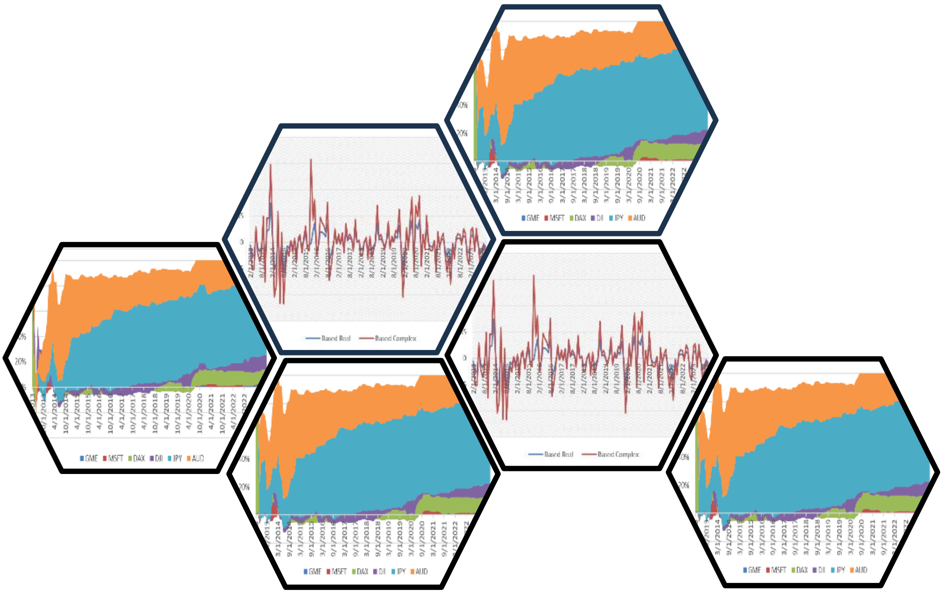
ESTIMASI CONDITIONAL VALUE AT RISK DENGAN PENDEKATAN TRANSFORMASI HILBERT



WELDI TRIANTO

H022221005

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

TESIS

ESTIMASI CONDITIONAL VALUE AT RISK DENGAN PENDEKATAN TRANSFORMASI HILBERT

Conditional Value at Risk Estimation with Hilbert Transform Approach

Disusun Oleh:

Weldi Trianto

H022221005

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

ESTIMASI CONDITIONAL VALUE AT RISK DENGAN PENDEKATAN TRANSFORMASI HILBERT

Tesis

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

WELDI TRIANTO

H022221005

kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

TESIS

ESTIMASI CONDITIONAL VALUE AT RISK DENGAN PENDEKATAN TRANSFORMASI HILBERT

WELDI TRIANTO

H022221005

telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Magister pada tanggal 15 Agustus 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Magister Matematika

Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Makassar

Mengesahkan:

Pembimbing Utama

Dr. Amran, S.Si., M.Si.
NIP. 197011011998021001

Pembimbing Pendamping

Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si.
NIP. 197012311998021001

Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 196402071991031013

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.
NIP. 197205151997021002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Estimasi Conditional Value at Risk dengan Pendekatan Transformasi Hilbert" adalah benar karya saya dengan arahan dari tim pembimbing (Dr. Amran, S.Si., M.Si. dan Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si.). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal (IAENG International Journal of Computer Science) sebagai artikel dengan judul "*Conditional Value at Risk Estimation with Hilbert Transform Approach*". Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 15 Agustus 2024

METERAI TEMPEL
10000
033ALX291888113

Weldi Trianto
NIM H022221005

Ucapan Terima Kasih

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul Estimasi Conditional Value at Risk dengan Pendekatan Transformasi Hilbert. Tujuan utama penulisan karya ini untuk memenuhi persyaratan akademik dalam rangka memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis sangat sadar bahwa penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis menyampaikan terima kasih yang setulusnya kepada kedua orang tua **Tadius** dan **Kasuaran** atas doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang tiada henti mengalir dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Dr. Amran, S.Si., M.Si** selaku pembimbing utama untuk segala ilmu, nasehat, beserta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya mendampingi penulis sehingga karya ini dapat terselesaikan.
2. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si** selaku pembimbing pendamping untuk segala ilmu, nasehat, beserta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya mendampingi penulis sehingga karya ini dapat terselesaikan.
3. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, S.Si., M.Si** selaku Ketua Program Studi Magister Matematika dan sebagai tim penguji yang senantiasa meluangkan waktu semangat dan pikiran dalam memberikan saran sekaligus arahan dalam penyusunan tesis ini
4. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS** selaku tim penguji yang telah bersedia untuk meluangkan waktu dan pikiran dalam memberikan saran sekaligus arahan dalam penyusunan tesis ini.
5. Bapak **Dr. Hendra, S.Si., M.Kom** selaku tim penguji yang telah bersedia untuk meluangkan waktu dan pikiran dalam memberikan saran sekaligus arahan dalam penyusunan tesis ini.
6. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
7. Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin, seluruh dosen, dan staf administrasi pada Program Studi S2 Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
8. Kakak, adik, dan semua kelurga yang memberikan dukungan baik secara langsung maupun tidak langsung.

9. Teman-teman dekat penulis dalam proses pengerjaan tesis ini kepada saudara **Aswal Aryadi Pangga., S.Mat., M.Si.**, saudari **Izza Anis Majidah, S.Mat., M.Si.,** dan **Aprilia Pratiwi S., S.Mat.,** yang telah menemani penulis dari awal perkuliahan di Magister S2 Matematika Universitas Hasanuddin, meluangkan waktu untuk mendengarkan keresahan dan memberi nasehat serta dukungan sehingga penulis bisa berada di penyelesaian tugas akhir ini.
10. Teman-teman seperjuangan **S2 Matematika 2022-1 (Lemma 22) Imanuel, Mu'adz, Kak Ulil, Kak Syam, Balqis, Uly, Kak Pia, Kak Nia, Abdillah, Kak Maryam, Kak Devvy, Fitri, Fika, Ilmi, Ilma, Kak Grace, Fatimah,** dan teman-teman Penghuni Ruangan S2 yang telah membantu penulis.

Serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu persatu. Semoga segala bantuan beserta kebaikan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah-mudahan tulisan ini memberi manfaat kepada para pembaca dan seluruh pihak yang membutuhkan terutama untuk penulis sendiri.

Makassar, 15 Agustus 2024

Penulis

Weldi Trianto

ABSTRAK

WELDI TRIANTO. **Estimasi conditional value at risk dengan pendekatan transformasi Hilbert** (dibimbing oleh Amran Rahim dan Mawardi Bahri).

Latar Belakang. *Return* dan risiko adalah dua aspek yang paling dipertimbangkan oleh investor dalam optimasi portofolio. Indikator yang sering digunakan untuk menentukan faktor risiko adalah *Conditional Value at Risk* (CVaR). Namun, metode CVaR tidak akurat ketika terdapat fluktuasi harga aset tinggi. Masalah yang dibahas dalam penelitian ini ialah bagaimana pengembangan CVaR dalam mengatasi fluktuasi harga aset yang tinggi. **Tujuan.** Penelitian ini bertujuan mengembangkan metode CVaR menggunakan transformasi Hilbert dalam mengatasi fluktuasi harga aset yang tinggi. **Metode**. Penelitian ini mengusulkan metode CVaR berbasis nilai *return* berbentuk bilangan kompleks (CVaR-K) yang diperoleh dari hasil transformasi Hilbert terhadap *return* bilangan riil. Matriks varians-kovarians berbasis bilangan *return* kompleks digunakan untuk menentukan bobot optimum portofolio. Nilai CVaR-K dihitung berdasarkan standar deviasi portofolio dan hasilnya dibandingkan dengan hasil *Value at* Risk (VaR) dan CVaR menggunakan metode Backtesting, nilai Bias dan metode *Mean Absolute Deviation* (MAD). **Hasil**. Penerapan metode CVaR-K pada portofolio yang terdiri atas aset GME, MSFT, DJI, DAX, JPY, dan AUD periode Januari 2013 sampai dengan Oktober 2023, menghasilkan nilai Backtesting sebesar -1.7977 yang menunjukkan bahwa metode CVaR-K terletak pada rentang nilai -1.96 sampai 1.96 sehingga layak digunakan. Metode CVaR-K menghasilkan nilai bias terrendah sebesar 12.18% dibandingkan dengan nilai Bias VaR (41.36%), CVaR (29.97%), dan VaR-K (26.47%) dan nilai MAD sebesar 0.0039 jika dibandingkan dengan VaR (0.0128), VaR-K (0.0136), dan CVaR (0.0125). **Kesimpulan.** Pendekatan CVaR dengan transformasi Hilbert memiliki keunggulan dibandingkan dengan metode VaR, VaR-K, dan CVaR ditinjau dari nilai Backtesting, Bias, dan MAD. Keunggulan CVaR-K karena kemampuannya dalam mereduksi nilai *return* dengan fluktuasi tinggi.

Kata Kunci: optimasi portofolio; conditional value at risk; transformasi Hilbert; bilangan kompleks; matriks varians kovarians

ABSTRACT

WELDI TRIANTO. **Conditional value at risk estimation with Hilbert transform approach** (supervised by Amran and Mawardi).

Background. *Return* and risk are the two aspects most considered by investors in portfolio optimization. An indicator often used to determine the risk factor is Conditional Value at Risk (CVaR). However, the CVaR method is not accurate when there are high asset price fluctuations. The problem discussed in this research is how to develop CVaR in overcoming high asset price fluctuations. **Aim**. This research aims to develop a CVaR method using the Hilbert transform in overcoming high asset price fluctuations. **Method**. This study proposes a CVaR method based on complex number *return* values (CVaR-K) obtained from the Hilbert transformation of real number *return*s. The variance-covariance matrix based on complex number *return*s is used to determine the optimum weight of the portfolio. The CVaR-K value is calculated based on the standard deviation of the portfolio and the results are compared with the Value at Risk (VaR) and CVaR results using the Backtesting method, Bias value and Mean Absolute Deviation (MAD) method. **Results**. The application of the CVaR-K method to a portfolio consisting of GME, MSFT, DJI, DAX, JPY, and AUD assets for the period January 2013 to October 2023, resulted in a Backtesting value of -1.7977 which indicates that the CVaR-K method is located in the value range of -1.96 to 1.96 so it is feasible to use. The CVaR-K method produces the lowest Bias value of 12.18% compared to the bias value of VaR (41.36%), CVaR (29.97%), and VaR-K (26.47%) and the MAD value of 0.0039 when compared to VaR (0.0128), VaR-K (0.0136), and CVaR (0.0125). **Conclusion**. The CVaR approach with Hilbert transformation has advantages over the VaR, VaR-K, and CVaR methods in terms of Backtesting, Bias, and MAD values. The superiority of CVaR-K is due to its ability to reduce the *return* value with high fluctuations.

Keyword: portfolio optimization; conditional value at risk; Hilbert transform; complex value, variance covariance matrix

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Nomor Urut Halaman

DAFTAR GAMBAR

Nomor urut Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor urut Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Investasi secara sederhana dapat diartikan sebagai suatu kegiatan menempatkan dana pada satu atau lebih aset selama periode tertentu dengan harapan dapat memperoleh penghasilan atau peningkatan nilai investasi. Bentuk investasi yang banyak diminati oleh investor adalah investasi saham karena tingkat keuntungan yang lebih tinggi dibandingkan dengan instrumen investasi lain di pasar modal. Saham merupakan surat beharga bagian dari kepemilikan perusahaan. Investor dalam berinvesitasi selain dengan memperhitungkan nilai *return* juga perlu mempertimbangkan tingkat risikonya sebagai dasar dari pembentukan keputusan berinvestasi (Aliakur dan Triaryati, 2017). Dengan mengetahui risiko yang mungkin dialami, maka investor dapat mengetahui gambaran peluang untuk memperoleh keuntungan karena semakin besar risiko yang mungkin dialami, maka semakin besar pula keuntungan yang mungkin diperoleh. Oleh karena itu diperlukan metode untuk mengestimasi risiko kerugian dalam berinvestasi. Salah satu cara untuk meminimumkan risiko serta mengoptimalkan tingkat *return* yang diharapkan adalah dengan membentuk portofolio saham. Portofolio saham berkaitan dengan bagaimana mengalokasikan beberapa saham ke dalam investasi sehingga menghasilkan keuntungan optimal.

Salah satu alat ukur yang berkembang pesat dan sangat populer dipergunakan dalam mengukur risiko yaitu *Value at Risk* (VaR) yang dipopulerkan oleh J. P. Morgan pada tahun 1994. Menurut Jorion (2000), VaR adalah estimasi kerugian maksimum yang mungkin terjadi selama periode waktu (*time period*) tertentu pada suatu tingkat kepercayaan (*level of confidence*). VaR merupakan estimasi dari kerugian maksimum yang mungkin terjadi selama periode waktu tertentu pada suatu tingkat kepercayaan. Pada kenyataannya, nilai risiko saham pada suatu waktu tertentu tidak semata-mata dipengaruhi oleh kondisi saham di masa lalu, tetapi juga diduga dipengaruhi oleh distribusi besarnya kerugian. Ketika distribusi kerugian tidak berdistribusi normal, maka VaR tidak memenuhi sifat *subadditivity* yang merupakan salah satu syarat agar suatu ukuran risiko dapat disebut koheren. Oleh karena itu, diperlukan suatu metode yang dapat mengukur tingkat risiko yang harus dipenuhi oleh syarat yang memiliki sifat koheren, salah satunya adalah metode *Conditional Value at Risk* (CVaR).

Suatu kegiatan investasi membutuhkan informasi tentang potensi keuntungan dan potensi kerugian yang mungkin terjadi secara akurat. Potensi keuntungan dapat dilihat dari besarnya *return* yang dapat diperoleh dari hasil kegiatan investasi di periode waktu tertentu. Potensi risiko kerugian dapat dihitung dengan beberapa metode. Penelitian ini akan menyelesaikan masalah perhitungan potensi risiko kerugian maksimum melalui pengembangan metode CVaR. CVaR merupakan ukuran risiko yang sifatnya diturunkan untuk distribusi kerugian. CVaR mengukur nilai yang diharapkan tergantung pada berapa persentase kerugian terburuknya (Miller dkk, 2017). Secara umum ukuran risiko CVaR terkait erat dengan VaR. Untuk distribusi kontinu, CVaR didefinisikan sebagai kerugian yang melebihi VaR. Masalah perhitungan potensi resiko kerugian maksimum menggunakan metode CVaR telah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya.

Artzner dkk (1999) memperkenalkan CVaR konvensional menggunakan matriks varians kovarians berbasis nilai *return* riil untuk mengantisipasi nilai kerugian yang melebihi VaR. Hasil penelitian Artzner menunjukkan bahwa hasil perhitungan metode CVaR lebih akurat serta dapat memberikan informasi seberapa besar kemungkinan terburuk yang mungkin terjadi yang tidak dapat diatasi oleh VaR. Menurut Artzner, selalu ada kemungkinan bahwa kerugian yang terjadi lebih besar dari VaR yang sudah ditetapkan.

Hosseini dan Verma (2018) menggunakan metodologi CVaR dalam mengoptimalkan konfigurasi kereta api dan rute pengiriman bahan berbahaya (*hazardous materials*) kereta api. Hasilnya CVaR memberikan rute pengiriman hazmat yang menghindari risiko dan menghasilkan rute optimal yang berbeda berdasarkan tingkat kepercayaan para pengambil keputusan.

Uchiyama dkk (2019), memperkenalkan penentuan bobot portofolio berbasis nilai *return* kompleks. Uchiyama dkk memperkenalkan metode *Complex Valued Risk Diversification* (CVRD) dalam optimalisasi portofolio. Hasilnya menyatakan bahwa profit tahunan *(annual return)* yang diperoleh dengan menggunakan metode CVRD lebih tinggi jika dibandingkan metode diversifikasi risiko yang lainnya seperti *Risk Parity* (RP) dan *Maximum Risk Diversification* (MRD).

Hamdi dkk (2022), menggunakan CVaR yang dilengkapi dengan algoritma evolusioner *Data Envelopment Analysis* (DEA), *Particle Swarm Optimization* (PSO) dan *Imperial Competitive Algorithm* (ICA) dalam masalah pemilihan portofolio. Hamdi meneliti nilai pasar berdasarkan indeks harga kelompok ototmotif, kemudian mengoptimalkan portofolio perusahaan tersebut. Hasilnya yang diperoleh menunjukkan bahwa potensi risiko mengalami penurunan ketika melakukan pengukuran CVaR dengan algoritma evolusioner dimana algoritma ini menampilkan portofolio yang lebih efisien, sehingga algoritma ini lebih berhasil dalam mengoptimalkan portofolio.

Gabrielli dkk (2022) menerapkan metode CVaR untuk mengurangi risiko kinerja keuangan yang rendah sambil mempertahankan keuntungan keuangan yang diharapkan dalam optimasi portofolio kontrak pembelian proyek *power purchase agreements* (PPA). Hasilnya menunjukkan bahwa keuntungan finansial yang diharapkan lebih tinggi diperoleh dengan berinvestasi pada satu proyek PPA yang paling nyaman, sedangkan penggabungan proyek mengurangi risiko finansial secara keseluruhan dan memungkinkan untuk memenuhi profil permintaan energi dari off-taker dengan kinerja finansial yang lebih tinggi.

Bodnar dkk (2022) menginvestigasi masalah portofolio optimal dengan menggunakan perspektif Bayesian dan kriteria VaR dan CVaR. Dalam penelitian ini, nilai-nilai yang diperlukan dalam perhitungan VaR dan CVaR diekstraksi dengan bantuan *posterior forecast distribution* untuk *return* portofolio di masa depan, dan bobot portofolio optimal diperoleh sesuai dengan data yang diamati. Hasil penelitian mereka menunjukkan bahwa pendekatan Bayesian bekerja lebih baik daripada metode lain dalam peramalan VaR, dan portofolio optimal yang diperoleh dengan menggunakan pendekatan Bayesian adalah efisien.

Semua hasil yang diperoleh peneliti sebelumya didasarkan atas perhitungan nilai *return* yang berbentuk bilangan riil dalam suatu periode waktu tertentu. Pola *return* yang terbentuk dapat dikategorikan dalam pola *return* yang stabil dan pola *return* yang tidak stabil. Jika pola *return* stabil maka semua pendekatan yang dilakukan oleh metode sebelumnya dapat bekerja dengan baik. Namun, jika pola *return* memiliki fluktuasi yang tinggi atau memiliki pola yang kompleks maka akurasi perhitungan CVaR konvensional berbasis nilai *return* riil menjadi tidak akurat karena memiliki nilai variansi dan kovariansi yang tinggi (Uchiyama dkk, 2019). Meskipun Uchiyama dkk berhasil menerapkan penggunaan metode Transformasi Hilbert dalam optimalisasi portofolio dengan sukses, namun belum ditemukan penelitian tentang nilai potensi kerugian maksimum (CVaR) berbasis nilai *return* bilangan kompleks, untuk pola *return* yang memiliki fluktuasi tinggi. Oleh karena itu, penelitian ini mengusulkan metode perhitungan potensi kerugian maksimum menggunakan metode CVaR berbasis nilai *return* kompleks (CVaR-K). Penggunaan nilai *return* kompleks diharapkan dapat mendeskripsikan pola *return* yang fluktuatif dengan lebih baik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada pendahuluan, dirumuskan masalah utama dalam penelitian ini ialah bagaimana performa CVaR-K dibandingkan dengan CVaR berbasis bilangan *return* riil. Untuk menyelesaikan masalah utama tersebut dirumuskan sub masalah penelitian sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi matriks varians kovarians yang diperoleh dari perhitungan nilai *return* kompleks.
2. Bagaimana bobot masing masing aset yang diperoleh dari perhitungan nilai *return* kompleks.
3. Bagaimana nilai kerugian maksimum yang diperoleh dari perhitungan nilai *return* kompleks.
4. Bagaimana estimasi nilai CVaR-K yang diperoleh.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membentuk konstruksi matriks varians kovarians yang diperoleh dari perhitungan nilai *return* kompleks.
2. Menghitung bobot masing masing aset yang diperoleh dari perhitungan nilai *return* kompleks.
3. Menghitung nilai kerugian maksimum yang diperoleh dari perhitungan nilai *return* kompleks.
4. Menghitung estimasi nilai CVaR-K.
5. Menambah wawasan dan pengetahuan dalam bidang matematika keuangan khususnya dalam mengestimasi CVaR berbasis bilangan kompleks dengan pendekatan transformasi Hilbert.
6. Memberikan tambahan informasi kepada para investor sebagai bahan pertimbangan dalam melakukan investasi.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah jumlah investasi yang termasuk di dalam portofolio diperoleh dari enam aset, yang terdiri dari tiga tipe aset yaitu dua tipe saham, dua tipe indeks, dan dua tipe mata uang.

1.5 Teori

1.5.1 Investasi

Investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada saat ini, untuk memperoleh keuntungan. Menginvestasikan sejumlah dana pada aset riil (tanah, emas, mesin dan bangunan) maupun aset finansial (deposito, saham dan obligasi) merupakan aktivitas investasi yang umumnya dilakukan. Bagi investor yang mampu menanggung risiko, aktivitas investasi yang mereka lakukan juga bisa mencakup investasi pada aset-aset finansial lainnya yang lebih kompleks seperti waran, opsi, dan futures maupun ekuitas internasional (Tandelilin, 2010).

1.5.2 Portofolio

Portofolio didefinisikan sebagai kumpulan dari beberapa sekuritas dalam suatu unit yang dipegang atau dibuat oleh seorang investor, perusahaan investasi, atau institusi keuangan (Hartono, 2014). Pembentukan portofolio bertujuan untuk melakukan diversifikasi pada investasi sehingga mampu memaksimalkan keuntungan dengan risiko yang minimal. Dalam melakukan perhitungan portofolio para investor berharap agar mendapatkan *return* portofolio yang sesuai dengan tingkat keakuratan yang cukup tinggi.

1.5.3 Statistik Deskriptif

Standar deviasi adalah ukuran statistik yang menggambarkan seberapa tersebar data dalam suatu set data relatif terhadap rata-ratanya. Ini mengukur tingkat variasi atau dispersi dari nilai-nilai data. Standar deviasi memiliki rumus sebagai berikut:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum(X_t - \bar{X})^2}}{T - 1} \tag{1.1}$$

dimana

T = jumlah pengamatan

X_t = nilai data ke-t

$\bar{X}$ = rata-rata (mean) dari data

Skewness mengukur simetri distribusi data. Distribusi data yang simetris memiliki *skewness* mendekati nol. Ada tiga jenis *skewness*:

1. Positif (right-skewed): Ekor di sebelah kanan lebih panjang atau lebih besar daripada ekor di sebelah kiri.
2. Negatif (left-skewed): Ekor di sebelah kiri lebih panjang atau lebih besar daripada ekor di sebelah kanan.
3. Nol (symmetrical): Distribusi simetris di sekitar mean.

Rumus *skewness*:

$$g_1 = \frac{T}{(T-1)(T-2)} \sum \left(\frac{X_t - \bar{X}}{\sigma} \right)^3 \tag{1.2}$$

Kurtosis mengukur "ketinggian" distribusi atau seberapa banyak data berada di ekor dibandingkan dengan distribusi normal. Ada tiga jenis kurtosis:

1. Leptokurtic: Kurtosis positif (lebih besar dari 3), distribusi memiliki puncak yang lebih tinggi dan ekor yang lebih panjang. Menunjukkan banyak data berada di ekor.
2. Platykurtic: Kurtosis negatif (kurang dari 3), distribusi memiliki puncak yang lebih datar dan ekor yang lebih pendek. Menunjukkan sedikit data berada di ekor.
3. Mesokurtic: Kurtosis mendekati 3, distribusi normal standar, di mana puncak dan ekornya sesuai dengan distribusi normal.

Rumus kurtosis:

$$g_2 = \frac{T\left(T+1\right)}{(T-1)(T-2)(T-3)}\sum\left(\frac{X_t-\bar{X}}{\sigma}\right)^4 - \frac{3(T-1)^2}{(T-2)(T-3)} \quad (1.3)$$

1.5.4 *Return*

Return merupakan tingkat keuntungan yang dinikmati seorang investor dan dapat juga diartikan sebagai hasil yang diperoleh dari investasi. *Return* dibedakan menjadi dua, yaitu *return* realisasi (*return* yang sesungguhnya) dan *return* ekspektasi (*return* yang diharapkan oleh investor). Setiap investasi baik jangka panjang maupun jangka pendek mempunyai tujuan utama untuk mendapatkan keuntungan yang disebut *return*, baik langsung maupun tidak langsung. *Return* saham adalah tingkat keuntungan yang dinikmati oleh pemodal atas suatu investasi yang dilakukannya (Ang, 1997). *Return* saham terdiri dari *capital gain* (*loss*) dan *yield*. Capital gain (loss) merupakan selisih antara nilai pembelian saham dengan nilai penjualan saham. Pendapatan yang berasal dari capital gain disebabkan harga jual saham lebih besar dari harga belinya. Sebaliknya jika harga jual saham lebih kecil dari harga beli saham disebut capital loss. Sedangkan *yield* (*dividen*) merupakan pembagian laba kepada para pemegang saham perusahaan yang sebanding dengan jumlah saham yang dipegang oleh masing-masing pemilik.

Nilai *return* saham dapat dihitung menggunakan Persamaan (1.4) berikut: (Franke, et al., 2015)

$$r_{t,m} = \frac{P_{t,m} - P_{t-1,m}}{P_{t-1,m}} \quad (1.4)$$

dengan:

$r_{t,m}$: nilai *return* pada waktu ke-t, aset ke-m

$P_{t,m}$: harga saham pada waktu ke-t, aset ke-m

$P_{t-1,m}$: adalah harga saham pada waktu ke-$(t-1)$, aset ke-m

Hardle dan Simar (2007) menetapkan syarat batas untuk mengoptimumkan fungsi $\boldsymbol{w}^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$ yakni,

1. $\boldsymbol{w}\mathbf{1}^* = 1$
2. $\boldsymbol{w}^*\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} = \sigma_p^2$

Sehingga fungsi tujuan (L) menggunakan metode pengganda Lagrange dinyatakan sebagai berikut:

$$L = \boldsymbol{w}^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w} + \lambda_1(\mathbf{1} - \boldsymbol{w}^*\mathbf{1}) + \lambda_2\left(\sigma_p^2 - \boldsymbol{w}^*\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{p}}^{\mathbf{2}}\right). \quad (1.5)$$

Selanjutnya dari Persamaan (1.5) dicari nilai bobot $\boldsymbol{w}$ yang memenuhi syarat:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = 0$$

Untuk memperoleh nilai L optimum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} &= 0 \\
2\boldsymbol{w}\boldsymbol{\Sigma} - \lambda_1\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} - \lambda_2\mathbf{1} &= 0 \\
2\boldsymbol{w}\boldsymbol{\Sigma} &= \lambda_1\boldsymbol{\sigma}^2 + \lambda_2\mathbf{1} \\
\boldsymbol{w} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}\left(\lambda_1\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} + \lambda_2\mathbf{1}\right) \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Selanjutnya Persamaan (1.6) disubtitusikan ke $1 = \mathbf{1}^*\boldsymbol{w}$. Tujuan dari subtitusi nilai agar dana investasi awal dapat digunakan secara keseluruhan. sehingga

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbf{1}^*\boldsymbol{w} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{1}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\sigma}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{1}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}\lambda_2\mathbf{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda_1\mathbf{1}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^2 + \lambda_2\mathbf{1}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\right) \\
2 &= \lambda_1\mathbf{1}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^2 + \lambda_2\mathbf{1}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$2 - \lambda_1 \mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^2 \quad = \quad \lambda_2 \mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}$$

diperoleh

$$\lambda_2 = \frac{2 - \lambda_1 \mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^2}{\mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \tag{1.7}$$

Subtitusikan Persamaan (1.7) ke Persamaan (1.6) diperoleh

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\lambda_1 \boldsymbol{\sigma^2} + \lambda_2 \mathbf{1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \lambda_1 \boldsymbol{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \lambda_2 \mathbf{1} \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \lambda_1 \boldsymbol{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} 1 \left(\frac{2 - \lambda_1 1^* \Sigma^{-1} \sigma^2}{1^* \Sigma^{-1} 1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \lambda_1 \boldsymbol{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} 1 \frac{2}{\mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \frac{\lambda_1 \mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^2}{\mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \lambda_1 \boldsymbol{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \frac{\lambda_1 \mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^2}{\mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2} \lambda_1 \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\sigma^2} - \frac{\mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma^{-1}} \boldsymbol{\sigma^2}}{\mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma^{-1}} \mathbf{1}} \boldsymbol{\Sigma^{-1}} \mathbf{1} \right) + \frac{\boldsymbol{\Sigma^{-1}} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^* \boldsymbol{\Sigma^{-1}} \mathbf{1}}$$

Pada saat $\lambda_1 = 0$ menghasilkan variansi minimum dengan bobot

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^{*}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \tag{1.8}$$

dimana,

$\boldsymbol{w}$: Vektor bobot

λ_i : Pengganda Lagrange

$\boldsymbol{\Sigma}$: Matriks Varians Kovarians

$\boldsymbol{\sigma}^2$: Vektor Varians

1 : Vektor Satu

Selanjutnya, *return* portofolio diperoleh sebagai berikut:

$$R_t = \sum_{m=1}^{M} \omega_m r_{t,m} \tag{1.9}$$

dimana ω_m merupakan himpunan koefisien bobot portofolio dan $1 \leq m \leq M$.

1.5.5 **Risiko**

Risiko adalah tingkat ketidakpastian akan terjadinya sesuatu atau tidak terwujudnya sesuatu tujuan, pada suatu kurun atau periode waktu tertentu. Salah satu hal yang sangat penting dalam berinvestasi adalah mengukur dan mengelola risiko pada saham-saham yang dipilih. Risiko merupakan sebuah peluang terjadinya kerugian. Penting untuk meminimalisir risiko dikarenakan produk investasi seperti saham memiliki risiko penurunan harga yang pada akhirnya akan menurunkan nilai investasi yang kita miliki. Apabila risiko dikelola dengan baik maka akan memberikan peluang untuk memperoleh keuntungan yang lebih besar, sedangkan risiko yang tidak dikelola dengan baik akan menimbulkan kerugian apabila tidak diantisipasi sebagaimana mestinya.

1.5.6 ***Conditional Value at Risk***

Value at Risk (VaR) merupakan salah satu bentuk pengukuran risiko yang cukup populer. Menurut Maruddani (2019), VaR dapat didefinisikan sebagai estimasi kerugian yang akan diperoleh selama periode waktu (*time period*) tertentu dalam kondisi pasar normal pada tingkat kepercayaan (*confidence interval*) tertentu. Pada portofolio, VaR diartikan sebagai estimasi kerugian maksimum yang akan dialami suatu portofolio pada periode waktu tertentu dengan tingkat kepercayaan tertentu. Definisi VaR secara umum dapat dituliskan pada Persamaan (1.10) sebagai berikut.

$$P(R_t \geq VaR) = 1 - \alpha \tag{1.10}$$

dengan R_t adalah *return* portofolio selama periode tertentu dan α adalah tingkat kepercayaan (Jorion, 2000).

Menurut Farid dkk (2010), menghitung VaR dengan menggunakan metode varians kovarians perlu mempertimbangkan portofolio p dengan aset m. Langkah pertama adalah menghitung matriks varians-kovarians. Varians pengembalian untuk aset X dapat dinyatakan sebagai:

$$\sigma_X^2 = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X})^2$$

Untuk mengukur perbedaan aset satu sama lain, hitung kovarians. Kovariansi antara pengembalian dua aset X dan Y dapat dinyatakan sebagai:

$$Cov_{XY} = \sigma_{XY}^2 = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X}).(Y_t - \bar{Y})$$

dimana:

X_t : *return* dari aset X pada periode t

Y_t : *return* dari aset Y pada periode t

Hitung standar deviasi dari portofolio p menggunakan rumus:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} w_m \sigma_m} \tag{1.11}$$

dimana:

w_m : bobot aset ke-m

σ_m : standar deviasi aset ke-m

Sehingga estimasi VaR dari portofolio adalah:

$$VaR = Z_\alpha . \sigma_p \tag{1.12}$$

dimana:

Z_α : parameter yang menghubungkan kuantil dari distribusi normal dan standar deviasi ($\alpha = 2{,}33$ untuk $p = 99\%$, $\alpha = 1{,}65$ untuk $p = 95\%$, dan $\alpha = 1.28$ untuk $p = 90\%$).

Karena VaR hanya menghitung persentil dari distribusi kerugian atau keuntungan tanpa memperhatikan setiap kerugian yang melebihi tingkat VaR dan VaR juga tidak koheren karena tidak memiliki sifat *subadditivity*. Sehingga untuk mengatasi kelemahan itu maka diperlukan *Conditional Value at Risk (CVaR*) (Hidayati, 2015).

Conditional Value at Risk (CVaR) telah menjadi perhatian signifikan selama dua dekade terakhir sebagai alat untuk mengelola risiko. Untuk distribusi kontinu, ukuran risiko ini juga dikenal dengan *Mean Excess Loss*, *Mean Shortfall*, atau *Tail Value at Risk*. Namun, untuk distribusi umum, termasuk distribusi diskrit, CVaR didefinisikan sebagai rata-rata ukuran VaR dan ukuran kerugian yang melebihi VaR (Hafsa, 2015). CVaR dikatakan baik dan efektif dibanding VaR karena memenuhi aksioma ukuran risiko koheren diantaranya *Translation invariance*, *Subadditivity*, *Positive homogenity*, dan *Monotonicity*. Misalkan U dan V merupakan *return* portofolio, $\rho(U)$ dan $\rho(V)$ masing-masing adalah ukuran risikonya dan c adalah konstanta.

Translation invariance

$$\rho(U + c) = \rho(V) - c$$

Subadditivity

$$\rho(U + V) \leq \rho(U) + \rho(V)$$

Positive homogenity

$$\rho(cU) = c\rho(U)$$

Monotonicity

$$\rho(U) \leq \rho(V), \text{ jika } U \geq V$$

Translation invariance menyatakan bahwa menambahkan dana ke dalam portofolio akan mengurangi risiko dengan jumlah yang sama. *Subadditivity* menyatakan bahwa risiko total portofolio tidak lebih besar dari jumlah risiko komponen-komponennya. *Positive homogenity* berarti bahwa risiko diskalakan dengan ukuran portofolio. *Monotonicity* menyatakan bahwa jika hasil dari portofolio U melebihi hasil dari portofolio V, maka risiko portofolio U tidak boleh lebih rendah dari risiko portofolio V.

Secara matematika, CVaR didefinisikan oleh Persamaan (1.13) berikut (Zhang, 2019):

$$CVaR_{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{VaR_{\alpha}} R_t f(R_t) dR_t \tag{1.13}$$

Dengan $f(R_t)$ adalah fungsi densitas probabilitas dari *return* portofolio R_t dan VaR dihitung berdasarkan waktu yang sama dengan selang kepercayan $(\alpha) \in [0,1]$.

1.5.7 **Fungsi Pengganda Lagrange**

Metode Lagrange yang dikemukakan oleh Joseph Louis Lagrange (1736-1813) adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengidentifikasi titik stasioner dari masalah optimasi dengan kendala persamaan. Fungsi pengganda Lagrange didefinisikan pada Persamaan (1.14):

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) \tag{1.14}$$

dengan,

$\mathcal{L}(x,\lambda)$: Fungsi pengganda Lagrange

$f(x)$: Fungsi tujuan

$g_j(x)$: Fungsi kendala

λ_j : Pengali Lagrange

1.5.8 **Backtesting**

Validasi atau backtesting adalah pengujian berurutan dari model yang digunakan terhadap kondisi nyata untuk menilai akurasi prediksi yang telah dibuat. Model VaR (*Value at Risk*) bermanfaat hanya jika dapat memprediksi risiko secara efektif. Langkah-langkah yang diambil dalam backtesting melibatkan perbandingan antara kerugian aktual dengan kerugian yang diprediksi oleh model VaR (Jorion, 2007). Nilai backtesting yang baik untuk VaR adalah berada diantara nilai -1,96 ampai 1,96. Untuk menghitung backtesting dapat dilakukan menggunakan rumus berikut.

$$B = \frac{u - pT}{\sqrt{p(1-p)T}} \tag{1.15}$$

dimana

B : Nilai Backtesting

u: Jumlah data yang lebih rendah dari nilai VaR

p: Nilai interval kepercayaan $(1 - \alpha)$

T: Jumlah data

1.5.9 **Mean Absolute Deviation**

Konno dan Yamazaki (1991) memperkenalkan salah satu metode untuk mengukur kinerja model VaR dengan memperhatikan perbedaan antara estimasi VaR dan kerugian aktual yaitu *Mean Absolute Deviation* (MAD). MAD didefinisikan sebagai berikut

$$MAD = E\left[\sum_{t=1}^{T} |Kerugian\ Maksimum\ Aktual - Nilai\ VaR|\right] \tag{1.16}$$

Semakin kecil nilai MAD, semakin baik model VaR dalam mengestimasi risiko karena perbedaan antara VaR dan kerugian aktual lebih kecil. Selain MAD, sering juga digunakan metrik lain seperti Bias untuk mengevaluasi kinerja model VaR dalam meramalkan risiko secara akurat. Untuk menghitung Bias digunakan rumus sebagai berikut.

$$Bias = \left|\frac{Nilai\ VaR - Kerugian\ Maksimum\ Aktual}{Kerugian\ Maksimum\ Aktual}\right| \tag{1.17}$$

1.5.10 **Bilangan Kompleks**

Bilangan kompleks merupakan himpunan bilangan yang terdiri dua himpunan bilangan, yakni bilangan riil dan imajiner. Pada tahun 1777, L. Euler memperkenalkan notasi $i = \sqrt{-1}$ sebagai satuan imaginer. Mengenai definisi bilangan kompleks, kita misalkan C adalah bilangan kompleks, sehingga didefinisikan seperti pada Persamaan (1.18):

$$C = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1.18}$$

dengan a adalah bagian riil dinotasikan dengan $R(C)$ dan b merupakan bagian imajiner dinotasikan dengan $I(C)$. Jika $R(C) = 0$ dan $I(C) \neq 0$, maka C dinamakan imajiner murni (*pure imaginary*). Jika $R(C) = 0$ dan $I(C) = 1$, maka $C = i$ dan dinamakan satuan imajiner (*imaginary unit*). Bila $I(C) = 0$, maka C menjadi bilangan riil $R(C)$, sehingga dalam pengertian ini bilangan riil x dapat dipandang sebagai bilangan kompleks dengan bentuk $C = x + 0i$ (Freitag, 2009). Bilangan kompleks memiliki cabang-cabang sebagai berikut:

1. Modulus dan Argumen
   Modulus adalah panjang vektor dari titik asal ke titik (a,b) di bidang kompleks, dinyatakan sebagai $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Argumen adalah sudut yang dibentuk oleh vektor dengan sumbu real positif, dinyatakan dalam radian atau derajat
2. Konjugat Kompleks
   Konjugat dari bilangan kompleks $a + bi$ adalah $a - bi$
3. Representasi Polar
   Bilangan kompleks dapat direpresentasikan dalam bentuk polar sebagai $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, dimana r adalah modulus dan θ adalah argumen.
4. Eksponensial Kompleks
   Bilangan kompleks juga bisa diekspresikan dalam bentuk eksponensial menggunakan formula Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

1.5.11 **Transformasi Hilbert**

Transformasi Hilbert dari deret waktu $x(t)$ pada $t \in [0, \infty)$ didefinisikan pada Persamaan (1.19) (Uchiyama dkk, 2019):

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \tag{1.19}$$

dimana integral tak tentu dipahami dalam arti nilai utama Cauchy. Dalam praktiknya, deret waktu empiris direkam pada tingkat sampling tertentu Δr, yang memperkenalkan waktu diskrit $r_t = t\Delta r$ dengan t bilangan bulat. Transformasi Hilbert untuk deret waktu diskrit didefinisikan sebagai berikut (Kak, 1970):

$$\mathcal{H}_D\{r_m\} = -i \operatorname{sgn}\left(m - \frac{T}{2}\right)\sum_{t=0}^{T-1} r_{t,m} e^{i\frac{2\pi t}{n}} \tag{1.20}$$

dimana

$\mathcal{H}_D\{r_m\}$: Nilai transformasi Hilbert aset ke-*m*

sgn : Fungsi signum

T : Jumlah observasi

$r_{t,m}$: Nilai return pada waktu ke-*t*, aset ke-*m*

Dengan menerapkan transformasi Hilbert pada Persamaan (1.20) ke *return* portofolio pada Persamaan (1.9) dan kemudian mendapatkan sinyal analitik sebagai berikut:

$$z_{t,m} = r_{t,m} + i\mathcal{H}_D\{r_m\} \tag{1.21}$$

dengan

$z_{t,m}$: Sinyal analitik yang dihasilkan. Sinyal analitik adalah representasi sinyal kompleks dari sinyal riil

$r_{t,m}$: Nilai *return* riil

Sinyal analitik yang diperoleh dari Persamaan (1.21) $z_t(0 \leq t \leq T)$ memberikan matriks kovarians bernilai kompleks sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[(z_t - E[z_t])(z_t - E[z_t])^*] \tag{1.22}$$

dimana $(*)$ merupakan *transpose*.

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dimulai pada bulan Agustus 2023 sampai bulan April 2024 dan dilaksanakan di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

2.2 Jenis dan Sumber Data

Data yang digunakan yaitu data sekunder yang diperoleh dari website *(www.investing.com)*. Data tersebut berupa data penutupan *(closing price)* dari enam aset yaitu GME, MSFT, DJI, DAX, JPY, dan AUD.

2.3 Variabel Penelitian

Variabel penelitian yang digunakan adalah nilai *return* masing-masing aset.

2.4 Langkah Analisis

Analisis kemudian dilakukan dengan tahapan sebagai berikut.

1. Menentukan nilai *return* setiap aset.
$$r_{t,m} = \frac{P_{t,m} - P_{t-1,m}}{P_{t-1,m}}$$
2. Melakukan transformasi nilai *return* kedalam bentuk kompleks menggunakan Transformasi Hilbert.
$$\mathcal{H}_D\{r_m\} = -i \operatorname{sgn}\left(m - \frac{n}{2}\right) \sum_{t=0}^{n-1} r_{t,m} e^{i\frac{2\pi t}{n}}$$
3. Membentuk matriks kovarians bernilai kompleks
$$\boldsymbol{\Sigma} = E[(z_t - E[z_t])(z_t - E[z_t])^*]$$
4. Menentukan bobot masing-masing asset
$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$$
5. Menghitung *return* portofolio
$$R_t = \sum_{m=1}^{M} \omega_m r_{t,m}$$
6. Mencari nilai estimasi VaR
$$VaR = Z_\alpha . \sigma_p$$
7. Mencari nilai estimasi CVaR-K
$$CVaR_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{VaR_\alpha} R_t f(R_t) dR_t$$

2.5 Diagram Alur Penelitian

Tahapan penilitian tersebut dapat diringkas dalam diagram alur *(flowchart*) sebagai berikut.