupun *predator*.

### 1.5 Ruang Lingkup Penelitian

Berdasarkan latar belakang batasan masalah dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Populasi *prey* merupakan mangsa utama *predator* (mangrove Jack) di sekitar ekosistem mangrove. Area bebas di asumsikan area perairan sebelum juvenil kepiting (kepiting bakau muda) memasuki area terlindungi (mangrove).



2. Migrasi merupakan perpindahan *prey* (kepiting bakau) dari area bebas ke area terlindungi atau sebaliknya, *Predator* memangsa *prey* di area bebas.
3. Area terlindungi dalam tulisan ini diasumsikan area ideal *prey* yang merupakan habitat alami untuk mencari makan, tempat asuhan dan juga tempat berlindung dari ancaman *predator*.

## 1.6 Kebaharuan Penelitian

Keterbaruan yang dikaji dalam penelitian disertasi ini adalah konstruksi model berdasarkan fenomena dalam ekosistem mangrove. Model migrasi *prey-predator* ini dikonstruksi dan dikembangkan dari peneliti sebelumnya. Konstruksi yang membuat model ini berbeda dari model peneliti sebelumnya adalah penambahan parameter-parameter yang dapat mempengaruhi perubahan populasi di ekosistem mangrove. Parameter-parameter tersebut meliputi:

1. Kematian alami *prey*.
2. Kematian alami dan Kompetisi *Inter-spesifik prey*.
3. Kematian alami *prey*, Kompetisi *Inter-spesifik*, dan toksisitas *prey*.

Penambahan asumsi parameter kematian alami *prey-predator*, toksisitas *prey*, dan kompetisi *inter-spesifik* yang akan berpengaruh terhadap perubahan populasi *prey-predator* saat *prey* bermigrasi. Asumsi tersebut didasarkan karakter spesies *prey-predator*. Populasi yang ditinjau merupakan populasi yang bermanfaat bagi kehidupan manusia terutama kelangsungan ekosistem mangrove. Konstruksi pertimbangan tersebut dikembangkan dari model yang dikaji peneliti sebelumnya

Interaksi *prey-predator* antara kepiting bakau (*prey*) saat bermigrasi dengan *predator* mangrove jack yang berada di sekitar ekosistem mangrove. Model migrasi *prey-predator* yang dikonstruksi terdiri atas model interaksi *prey-predator* fungsi respon Holling tipe III dengan kematian alami *prey-predator*, toksisitas *prey*, kompetisi *intra-spesifik predator*, dan kompetisi *inter-spesifik prey*.

## BAB II

### ANALISIS STABILITAS MODEL MIGRASI *PREY-PREDATOR* DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE-III DI EKOSISTEM MANGROVE

#### 2.1 Abstrak

Tulisan ini membahas tentang dinamika dan interaksi populasi *prey* dan *predator* dalam suatu ekosistem yang terdiri dua area, yaitu area terlindungi dan area bebas. Populasi *prey* dalam ekosistem diasumsikan bermigrasi dari area terlindungi ke area bebas ataupun sebaliknya, sedangkan populasi *predator* memangsa *prey* di area bebas. Dinamika *prey* dan *predator* dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial berdasarkan kapasitas asupan makanan dan beberapa faktor lainnya. Fungsi respon predasi Holling tipe III dipertimbangkan dalam mekanisme interaksi antara *prey* dan *predator*. Keberadaan titik kesetimbangan interior model dianalisis dan diselidiki kestabilannya menggunakan metode linearisasi dan uji stabilitas Routh-Hurwitz. Simulasi numerik dilakukan untuk memverifikasi hasil analisis dan perilaku populasi. Penggunaan nilai parameter yang sesuai sehingga diperoleh titik kesetimbangan interior yang stabil. Perubahan populasi *prey-predator* serta titik kesetimbangan terlihat akibat adanya migrasi, namun tetap stabil. Populasi *predator* meningkat signifikan dengan peningkatan migrasi *prey* di area bebas, sebaliknya ketika migrasi *prey* di area terlindungi meningkat, populasi *predator* mengalami penurunan. Populasi *prey* yang mengalami peningkatan di area terlindungi akan meningkatkan kerapatan dan keberlangsungan hutan mangrove.

#### 2.2 Pendahuluan

Hutan mangrove merupakan habitat alami bagi kepiting bakau dan menetap di hutan mangrove dalam siklus hidupnya. Kepiting bakau keluar dari hutan mangrove menuju ke perairan pantai saat hendak memijah. *Juvenil* kepiting bakau akan bermigrasi kembali ke muara dan lambat laun masuk ke kawasan mangrove hingga berkembang menjadi kepiting bakau dewasa (Vay, 2001). Kepiting bakau merupakan salah satu spesies kunci di hutan mangrove. Interaksi kepiting bakau terhadap hutan mangrove merupakan simbiosis mutualisme yang berkorelasi positif terhadap kerapatan hutan mangrove. Kawasan ekosistem hutan mangrove sering didatangi berbagai ikan *predator* diantaranya mangrove jack atau yang dikenal dengan ikan kakap merah (Primavera, 1997).

Laju kematian alami pada kepiting bakau disebabkan karena kepiting bakau tidak pernah tertangkap sehingga mati alami karena umur tua, atau karena daya dukung lingkungan yang rendah, misalnya akibat perubahan lingkungan yang ekstrim atau faktor makanan alami yang tidak tercukupi (Wijaya *et al.*, 2010). Model matematika sudah dikenal luas, digunakan untuk menjelaskan fenomena alam yang terjadi. Beberapa penulis menambahkan dan mempertimbangkan variabel kematian alami *prey* dalam model tersebut. Kematian alami selain kematian terjadi pada setiap populasi, baik *prey* maupun *predator* (Roy & Roy, 2021; Toaha & Rustam, 2017).

Salah satu hal yang menarik untuk dikaji dalam interaksi *prey-predator* dalam ekologi yakni model migrasi *prey-predator*. Spesies bermigrasi dari area terlindungi ke area bebas ataupun dari area bebas ke area terlindungi. Model migrasi *prey-predator* dengan asumsi terdapat dua area yaitu area bebas dan area terlindungi serta adanya kompetisi *intra-spesifik predator* yang berada di salah satu area (Chakraborty *et al.*, 2011; Jana *et al.*, 2012). Kompetisi *intra-spesifik* dalam dinamika populasi dapat terjadi antar *predator* dalam memperebutkan *prey* yang tersedia, apabila *prey* yang merupakan sumber makanan utama mulai berkurang *predator* akan mencari *prey* lain untuk bertahan hidup. Pemangsaan *predator* saat *prey* mulai berkurang dan *predator* mencari *prey* lain untuk memangsa dikenal dengan fungsi respon Holling tipe III (Subchan, 2020).

Model matematika dalam ekologi dengan migrasi populasi baik dari area terlindungi ke area bebas ataupun sebaliknya migrasi dari area bebas ke area terlindungi. Model migrasi *prey-predator* masih menjadi perhatian banyak peneliti untuk dikaji. Berdasarkan rangkaian penelitian sebelumnya, tulisan ini dikembangkan dengan memperkenalkan model matematika migrasi kepiting bakau. Model migrasi ini mempertimbangkan kematian alami *prey-predator*. Migrasi kepiting bakau di ekosistem mangrove merupakan bagian siklus hidup kepiting bakau. Populasi spesies kepiting bakau di area terlindungi diasumsikan sebagai *prey* ( $x$ ), populasi kepiting bakau di area terlindungi sebagai *prey* ( $y$ ) dan populasi ikan kakap merah di area bebas sebagai *predator* ( $z$ ).

Dalam tulisan ini diasumsikan populasi spesies *predator* memangsa populasi spesies *prey* di area bebas, berdasarkan kapasitas asupan makanan dan faktor lain dengan fungsi respons Holling tipe III. Kematian alami *prey* saat migrasi di area terlindungi dan area bebas diasumsikan dalam tulisan ini, serta menganalisis keberadaan dan kestabilan titik keseimbangan interior. Uji stabilitas Routh-Hurwitz diterapkan untuk mengetahui jenis kestabilan titik keseimbangan interior. Pengaruh migrasi terhadap dinamika perubahan populasi *prey-predator* baik di area terlindungi maupun di area bebas juga dikaji dalam tulisan ini. Simulasi numerik dilakukan untuk memastikan kestabilan titik kesetimbangan interior dan dinamika perubahan populasi *prey-predator*.

### 2.3 Metode Penelitian

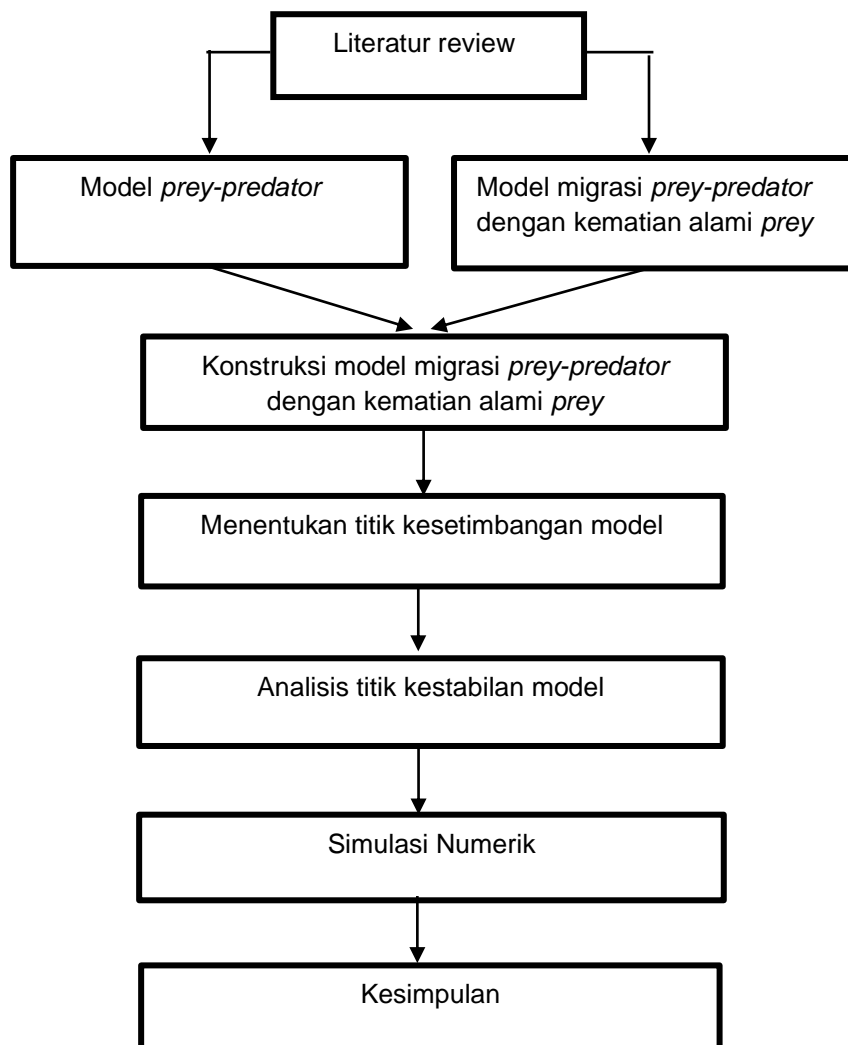
Metode penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dalam pemodelan matematika. Metode penelitian ini dianalisis secara analitik dan numerik dengan mempelajari beberapa literatur yang telah dihimpun dari pengamatan dan hasil studi. Nilai-nilai parameter yang digunakan adalah estimasi yang disesuaikan dengan nilai parameter berbagai sumber rujukan yang terkait dalam pemodelan dinamika populasi.

Kegiatan penelitian dimulai dengan konstruksi model *prey-predator*, penentuan titik kesetimbangan (*equilibrium*) dengan melinearisasi suatu model,

penentuan titik kesetimbangan interior melalui tiga kasus perubahan koefisien migrasi, menganalisis kestabilan lokal, selanjutnya melakukan simulasi serta menginterpretasikan secara ekologis dari analisis kestabilan yang telah diperoleh. Tahapan dan konstruksi model dalam metode penelitian ini yakni.

### 2.3.1 Tahapan Penelitian

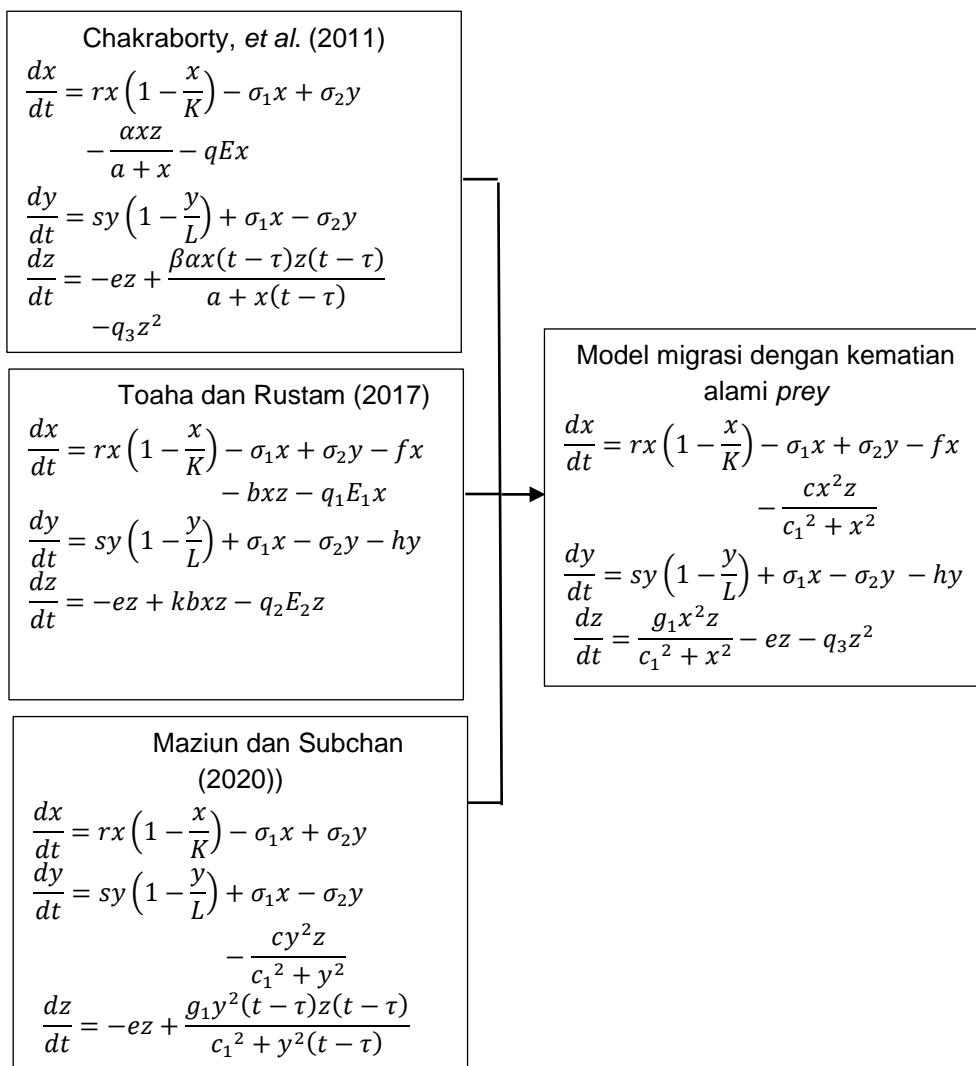
Tahapan penelitian disertasi ini diilustrasikan dalam Gambar 2



Gambar 2. Tahapan Penelitian

### 2.3.2 Konstruksi Model

Model ini dikembangkan dengan asumsi terdapat kematian alami *prey-predator*, serta dengan pemangsaan predasi predator menggunakan fungsi respon Holling tipe III. Model ini dikonstruksi dari peneliti sebelumnya yakni (Toaha dan Rustam., 2017; Maziun dan Subchan, 2020; Chakraborty *et al.*, 2011). Model hasil konstruksi diilustrasikan di Gambar 3.



Gambar 3. Konstruksi model migrasi *prey-predator*

## 2.4 Hasil Analisis

### 2.4.1 Model Migrasi *Prey-Predator*

Tulisan ini membahas model *prey-predator* yang terdiri dari dua area, yaitu area bebas yaitu area di luar mangrove dan area terlindungi di mangrove. Diasumsikan kepiting bakau muda bermigrasi dari area bebas ke area terlindungi ataupun sebaliknya migrasi kepiting dari area terlindungi ke area bebas. Ikan kakap merah sebagai *predator* memangsa kepiting bakau di area bebas. Populasi *prey* diasumsikan bermigrasi di dua area tersebut. Pertumbuhan *prey* baik di area bebas maupun di area terlindungi diasumsikan bertumbuh logistik. Dinamika populasi *prey-predator* dimodelkan sebagai sistem persamaan diferensial seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{cx^2z}{c_1 + x^2} - fx, \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y - hy, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{g_1 x^2 z}{c_1 + x^2} - ez - q_3 z^2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan asumsi untuk model (2.1) adalah sebagai berikut

1. Variabel  $x = x(t)$  dan  $y = y(t)$  adalah kepadatan populasi spesies *prey* yang masing-masing berada di area bebas dan terlindungi pada waktu ( $t$ ). Variabel  $z = z(t)$  merupakan kepadatan populasi jenis ikan *predator* pada waktu ( $t$ ). Pada aspek ekologi, diasumsikan kondisi awal ketiga populasi adalah positif, yaitu  $x(0) = x_0 \geq 0$ ,  $y(0) = y_0 \geq 0$ , and  $z(0) = z_0 \geq 0$ .
2. Parameter-parameter  $r, K, \sigma_1, \sigma_2, c, c_1, f, h, e, s, L, g_1$ , dan  $q_3$  berturut-turut menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi *prey* di area bebas, daya dukung ekosistem untuk populasi *prey* di area bebas, tingkat migrasi *prey* dari area bebas ke area terlindungi, tingkat migrasi *prey* dari area terlindungi ke area bebas, tingkat konsumsi maksimum *predator* per kapita, laju konsumsi *prey* oleh *predator*, angka kematian *prey* di area bebas, angka kematian *prey* di area terlindungi, angka kematian *predator*, laju pertumbuhan intrinsik populasi *prey* di area terlindungi, daya dukung ekosistem bagi populasi *prey* di area terlindungi, tingkat konservasi kepuasan *predator*, koefisien kompetisi *intra-spesifik predator*.
3. Penulis (Barhoom & Al-Nassir, 2021; Subchan, 2020) menjelaskan alasan ekologis mengapa pemangsaan *predator* dengan fungsi respons Holling tipe-III yakni  $\frac{cx^2z}{c_1+x^2}$  diterapkan. Konstruksi model yang akan dikembangkan mengikuti fungsi predasi ini.

Tahapan awal yang dilakukukan dengan menyederhanakan model (2.1) untuk lebih mudah dalam menganalisis model tersebut. Misalkan  $R = r - \sigma_1 - f$ ,  $R_1 = \frac{r}{K}$ ,  $S = s - \sigma_2 - h$ ,  $S_1 = \frac{s}{L}$ . Model baru yang terbentuk yakni

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \left[ (R - R_1 x) - \frac{cxz}{c_1 + x^2} \right] + \sigma_2 y, \\ \frac{dy}{dt} &= y[(S - S_1 y)] + \sigma_1 x, \\ \frac{dz}{dt} &= z \left( \frac{g_1 x^2}{c_1 + x^2} - e - q_3 z \right),\end{aligned}\tag{2.2}$$

#### 2.4.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan pada sistem (2.2) adalah solusi yang memenuhi  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$ . Sistem (2.2) dapat ditulis

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \left[ (R - R_1 x) - \frac{cxz}{c_1 + x^2} \right] + \sigma_2 y = 0, \\ \frac{dy}{dt} &= y[(S - S_1 y)] + \sigma_1 x = 0, \\ \frac{dz}{dt} &= z \left( \frac{g_1 x^2}{c_1 + x^2} - e - q_3 z \right) = 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

dengan kondisi awal  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

Berdasarkan persamaan sistem (2.3) diperoleh

$$z = 0,\tag{2.4}$$

atau  $g_1 x^2 - ec_1 - ex^2 - q_3 c_1 z - q_3 z x^2 = 0$ .

$x^2(g_1 - d) - dc_1 = q_3(x^2 + c_1)z$ .

Misal  $\gamma = \frac{g_1 - e}{q_3}$ ,  $\gamma_1 = \frac{ec_1}{q_3}$  dengan semua nilai parameter positif serta  $\gamma - \gamma_1 > 0$ ,

$\gamma x^2 - \gamma_1 > 0, \gamma > 0$  sehingga diperoleh  $x > 0, z > 0$  dan

$$z = \frac{\gamma x^2 - \gamma_1}{(x^2 + c_1)}.\tag{2.5}$$

Tinjau salah satu persamaan sistem (2.3)

$$\frac{dy}{dt} = y[(S - S_1 y)] + \sigma_1 x = 0,$$

Selanjutnya diperoleh

$$x = \frac{y[(S_1 y - S)]}{\sigma_1}.\tag{2.6}$$

Berdasarkan persamaan (2.4), (2.6) dan sistem (2.3) diperoleh

$$y = 0,\tag{2.7}$$

atau

$$(R_1S_1^2)y^3 - 2SS_1R_1y^2 + (R_1S_1^2 - RS_1\sigma_1)y + RS\sigma_1 - \sigma_2\sigma_1^2 = 0, \quad (2.8)$$

dengan  $y$  merupakan akar positif dari persamaan persamaan (2.8).

Tinjau  $y = 0$  pada (2.7) serta sistem (2.3). Selanjutnya pilih persamaan  $y[(S - S_1y)] + \sigma_1x = 0$ , diperoleh

$$x = 0 \quad (2.9)$$

Substitusi (2.7), (2.9) ke persamaan  $x \left[ (R - R_1x) - \frac{cxz}{c_1+x^2} \right] + \sigma_2y = 0$  diperoleh

$$z = 0. \quad (2.10)$$

Misalkan  $x = x_1$  pada (2.9),  $y = y_1$  pada (2.7) serta  $z = z_1$  di (2.10) merupakan titik kesetimbangan  $T_1(0, 0, 0)$ .

Tinjau (2.4), (2.6), (2.8) yakni  $x = x_2 = \frac{y[(S_1y - S)]}{\sigma_1}$ ,  $y = y_2$ ,  $z = z_2$  dengan  $y_2$  merupakan akar positif persamaan

$$(R_1S_1^2)y^3 - 2SS_1R_1y^2 + (R_1S_1^2 - RS_1\sigma_1)y + RS\sigma_1 - \sigma_2\sigma_1^2 = 0.$$

Berdasarkan uraian di atas titik kesetimbangan  $T_2(x_2, y_2, 0)$  dengan  $S_1y - S > 0$ .

Titik kesetimbangan selanjutnya yaitu  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  diperoleh dari substitusi persamaan (2.5), (2.6) ke persamaan  $x \left[ (R - R_1x) - \frac{cxz}{c_1+x^2} \right] + \sigma_2y = 0$  di sistem (2.3).

Titik  $x = x^* = \frac{y^*[(S_1y^* - S)]}{\sigma_1}$  di persamaan (2.6),  $z = z^* = \frac{\gamma x^{*2} - \gamma_1}{(x^{*2} + c_1)}$  dipersamaan (2.5) sehingga diperoleh  $y^*$  yang merupakan akar positif dari persamaan

$$A_1y^{11} + A_2y^{10} + A_3y^9 + A_4y^8 + A_5y^7 + A_6y^6 + A_7y^5 + A_8y^4 + A_9y^3 + A_{10}y^2 + A_{11}y + A_0 = 0, \quad (2.11)$$

dengan

$$A_1 = R_1S_1^6,$$

$$A_2 = -6SR_1S_1^5,$$

$$A_3 = 15S^2R_1S_1^4 - RS_1^5\sigma_1,$$

$$A_4 = 5RSS_1^4\sigma_1 - 20S^3R_1S_1^3 - S_1^4\sigma_1^2\sigma_2,$$

$$A_5 = 2R_1S_1^4c_1\sigma_1^2 - 10RS^2S_1^3\sigma_1 + 15S^4R_1S_1^2 + 4SS_1^3\sigma_1^2\sigma_2 + c\gamma S_1^4\sigma_1^2,$$

$$A_6 = -8SR_1S_1^3c_1\sigma_1^2 + 10RS^3S_1^2\sigma_1 - 6S^5R_1S_1 - 6S^2S_1^2\sigma_1^2\sigma_2 - 4Sc\gamma S_1^3\sigma_1^2,$$

$$A_7 = -2Rc_1S_1^3\sigma_1^3 + 12R_1c_1S_1^2S^2\sigma_1^2 - 5RS_1\sigma_1S^4 + R_1S^6 + 4S_1\sigma_2S^3\sigma_1^2 + 6c\gamma S^2S_1^2\sigma_1^2,$$

$$A_8 = 6RSc_1S_1^2\sigma_1^3 - 8R_1S_1c_1\sigma_1^2S^3 - 2c_1\sigma_2S_1^2\sigma_1^4 + R\sigma_1S^5 - \sigma_2\sigma_1^2S^4 - 4c\gamma SS^3\sigma_1^2,$$

$$A_9 = R_1S_1^2c_1^2\sigma_1^4 - 6RS_1c_1S^2\sigma_1^3 + c\gamma S^4\sigma_1^2 + 2R_1c_1\sigma_1^2S^4 + 4SS_1c_1\sigma_2\sigma_1^4 - c\gamma S_1^2\sigma_1^4,$$

$$A_{10} = -2SR_1S_1c_1^2\sigma_1^4 + 2Rc_1S^3\sigma_1^3 - 2c_1\sigma_2S^2\sigma_1^4 + 2Sc\gamma S_1\sigma_1^4,$$



$$A_{11} = -RS_1c_1^2\sigma_1^5 + R_1S^2c_1^2\sigma_1^4 - S^2c\gamma_1\sigma_1^4, \text{ dan}$$

$$A_0 = RS_1c_1^2\sigma_1^5 - \sigma_2c_1^2\sigma_1^6.$$

Berdasarkan uraian tersebut, syarat persamaan (2.11) mempunyai titik kesetimbangan interior positif dengan  $S_1y^* > S$ ,  $\gamma x^{*2} - \gamma_1 > 0$ ,  $\gamma > \gamma_1$ . Titik kesetimbangan interior berdasarkan uraian di atas yaitu  $T_3(x^*, y^*, z^*)$ . Simulasi numerik dilakukan untuk memvalidasi dan memverifikasi semua hasil yang diperoleh termasuk titik kesetimbangan.

### 2.4.3 Analisis kestabilan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan dilakukan dengan metode pelinearan dan penentuan kestabilan dengan memperhatikan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik kesetimbangan. Pada sistem (2.1) akan dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan khususnya titik kesetimbangan interior. Persamaan sistem (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$f_1(x, y, z) = x \left[ (R - R_1x) - \frac{cxz}{c_1 + x^2} \right] + \sigma_2y,$$

$$f_2(x, y, z) = y[(S - S_1y)] + \sigma_1x,$$

$$f_3(x, y, z) = z \left( \frac{g_1x^2}{c_1 + x^2} - e - q_3z \right).$$

Mariks Jacobian persamaan sistem (2.2) berdasarkan uraian sebelumnya yakni

$$J = \begin{pmatrix} R - 2R_1x - \frac{2cxz}{x^2 + c_1} + \frac{2cx^3z}{(x^2 + c_1)^2} & \sigma_2 & -\frac{cx^2}{x^2 + c_1} \\ \sigma_1 & S - 2yS_1 & 0 \\ \frac{2g_1c_1xz}{(x^2 + c_1)^2} & 0 & \frac{g_1x^2}{x^2 + c_1} - e - 2q_3z \end{pmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai bentuk.

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ J_{31} & 0 & J_{33} \end{pmatrix}, \text{ dengan}$$

$$J_{11} = R - 2R_1x^* - \frac{2cx^*z^*}{x^{*2} + c_1} + \frac{2cx^{*3}z^*}{(x^{*2} + c_1)^2},$$

$$J_{12} = \sigma_2,$$

$$J_{13} = -\frac{cx^{*2}}{x^{*2} + c_1},$$

$$J_{21} = \sigma_1,$$

$$J_{22} = S - 2y^*S_1,$$

$$J_{23} = 0,$$

$$J_{31} = \frac{2g_1c_1x^*z^*}{(x^{*2} + c_1)^2},$$

$$J_{32} = 0,$$

$$J_{33} = \frac{g_1 x^{*2}}{x^{*2} + c_1} - e - 2q_3 z^*.$$

Determinan matriks Jacobian tersebut adalah

$$\begin{vmatrix} R - 2R_1 x - \frac{2cxz}{x^2 + c_1} + \frac{2cx^3z}{(x^2 + c_1)^2} - \lambda & \sigma_2 & -\frac{cx^2}{x^2 + c_1} \\ \sigma_1 & S - 2yS_1 - \lambda & 0 \\ \frac{2g_1 c_1 xz}{(x^2 + c_1)^2} & 0 & \frac{g_1 x^2}{x^2 + c_1} - e - 2q_3 z - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Persamaan karakteristik sebagai persamaan polinomial yang berhubungan dengan matriks Jacobian diberikan oleh  $|J - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3, \text{ dengan}$$

$$a_1 = -(J_{33} + J_{22} + J_{11}),$$

$$a_1 = \frac{g_1 x^2}{x^2 + c_1} - e - 2q_3 z + S - 2yS_1 + R - 2R_1 x - \frac{2cxz}{x^2 + c_1} + \frac{2cx^3z}{(x^2 + c_1)^2},$$

$$a_2 = J_{11}J_{22} + J_{33}(J_{11} + J_{22}) - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31},$$

$$\begin{aligned} a_2 = & \left( R - 2R_1 x - \frac{2cxz}{x^2 + c_1} + \frac{2cx^3z}{(x^2 + c_1)^2} \right) (S - 2yS_1) \\ & + \left( \frac{g_1 x^2}{x^2 + c_1} - e - 2q_3 z \right) \left[ \left( R - 2R_1 x - \frac{2cxz}{x^2 + c_1} + \frac{2cx^3z}{(x^2 + c_1)^2} \right) + (S - 2yS_1) \right] \\ & - \sigma_2 \sigma_1 - \left( -\frac{cx^2}{x^2 + c_1} \right) \left( \frac{2g_1 c_1 xz}{(x^2 + c_1)^2} \right), \end{aligned}$$

$$a_3 = J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{22}J_{31} - J_{11}J_{22}J_{33},$$

$$\begin{aligned} a_3 = & \sigma_2 \sigma_1 \left( \frac{g_1 x^2}{x^2 + c_1} - e - 2q_3 z \right) + \left( -\frac{cx^2}{x^2 + c_1} \right) (S - 2yS_1) \left( \frac{2g_1 c_1 xz}{(x^2 + c_1)^2} \right) \\ & - \left( R - 2R_1 x - \frac{2cxz}{x^2 + c_1} + \frac{2cx^3z}{(x^2 + c_1)^2} \right) (S - 2yS_1) \left( \frac{g_1 x^2}{x^2 + c_1} - e - 2q_3 z \right). \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria stabilitas Routh-Hurwitz seperti yang ditulis (Dubey *et al.*, 2018), titik kesetimbangan interior  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  merupakan stabil asimtotik lokal ketika  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , and  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ . Selanjutnya mensubstitusi nilai parameter tertentu dengan simulasi numerik untuk menunjukkan kestabilan sistem.

#### 2.4.4 Simulasi Numerik

Berdasarkan hasil analisis di atas, kami memberikan nilai parameter untuk mensimulasikan pengaruh migrasi terhadap populasi *prey-predator*. Nilai parameter ini merupakan nilai yang diasumsikan dan disesuaikan dari sejumlah referensi. Pada simulasi numerik menurut peneliti (Toaha *et al.*, 2014).

Berikut ini adalah contoh nilai parameter yang diberikan untuk menentukan titik kesetimbangan persamaan sistem (2.1). Nilai parameter tersebut seperti contoh berikut

$$r = 0.8, \sigma_1 = 0.21, \sigma_2 = 0.2, K = 14, L = 9, f = 0.02, c = 2.5, h = 0.01, s = 0.9, q_3 = 0.3, g_1 = 0.8.$$

Dalam tulisan ini, nilai parameter migrasi *prey* yang masuk atau keluar suatu area dibagi menjadi beberapa kasus yaitu  $\sigma_1 < \sigma_2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\sigma_1 > \sigma_2$ . Nilai parameter migrasi dapat membantu menemukan titik kesetimbangan positif. Nilai parameter yang sesuai selanjutnya disubstitusi ke persamaan sistem untuk memvalidasi titik kesetimbangan positif yakni  $T_1(0, 0, 0)$ ,  $T_2(x_2, y_2, 0)$  dan  $T_3(x^*, y^*, z^*)$ .

Titik kesetimbangan dan nilai eigen yang dihasilkan dinyatakan seperti contoh sebagai berikut:

Kasus  $\sigma_1 < \sigma_2$ , dengan  $\sigma_1 = 0.2, \sigma_2 = 0.21$ , diperoleh  $T_1(0, 0, 0)$ ,  $\lambda_1 = 0.419$ ,  $\lambda_2 = 0.842$ ,  $\lambda_3 = -0.3$ .  $T_2 = (12.87, 9.507, 0)$ ,  $\lambda_1 = -0.792$ ,  $\lambda_2 = -1.319$ ,  $\lambda_3 = 0.495$ .  $T_3 = (2.265, 7.411, 1.232)$ ,  $\lambda_{1,2} = -0.194 \pm 0.448$ ,  $\lambda_3 = -0.834$ .

Kasus  $\sigma_1 = \sigma_2$ , dengan  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.21$ , diperoleh  $T_1(0, 0, 0)$ ,  $\lambda_1 = 0.408$ ,  $\lambda_2 = 0.842$ ,  $\lambda_3 = -0.3$ .  $T_2 = (12.74, 9.59, 0)$ ,  $\lambda_1 = -0.788$ ,  $\lambda_2 = -1.336$ ,  $\lambda_3 = 0.495$ .  $T_3 = (2.242, 7.433, 1.224)$ ,  $\lambda_{1,2} = -0.199 \pm 0.454$ ,  $\lambda_3 = -0.840$ .

Kasus  $\sigma_1 > \sigma_2$ , dengan  $\sigma_1 = 0.21, \sigma_2 = 0.2$ , diperoleh  $T_1(0, 0, 0)$ ,  $\lambda_1 = 0.416$ ,  $\lambda_2 = 0.844$ ,  $\lambda_3 = -0.3$ .  $T_2 = (12.65, 9.652, 0)$ ,  $\lambda_1 = -0.783$ ,  $\lambda_2 = -1.332$ ,  $\lambda_3 = 0.495$ .  $T_3 = (2.164, 7.506, 1.198)$ ,  $\lambda_{1,2} = -0.203 \pm 0.472$ ,  $\lambda_3 = -0.843$ .

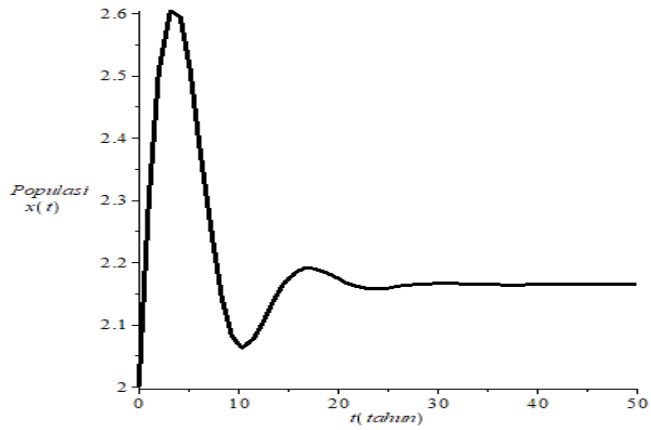
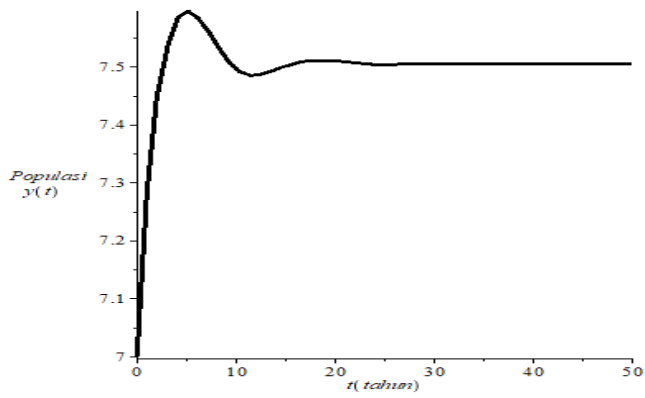
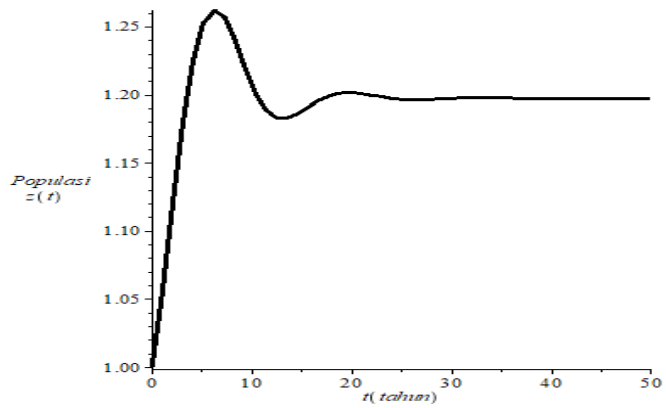
Titik kesetimbangan  $T_1$  dan  $T_2$  merupakan titik kesetimbangan yang tidak stabil. Titik kesetimbangan  $T_3$  merupakan titik kesetimbangan interior yang stabil dengan nilai eigen dan kestabilan titik tersebut dijelaskan dengan matriks Jacobian di bawah ini.

$$J(T_3) = \begin{pmatrix} -0.078 & 0.2 & -2.060 \\ 0.21 & -0.811 & 0 \\ 0.128 & 0 & -0.359 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik polinomial yang terkait dengan matriks Jacobian yaitu  $f(\lambda) = \lambda^3 + 1.249\lambda^2 + 0.606\lambda + 0.222$ , dengan koefisien  $a_1 = 1.248$ ,  $a_2 = 0.606$ ,  $a_3 = 0.222$ . Nilai  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ , sehingga kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi. Dengan terpenuhinya kriteria Routh-Hurwitz maka titik kesetimbangan  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  stabil asimtotik. Nilai eigen persamaan karakteristik tersebut adalah  $\lambda_{1,2} = -0.203 \pm 0.472$ ,  $\lambda_3 = -0.843$ .

Berdasarkan nilai parameter yang diberikan di atas dan dengan nilai populasi awal yang sesuai, kami memplot kurva solusi persamaan diferensial sistem (2.1) dalam rentang waktu tertentu menggunakan metode numerik dan aplikasi perangkat

lunak yang sesuai. Gambar 4, 5, dan 6 di bawah ini menunjukkan dinamika kurva solusi populasi *prey-predator* terhadap waktu ( $t$ ).

Gambar 4. Kurva solusi populasi *prey* ( $x$ )Gambar 5. Kurva solusi populasi *prey* ( $y$ )Gambar 6. Kurva solusi populasi *predator* ( $z$ )

Gambar 4, 5, dan 6 untuk kasus  $\sigma_1 > \sigma_2$  dengan populasi awal  $x(0) = 2, y(0) = 7, z(0) = 1$ . Ilustrasi tersebut menggambarkan bahwa kondisi populasi *prey-predator* di area bebas maupun di area terlindungi mengalami peningkatan yang signifikan, kemudian waktu tertentu mengalami penurunan mendekati populasi awal sebelum menuju kestabilan.

Tabel berikut menyajikan hasil analisis perubahan populasi *prey-predator* berdasarkan perlakuan terhadap nilai parameter migrasi *prey* serta beberapa nilai parameter lainnya yakni  $r = 0.8, K = 14, L = 9, f = 0.02, c = 2.5, h = 0.01, s = 0.9, q_3 = 0.3, g_1 = 0.8$ . Nilai parameter migrasi *prey* pada area terlindungi dan bebas seperti disajikan di tabel 1.

Tabel 1 Pengaruh Migrasi Titik Keseimbangan Interior  $T_3(x^*, y^*, z^*)$

Populasi	Tingkat Migrasi ( $\sigma_1$ )				
	0.18	0.19	0.20	0.21	0.22
$x$	2.23286	2.20893	2.18610	2.16425	2.14331
$y$	7.44019	7.46241	7.48419	7.50554	7.52649
$z$	1.22116	1.21310	1.20523	1.19751	1.18995

Tabel 1 mengilustrasikan bahwa populasi spesies *prey-predator* di titik keseimbangan interior, terlihat bahwa dengan tingkat migrasi tetap, yakni jika nilai  $\sigma_2 = 0.2$ , nilai  $\sigma_1$  divariasikan maka titik keseimbangan interior juga ikut berubah namun masih stabil. Jika nilai migrasi  $\sigma_1$  dinaikan maka terjadi perubahan populasi titik keseimbangan interior baik populasi *prey* maupun populasi *predator* di area bebas ikut berkurang, sedangkan perubahan populasi mangsa titik keseimbangan interior di area terlindungi akan semakin meningkat.

Tabel berikut menyajikan pengaruh kematian alami *prey* di area terlindungi dan area bebas terhadap perubahan populasi *prey* maupun *predator* di titik keseimbangan interior, berdasarkan perlakuan terhadap nilai parameter kematian alami *prey* di area terlindungi ( $h$ ) serta beberapa nilai parameter lainnya yakni  $r = 0.8, K = 14, L = 9, f = 0.02, c = 2.5, \sigma_1 = 0.21, s = 0.9, q_3 = 0.3, g_1 = 0.8, \sigma_2 = 0.20$ . Nilai parameter kematian alami *prey* pada area terlindungi dan bebas seperti disajikan di tabel 2.

Tabel 2 Pengaruh Kematian Alami Titik Keseimbangan Interior  $T_3(x^*, y^*, z^*)$

Populasi	Kematian alami <i>prey</i> di area terlindungi ( $h$ )				
	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$x$	2.16425	2.14031	2.11701	2.09429	2.07215
$y$	7.50554	7.40683	7.30831	7.20999	7.11187
$z$	1.19751	1.18885	1.18020	1.17156	1.16293

Tabel 2 menggambarkan bahwa populasi spesies *prey-predator* di titik kesetimbangan interior, terlihat bahwa dengan tingkat kematian alami tetap, yakni jika nilai  $f = 0.02$ , nilai  $h$  divariasikan maka titik kesetimbangan interior juga ikut berubah namun masih stabil. Jika nilai migrasi  $h$  dinaikkan maka terjadi perubahan populasi titik keseimbangan interior baik populasi *prey* maupun populasi *predator*. ikut berkurang.

## 2.5 Kesimpulan

Migrasi populasi *prey*  $\sigma_1 \leq \sigma_2$  mengakibatkan perubahan populasi titik kesetimbangan interior populasi *prey* maupun *predator* di area bebas mengalami peningkatan, sebaliknya populasi *prey* di area terlindungi mengalami penurunan, Migrasi populasi *prey*  $\sigma_1 > \sigma_2$  mengakibatkan perubahan populasi titik kesetimbangan interior populasi *prey* di area terlindungi mengalami peningkatan, sebaliknya populasi *prey* maupun *predator* di area unresvasi mengalami penurunan. Migrasi *prey* di area terlindungi dan area bebas sangat mempengaruhi perubahan populasi titik kesetimbangan interior  $T_3(x^*, y^*, z^*)$ .

Kematian alami populasi *prey* mengakibatkan perubahan populasi titik kesetimbangan interior  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  yakni populasi *prey dan predator* mengalami penurunan, namun populasi *prey dan predator* tetap stabil. Migrasi *prey* berefek positif terhadap kestabilan titik kesetimbangan interior  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  agar populasi *prey dan predator* tetap lestari. Populasi *predator* juga tetap lestari ketika  $\sigma_1 > \sigma_2$  karena *predator* akan mencari makanan lain ketika makanan utama *predator* berkurang.

## 2.6 Daftar Pustaka

- Barhoom, N. S. S., & Al-Nassir, S. (2021). Dynamical behaviors of a fractional-order three dimensional prey-predator model. *Hindawi Abstract and Applied Analysis, 2021*, 1–10. <https://doi.org/10.1155/2021>
- Chakraborty, K., Chakraborty, M., & Kar, T. K. (2011). Bifurcation and control of a bioeconomic model of a prey – predator system with a time delay. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 5*(4), 613–625. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2011.05.004>
- Dubey, B., Agarwal, S., & Kumar, A. (2018). Optimal harvesting policy of a prey–predator model with Crowley–Martin-type functional response and stage structure in the predator. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 23*(4), 493–514. <https://doi.org/10.15388/NA.2018.4.3>.
- Jana, S., Chakraborty, M., Chakraborty, K., & Kar, T. K. (2012). Global stability and bifurcation of time delayed prey – predator system incorporating prey refuge. *Mathematics and Computers in Simulation, 85*, 57–77. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2012.10.003>
- Primavera, J. H. (1997). Fish predation on mangrove-associated penaeids. The role

- of structures and substrate. *Journal of Experimental Marine Biology and Ecology*, 215(2), 205–216. [https://doi.org/10.1016/S0022-0981\(97\)00046-4](https://doi.org/10.1016/S0022-0981(97)00046-4)
- Roy, B., & Roy, S. K. (2021). Prey-predator model in drainage system with migration and harvesting. *Nonauton. Dyn. Sys*, 152–167. <https://doi.org/10.1515/msds-2021-0131>
- Subchan, N. A. M. and. (2020). Stability and bifurcation analysis of time delayed prey-predator system with Holling type-III response function. *INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTING SCIENCE AND APPLIED MATHEMATICS*, 6(2), 528–541. <https://doi.org/10.12962/j24775401.v6i2.5456>
- Toaha, S, Didiharyono., Kusuma, J., & Kasbawati. (2023). Harvesting Strategies in the Migratory Prey-Predator Model with a Crowley-Martin Type Response Function and Constant Efforts. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 23(1), 14–23.
- Toaha, S, Kusuma, J., Khaeruddin, & Bahri, M. (2014). Stability Analysis and Optimal Harvesting Policy of Prey-Predator Model with Stage Structure for Predator. *Applied Mathematical Sciences*, 8(159), 7923–7934. <https://doi.org/10.12988/ams.2014.410792>
- Toaha, S, & Rustam. (2017). Optimal harvesting policy of predator-prey model with free fishing and reserve zones. *AIP Conference Proceedings, January 2017*. <https://doi.org/10.1063/1.4978992>
- Vay, L. L. E. (2001). Ecology and Management of Mud Crab *Scylla* spp . *Proceedings of the International Forum on the Culture of Portunid Crabs*, 14, 101–111. <https://doi.org/10.33997/j.afs.2001.14.2.001>
- Wijaya, N. I., Yulianda, F., Boer, M., & Juwana, S. (2010). Biologi populasi kepiting bakau (*Scylla serrata* F.) di habitat mangrove taman nasional Kutai Kabupaten Kutai Timur. *Oseanologi Dan Limnologi Di Indonesia*, 36(3), 443–461.